

# 教員免許状更新講習 (数学)

## 「組合せ論について」

作成者：石川雅雄 (岡山大学・大学院自然科学研究科)\*

### 1 整数の分割

自然数  $n$  を、自然数の和で書く方法を  $n$  の分割といいます。例えば、 $5 = 2 + 2 + 1$  のように、同じ数が繰り返されてもよく、 $5 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 = 1 + 2 + 2$  のように、同じ数字が同じ回数現れるが、現れる順番が違っただけのときは、同じ分割と考えます。(順序で区別するときは composition と言われます。) 今後、現れる数字を非増加に並べて  $\lambda = (2, 2, 1)$  を  $5$  の分割ということにします。

定義 1.1. 自然数  $n$  の分割 (partition) とは、自然数の非増加列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  で、

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0, \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i = n$$

を満たすものをいいます。  $r$  を分割  $\lambda$  の長さといい、 $\ell(\lambda)$  と書きます。また、

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i = n$$

を、分割  $\lambda$  の重みといい、 $|\lambda|$  で表します。また、 $n$  の分割の全体の集合を  $\mathcal{P}_n$ 、その個数を  $p(n)$  と書き、これを 分割数 (number of partitions) と呼びます。

例えば、 $5$  の分割は、 $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$  のように 7 通りあります。 $5$  だけによる分割  $(5)$  や、 $1$  を 5 個集めた  $(1, 1, 1, 1, 1)$  なども  $5$  の分割です。書く手間を省略するために  $(1, 1, 1, 1, 1)$  は  $1^5$ 、 $(2, 2, 1)$  は  $2^2 1$ 、 $(2, 1, 1, 1)$  は  $2 1^3$  のような記法を使うことにしましょう。ここでは  $1^5$  は  $1$  の  $5$  乗という意味ではないことに注意してください。この記法を用いると、 $6$  の分割の方法は

$$\mathcal{P}_6 = \{6, 51, 42, 41^2, 3^2, 321, 31^3, 2^3, 2^2 1^2, 21^4, 1^6\}$$

の 11 通りあります。

問題 1.2.  $n = 2, 3, 4$  に対して、分割の集合  $\mathcal{P}_n$  を求めなさい。

特に、 $n = 0$  のとき、 $0$  の分割は  $\emptyset$  (空集合) が 1 つあると考えて、 $p(0) = 1$  と定義します。一般には

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 2, \quad p(3) = 3, \quad p(4) = 5, \quad p(5) = 7, \quad p(6) = 11, \dots$$

です。自分で確認してみてください。

\*〒700-8530 岡山市北区津島中 3-1-1, masaoishikawa@okayama-u.ac.jp

## 定理 1.3. 分割数について

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \frac{1}{1-x^4} \cdots$$

が成り立つ.

証明. 左辺の無限和というのは、何なのか? 右辺の無限積が何を意味しているのかを考えることが重要です. 左辺の無限和は

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + \cdots$$

のように、 $n$  の分割の個数  $p(n)$  を  $x^n$  の係数にしたものを、ずうつ~と ( $\infty$  まで) 考えるということの意味します. これを  $p(n)$  の母関数 (mother function) といいます. 一方の右辺は、

$$\frac{1}{1-x^i} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + x^{4i} + \cdots$$

という展開を用いると  $i$  が何回も出ること表しています. これを寄せ集めると

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = (1 + x + x^2 + \cdots) \{1 + x^2 + (x^2)^2 + \cdots\} \cdots$$

となり、展開すると分割の各項が得られます.  $\square$

問題 1.4. 定理 1.3 を使って、 $n = 7, 8, 9$  に対して  $p(n)$  の値を求めなさい.

## 2 ヤング図形

次に、分割を視覚化してみましょう.

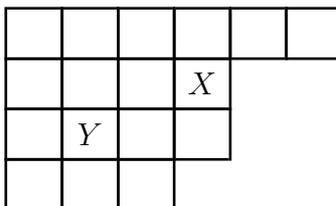
**定義 2.1.** (Young 図形) 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  が与えられたときに、第 1 行に  $\lambda_1$  の正方形、第 2 行に  $\lambda_2$  の正方形、 $\dots$ 、第  $r$  行に  $\lambda_r$  の正方形を、左端を揃えてできる図形をヤング図形 (Young diagram) または Ferrers Graph といいます.<sup>1</sup> ヤング図形の正方形を箱 (cell)、上から第  $i$  番目の横の箱の並びを第  $i$  行 ( $i$ th row)、左から第  $j$  番目の縦の箱の並びを第  $j$  列 ( $j$ th column)、

<sup>1</sup>アルフレッド・ヤング (Alfred Young) (1873 年 4 月 16 日 - 1940 年 12 月 15 日) は、英国の数学者兼牧師です. 彼は、英国ランカシャー州のウイドネスという町で生まれ、サマセット州のモンク トンクーム高校を卒業して、クエアカレッジに進学し、1895 年に学士としてケンブリッジ大学を卒業すると同時に、(当時、数学で非常に優秀な卒業生に与えられた) ラングラー賞の 10 人目の受賞者の荣誉に輝きました. 彼は群論の分野の業績で知られています. ヤング図形とヤング盤は、彼の名にちなんで名付けられています. 1901 年、ケンブリッジ大学セルウィン・カレッジでの講師の地位に任命され、1905 年クエア・カレッジへ移動しました. また、1902 年には、ジョン・ヒルトン グレースと共著で、「不変式の代数 (Algebra of Invariants)」という本を出版しています. 1907 年に、彼は、エディス・クララ嬢 (旧姓・ウィルソン) と結婚しました. 1908 年に、彼は牧師に任命され、1910 年にケンブリッジの 25 マイル東にあったエセックス州の Birdbrook という町で教区司祭となりました. 彼は人生の残りの部分をそこに住んでいましたが、1926 年にケンブリッジ大学で再び講義を始めました. しかし、彼の不変式論と対称群に関する論文のほとんどは、彼が牧師であった時代に書かれました.



第  $i$  行と第  $j$  列が交わる場所にある箱を箱  $(i, j)$  (cell  $(i, j)$ ) と表示することにします. 行の数を行数 (row number), 列の数を列数 (column number) といいます. また,  $\lambda$  のヤング図形を  $Y_\lambda$  または, 特に混乱がないときは, 分割  $\lambda$  と同一視して, 単に  $\lambda$  で代用します. 例えば,  $(i, j) \in Y_\lambda$  または  $(i, j) \in \lambda$  のような書き方をします.

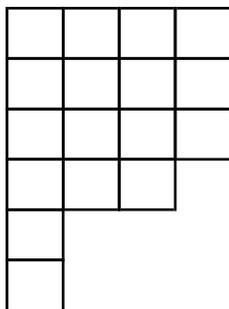
次に例を見てみましょう. 例えば,  $\lambda = 64^23$  は 17 の分割です.  $\lambda$  のヤング図形  $Y_\lambda = Y_{64^23}$  は, 下の図のように, 第 1 行に 6 個の箱, 第 2 行に 4 個の箱, 第 3 行に 4 個の箱, 第 4 行に 3 個の箱を並べた図形で, 行数が 4, 列数が 6 です.



$X$  が入っているのは, 第 2 行, 第 4 列にある箱  $(2, 4)$ ,  $Y$  が入っているのは, 第 3 行, 第 2 列にある箱  $(3, 2)$  というような言い方に慣れてください.

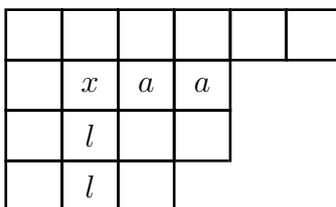
定義 2.2. 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  に対して,  $Y_\lambda$  を転置 (主対角線に関して折り返して, 行と列を入れ替える) してできる図形をヤング図形とする分割を  $\lambda$  の転置 (conjugate) といい,  $\lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_s)$  と書きます. ここで,  $s$  は  $\lambda$  の列数です.

例えば, 上の例の 17 の分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_\lambda = Y_{64^23}$  を転置すると



のように, 分割  $\lambda' = 4^331^2$  のヤング図形  $Y_{4^331^2}$  ができます. または, 長い記法だと  $\lambda' = (4, 4, 4, 3, 1, 1)$  と書くことができます.

定義 2.3. (鉤) 分割  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  のヤング図形を  $Y_\lambda$ ,  $(i, j) \in Y_\lambda$  を箱  $(i, j)$  とします. 箱  $(i, j)$  の (同じ行で) 右にある箱と, (同じ列で) 下にある箱と  $(i, j)$  の箱を合わせた集合を  $H_\lambda(i, j)$  と書き, 箱  $(i, j)$  における鉤 (hook), または, 箱  $(i, j)$  を頂点とする鉤といいます. また, 鉤 (hook) の中にある箱の個数を, 箱  $(i, j)$  における鉤長 (hook length) といい,  $h_\lambda(i, j)$  と書きます. 箱の座標  $(i, j)$  を  $x = (i, j)$  のように書くときには, それぞれ  $H_\lambda(x)$ ,  $h_\lambda(x)$  のように書きます.



例えば, 分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  の箱  $x = (2, 2)$  における鉤は, 上図のように  $x$  の右にある  $a$  を書き込んだ箱の集合 (これを腕 (arm) といいます),  $x$  の下にある  $l$  を書き込んだ箱の集合 (これを足 (leg) といいます), それから  $x$  自身を合わせた集合です. 集合の記号を使って書くと

$$H_\lambda(x) = H_\lambda(2, 2) = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 2)\}$$

と書き表され,  $x = (2, 2)$  における鉤長は,  $H_\lambda(x)$  に含まれる箱数  $h_\lambda(x) = h_\lambda(2, 2) = 5$  です. 言葉の意味が理解できたでしょうか? 理解できたならば, 分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  のすべての箱に, その箱における鉤長を書き込んでみましょう. 下図のようになります.

9	8	7	5	2	1
6	5	4	2		
5	4	3	1		
3	2	1			

定義 2.4. 分割  $\lambda$  のヤング図形  $Y_\lambda$  に対して,  $h_\lambda(x) = 1$  であるような箱  $x$  を, 角<sup>2</sup> (corner) ということにします. つまり,  $x = (i, j) \in Y_\lambda$  が角になるのは,  $(i, j+1), (i+1, j) \notin Y_\lambda$  のときです.

例えば, 上の例の分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  においては

$$(1, 6), (3, 4), (4, 3)$$

の箱が角になります.

補題 2.5. 分割  $\lambda$  のヤング図形  $Y_\lambda$  においては,

$$h_\lambda(i, j) = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1 \quad (2.1)$$

となります.

	$x$	$a$	$a$	$a$	$a$
	$l$				
	$l$				
	$l$				

例えば, 分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  の箱  $x = (1, 2)$  における鉤では, 腕には全部で  $\lambda_1 - 2 = 6 - 2 = 4$  個の箱があり, 足には全部で  $\lambda'_2 - 1 = 4 - 1 = 3$  個の箱があり, 鉤長は  $h_{64^23}(1, 2) = 4 + 3 + 1 = 8$  です.

証明. ヤング図形  $Y_\lambda$  の箱  $(i, j)$  の右にある箱の数は  $\lambda_i - j$  で, 下にある箱の数は  $\lambda'_j - i$  で, それに  $(i, j)$  の箱の 1 個をたすと右辺になります.  $\square$

<sup>2</sup> 「かど」と読んでください.

### 3 標準ヤング盤と鉤長公式

次に、ヤング図形に数字を書き込んで、情報を書き込んだヤング盤というものを考えてみましょう。ヤング盤というのは、Alfred Young が対称群の既約表現を記述するために、考案した図形で、これから述べる対象が何の役にも立たない遊びのために考えられているのではなく、それを数えることは既約表現の次元を記述するという、群の表現論という現代数学の中で重要な役割を果たしているわけですが、ここでは、そういう知識は前提とせず、遊びとして考えても面白い公式だということをお紹介しましょう。

**定義 3.1.** (標準ヤング盤)  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$  が自然数  $n$  の分割で、 $Y_\lambda$  をそのヤング図形とします。  $Y_\lambda$  の箱の数は全部で  $n$  です。このとき、 $Y_\lambda$  に  $1, \dots, n$  の数字を、ちょうど 1 回ずつ書き込んだ図形  $T$  が

- i) 各行では左から右に数字が増える
- ii) 各列では上から下に数字が増える

という条件を満たすとき、 $T$  を標準ヤング盤 (standard Young tableau), または、標準盤 (standard tableau) といいます。<sup>3</sup> また、ベースになる  $\lambda$  を、この標準ヤング盤の形 (shape) といいます。また、形が  $\lambda$  の標準ヤング盤全体の集合を  $\mathcal{S}_\lambda$  と書き、その個数を  $\text{SYT}_\lambda$  で表しましょう。

例えば、形が  $6^2 3$  の標準ヤング盤の 1 つとして

1	3	7	8	10	16
2	4	9	13		
5	6	12	17		
11	14	15			

があります。このヤング図形には、1 から 17 の数字がちょうど 1 回ずつ書き込まれ、左から右に、または上から下に見ていくと必ず増えることを確認してください。もちろん、これ以外にも、この形の標準ヤング盤はたくさんありますね? では、一体いくつあるのでしょうか? というのが、今日の講義のメインテーマです。

例えば、形が  $3^2$  の標準ヤング盤の集合  $\mathcal{S}_{3^2}$  は、次の 5 つから成り、 $\text{SYT}_{3^2} = 5$  です。

1	2	3	1	2	4	1	2	5	1	3	4	1	3	5
4	5	6	3	5	6	3	4	6	2	5	6	2	4	6

**問題 3.2.** 形が 21 である標準ヤング盤を全部書いてください。

**定理 3.3.** (Frame-Robinson-Thrall [1])  $\lambda$  が  $n$  の分割 ( $|\lambda| = n$ ) のとき、形が  $\lambda$  の標準ヤング盤は、全部で

$$\text{SYT}_\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h_\lambda(x)} \quad (3.1)$$

<sup>3</sup> tableau はフランス語の「表」という意味で、英語の辞書を引いても載っていません。複数形は tableaux になります。フランス語を勉強された方は発音が変わらないことを御存じだと思います。

通りあります。この公式は Frame-Robinson<sup>4</sup>-Thrall の公式、または鉤長公式 (hook length formula) と呼ばれる有名な公式です。

例えば、上の例で、形が  $3^2$  の標準ヤング盤は、5 種類あることを確かめました。鉤長公式の右辺の分子は  $6!$  で、分母は、分割  $3^2$  のヤング図形  $Y_{3^2}$  に書き込んだ各箱の鉤長

4	3	2
3	2	1

を全部掛け合わせたものです。したがって

$$\frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h_{\lambda}(x)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$

で、鉤長公式が正しいことが確認できます。

これくらいでは信じられないという人は、もっと大きな例で計算してみてください。例えば、 $321$  は  $6$  の分割ですが、そのヤング図形  $Y_{321}$  に書き込んだ各箱の鉤長は

5	3	1
3	1	
1		

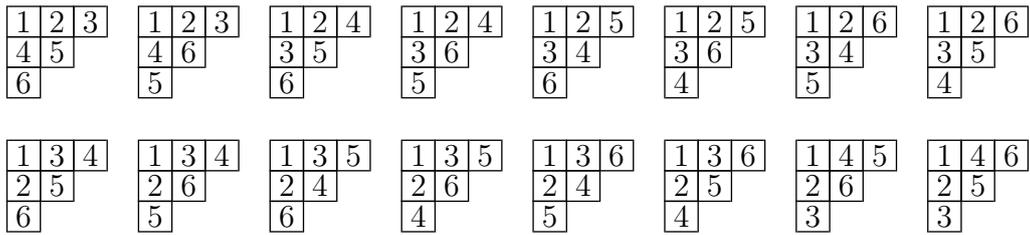
になります。よって、鉤長公式の右辺は

$$\frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h_{\lambda}(x)} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 16$$

<sup>4</sup>Gilbert de Beauregard Robinson (1906–1992) ギルバート・ロビンソンは 1906 年にトロントで生まれました。彼は、St. Andrew カレッジに進学し、1927 年にトロント大学を卒業しました。その後、彼はケンブリッジ大学で博士号を取得し、彼の指導教官は、群論学者のアルフレッド・ヤングでした。オタワで兵役に就いた期間を除いて、彼は、1971 年に引退するまで、トロント大学数学科に務めました。ロビンソンは対称群の研究のエキスパートで、その分野では権威でした。1938 年には、彼はリトル・リチャードソン法則、後に Robinson-Schensted 対応として知られるようになる対応の研究論文を発表し、その業績は現在でも知られています。彼は、対称群に関する 40 余りの論文を書き、また、「幾何学の基礎 (The Foundations of Geometry)」(1940 年)、「対称群の表現論 (The Representations of the Symmetric Groups)」(1961 年)、「ベクトル幾何学 (Vector Geometry)」(1962 年)の著書もあります。彼の最後の数学の本はアルフレッド・ヤングの論文集(1977 年)の編集でした。その後、彼は、数学科、地域、および彼の家族歴の短い本を書きました。兵役でオタワにいた頃、ロビンソンは、カールトン大学の創設時の講師の一人であり、1944 年にはカナダ王立協会の会員に選出されました。戦時中の彼の暗号に関わる仕事は長い間、秘密にされてきましたが、最近のジョン・H・ブライデンによる著作「最高に保持された機密 (Best Kept Secret)」という本の中に記載されています。彼は、カナダ軍諜報機関 (SIGINT Examination Unit) の主任になり、戦時中の暗号解読の指揮を取り、暗号解読部門を設立し、戦後のカナダのこの部門に少なからず影響を与え、英国の勲章 (Most Excellent Order of the British Empire) を授与されました。トロント大学数学科に戻ったロビンソンは、1945 年にカナダ数学会議 (Canadian Mathematical Congress) の創設に寄与し、H.S.M. コークセターと一緒に、カナダ数学誌 (Canadian Journal of Mathematics) という学術雑誌を創設しました。この雑誌の創刊号は 1949 年の出版され、その後、彼は 30 年の間、この雑誌の編集長 (Managing Editor) の座にありました。ロビンソンは 1953 年から 1957 年まで、カナダ数学会 (Canadian Mathematical Society) の会長 (president) を勤め、1995 年に彼の名前を冠した賞が作られました。ロビンソンは、数多くの責任ある職を歴任し、カナダ王立協会の科学部門の長、トロント大学基金 (慈善財団) の長、ファカルティクラブ、数学の歴史と哲学協会 (the Society for the History and Philosophy of Mathematics) の会長、数学の NRC (National Research Council) 委員会の委員長として、また 1965 年から 1971 年におけるトロント大学の研究管理のための第一副会長などです。これらおよびその他のコミュニティサービスのために彼は連邦政府と州政府からのいくつかのメダルや他の賞を受賞しました。ロビンソンは 1992 年にトロントで亡くなりました。



になります. では, 慎重に形が 321 の標準ヤング盤をすべて書き出してみてください.



で  $\text{SYT}_{321} = 16$  となり, この場合も鉤長公式が正しいことが確認できます.

## 4 鉤長公式の漸化式

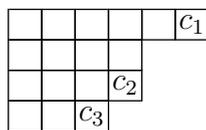
鉤長公式については, いろいろな証明が知られていますが, ここでは, Greene-Nijenhuis-Wilf [2] による初等的な確率論による証明を紹介します.

補題 4.1. 分割  $\lambda$  を形に持つ標準ヤング盤の個数  $\text{SYT}_\lambda$  について

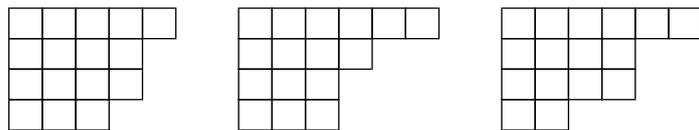
$$\text{SYT}_\lambda = \sum_{\mu} \text{SYT}_\mu \tag{4.1}$$

が成り立ちます. ここで, 右辺の和は, ヤング図形  $Y_\lambda$  から, どこかの角を取った形  $\mu$  全体を動かします.

例えば, 分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  では,

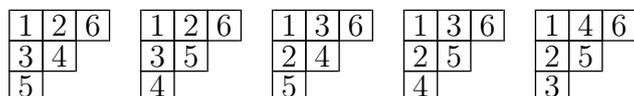


のように  $c_1 = (1, 6)$ ,  $c_2 = (3, 4)$ ,  $c_3 = (4, 3)$  の 3 つの角があります. したがって  $c_1, c_2, c_3$  のそれぞれを取ると, 次のような 3 通りの  $\mu$  について和を取ることになります.



証明.  $\lambda$  を  $n$  の分割として,  $T \in \mathcal{S}_\lambda$  を, 形が  $\lambda$  の標準ヤング盤とすると,  $n$  は必ず, どこかの角にあります. ですから, この  $n$  の入った箱を取り除くと, この角を取った形  $\mu$  の標準ヤング盤  $T'$  ができます. 逆に,  $\lambda$  から角を取った形  $\mu$  の標準ヤング盤  $T'$  があったら, そのどこかに角を付け加えて, そこに  $n$  を入れることによって, 形が  $\lambda$  の標準ヤング盤  $T$  が作られます.  $\square$

証明の意味が理解できたでしょうか? 例えば,  $\lambda = 321$  のときは, 角は  $c_1 = (1, 3)$ ,  $c_2 = (2, 2)$ ,  $c_3 = (3, 1)$  の 3 箇所です.  $c_1 = (1, 3)$  に 6 がある標準ヤング盤  $T$  は



の 5 通りあります. これから角  $c_1$  を取り除くと

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

のように  $\mu = 2^2 1$  を形にする標準ヤング盤  $T'$  ができます. 逆に, 角  $c_1 = (1, 3)$  に 6 の入った箱を付けると, 元の  $T$  に戻ります. 同様に,  $c_2 = (2, 2)$  に 6 がある標準ヤング盤  $T$  は

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

の 6 通りあります. これから,  $c_2 = (2, 2)$  の箱を取り除くと

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$$

のように  $\mu = 3 1^2$  を形にする標準ヤング盤  $T'$  ができます. 逆に, 角  $c_1 = (2, 2)$  に 6 の入った箱を付けると, 元の  $T$  に戻ります. 最後に,  $c_3 = (3, 1)$  に 6 がある標準ヤング盤  $T$  は

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array}$$

の 5 通りあります. これから角  $c_3$  を取り除くと

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

のように  $\mu = 3 2$  を形にする標準ヤング盤  $T'$  ができます. 逆に, 角  $c_3 = (3, 1)$  に 6 の入った箱を付けると, 元の  $T$  に戻ります.

このように, 角  $c_1, c_2, c_3$  のそれぞれの箱を取った  $\mu = 2^2 1, 3 1^2, 3 2$  のそれぞれの形の標準ヤング盤から, 元の  $\lambda = 3 2 1$  の形の標準ヤング盤が作れるので

$$\text{SYT}_{321} = \text{SYT}_{2^2 1} + \text{SYT}_{3 1^2} + \text{SYT}_{3 2} = 5 + 6 + 5 = 16$$

ということを示す, 補題 4.1 の (4.1) 式は表しています. このように, (4.1) 式は標準ヤング盤の定義から自然に成り立つ性質なので, (3.1) 式の右辺が, 同じ (4.1) 式をみたすことを示すことが, この講義の最大の眼目です. そこで, (3.1) の右辺を, 次のように置くことにしましょう.

定義 4.2.  $\lambda$  が  $n$  の分割のとき,

$$F_\lambda = \frac{n!}{\prod_{x \in \lambda} h_\lambda(x)}$$

と定義します.  $\lambda = \emptyset$  のときは,  $F_\lambda = 1$  と約束します. また, 箱  $x = (\alpha, \beta)$  が  $\lambda$  の角のとき,  $\lambda$  から, 箱  $x$  を取り除いてできるヤング図形を  $\mu$  として,  $F_\mu$  を  $F_\lambda(\alpha, \beta)$  と書くことにします.

そこで, 目標は

$$F_\lambda = \sum_{(\alpha, \beta)} F_\lambda(\alpha, \beta) \quad (4.2)$$

を示すことです. ここで, 右辺の和は, 先ほどと同様に, ヤング図形  $Y_\lambda$  の角  $(\alpha, \beta)$  全体を動かします. もし, この式が示されれば,  $\lambda = \emptyset$  や  $\lambda = 1$  のときは, 明らかに成り立っているので, 帰納的に証明が完結します. (4.2) 式の両辺を  $F_\lambda$  で割ると

$$1 = \sum_{(\alpha, \beta)} \frac{F_\lambda(\alpha, \beta)}{F_\lambda} \quad (4.3)$$

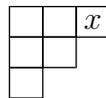
という形になります. 左辺は 1 で, 全確率空間と考えられるので, 次節で (4.3) 式の確率論的解釈による証明を与えます.

## 5 確率論的証明

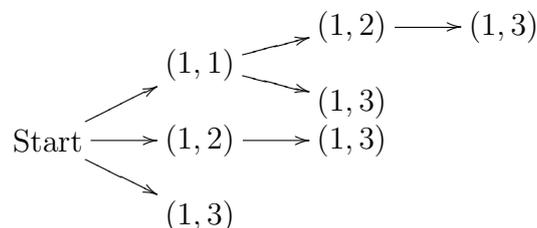
ここでは, (4.3) 式に, 確率論的な意味を与える次のような試行を定義します.

**定義 5.1. (試行)**  $\lambda$  を  $n$  の分割とします. 次のような試行を考えます. 最初の操作として, ヤング図形  $Y_\lambda$  の 1 つの箱  $(i_1, j_1)$  を無作為に選ぶことにします. ここで,  $Y_\lambda$  のどの箱も等確率  $1/n$  で選ばれるとします. ( $n = |\lambda|$ ). 次に,  $(i_1, j_1)$  を頂点にする鉤の中にある箱で,  $(i_1, j_1)$  以外の箱  $(i_2, j_2)$  を無作為に等確率で選びます. このとき, どの箱の選ばれる確率も  $1/(h_\lambda(i_1, j_1) - 1)$  です. 今度は, 箱  $(i_2, j_2)$  を頂点にする鉤の中にある  $(i_2, j_2)$  以外の箱を, 無作為に等確率で選びます. このとき, どの箱の選ばれる確率も  $1/(h_\lambda(i_2, j_2) - 1)$  です. この試行を,  $Y_\lambda$  の角に到達するまで繰り返し, 最後に角が選ばれたら試行を終了します. 有限回の操作で, 必ず角に到達することは明らかですね. このとき, 角  $(\alpha, \beta)$  に到達する確率を  $p_\lambda(\alpha, \beta)$  と定義します.

例えば,  $\lambda = 321$  のときに,  $p_{321}(1, 3)$  を求めてみましょう.



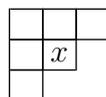
$x = (1, 3)$  に到達するのですから, 最初の一手は  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$  しかなく, どれも等確率  $\frac{1}{6}$  で選ばれます. もし, 初手が  $(1, 1)$  ならば, 2 回目の箱は  $(1, 2)$  か  $(1, 3)$  しか  $x$  に到達できませんが, この  $(1, 2)$  が選ばれる確率は  $\frac{1}{4}$  であることに, 注意してください. もし,  $(1, 2)$  が選ばれたら,  $(1, 3)$  か  $(2, 2)$  が等確率で選ばれますので  $(1, 3)$  が選ばれる確率は  $\frac{1}{2}$  です. いずれにしても  $(1, 3)$  に到達したら, その時点で試行はストップします. 樹形図を描くと



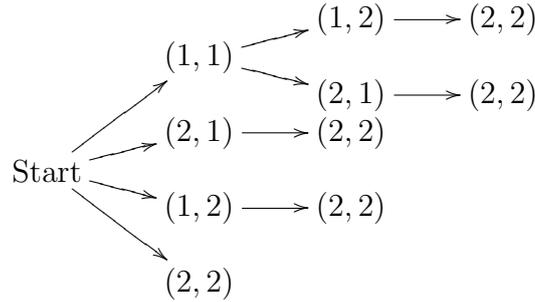
となり, 樹形図から確率を計算すると

$$p_{321}(1, 3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{5}{16}$$

となります. 同様に,  $p_{321}(2, 2)$  を求めるために



を参考にして、樹形図を描くと



となるので

$$p_{321}(2, 2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$$

となります。

問題 5.2. 同様の樹形図を描いて  $p_{321}(3, 1)$  を求めてください。

いきなり、「 $p_\lambda(\alpha, \beta)$  を求めよ?」という問題を出されたら、きっと、確率論の問題としては難問と思われるかもしれませんが、しかし、聡明な皆さんは、上に計算した例から、次の驚くべき定理を推測した方がいるかもしれません。

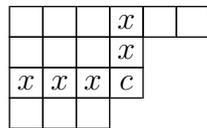
定理 5.3.  $\lambda$  を  $n$  の分割として、 $(\alpha, \beta)$  を  $Y_\lambda$  の角とします。このとき、

$$p_\lambda(\alpha, \beta) = \frac{F_\lambda(\alpha, \beta)}{F_\lambda} \tag{5.1}$$

が成り立ちます。

実は、(5.1) 式を証明したら、(4.3) 式の証明は瞬時に終わってしまいます。なぜなら、定義 5.1 の試行は、必ずどこかの角に行き着くはずなので、全部の角  $(\alpha, \beta)$  について加えたら全確率空間になって、1 になる!という当たり前のことなのです。つまり、定理 5.3 を証明したら、Frame-Robinson-Thrall の公式が証明できるということになります。では、早速、皆さんと一緒に、定理 5.3 の証明を考えてみましょう。

証明.  $(\alpha, \beta)$  を角とするとき、角  $c = (\alpha, \beta)$  を取り除いたヤング図形を  $\mu$  とすると、 $h_\mu(i, j)$  は、 $c$  の真上にある箱  $(i, \beta)$ ,  $1 \leq i < \alpha$ , 及び  $c$  の左にある箱  $(\alpha, j)$ ,  $1 \leq j < \beta$  では  $h_\mu(i, j) = h_\lambda(i, j) - 1$ , それ以外では、 $h_\mu(i, j) = h_\lambda(i, j)$  なので、(5.1) 式の右辺の分子と分母でキャンセルすることに注意してください。



したがって

$$\begin{aligned} \frac{F_\lambda(\alpha, \beta)}{F_\lambda} &= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \frac{h_\lambda(i, \beta)}{h_\lambda(i, \beta) - 1} \prod_{j=1}^{\beta-1} \frac{h_\lambda(\alpha, j)}{h_\lambda(\alpha, j) - 1} \\ &= \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left( 1 + \frac{1}{h_\lambda(i, \beta) - 1} \right) \prod_{j=1}^{\beta-1} \left( 1 + \frac{1}{h_\lambda(\alpha, j) - 1} \right) \end{aligned}$$

となります。ここでは、 $h_\lambda(\alpha, \beta) = 1$  という事も使っています。ここで、証明を完成させる前に、次に述べる補題が必要になります。□

定義 5.4. (条件付き確率)  $\lambda$  を分割として, ある自然数の集合の組  $(A, B)$  が与えられたとします. このとき  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$  とおいて

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k, \quad 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_l$$

としておきます. ここで  $k, l \geq 1$  は任意の自然数です. さらに, 箱  $(a_k, b_l)$  は分割  $\lambda$  のヤング図形  $Y_\lambda$  の中にあるとします. このとき, 始点  $(a_1, b_1)$  から始めて, 先ほどのように  $(a_1, b_1)$  を頂点とする鉤上の点が無作為に等確率で選んで行くという操作を行い, 最後に箱  $(a_k, b_l)$  に到達するとすれば, 途中で通過する箱はジグザグの経路を通るわけですが, このとき, 通過する箱の行番号の集合が  $A$  で, 列番号の集合が  $B$  になるという事象を  $E_{A,B}$  と書くことにします. 言い換えると, ジグザグ経路が

$$(a_1, b_1) = (i_1, j_1) \rightarrow (i_2, j_2) \rightarrow \dots \rightarrow (i_m, j_m) = (a_k, b_l)$$

となったときに

$$\{i_1, \dots, i_m\} = A \quad \{j_1, \dots, j_m\} = B$$

となる事象のことです. このとき, 始点が  $(a_1, b_1)$  であるという条件のもとで  $E_{A,B}$  が起こる確率を

$$p_\lambda(A, B | a_1, b_1)$$

と書くことにします. これは, 始点が  $(a_1, b_1)$  であるという条件の下での条件付き確率ですので, 始点を置く確率  $1/n$  は掛けないことに注意してください.

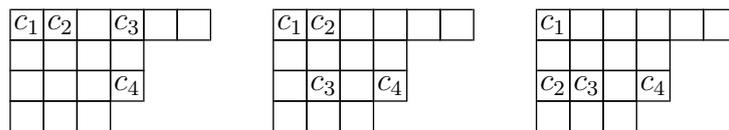
例えば, 分割  $\lambda = 64^23$  のヤング図形  $Y_{64^23}$  において  $A = \{1, 3\}$ ,  $B = \{1, 2, 4\}$  とすると

$$c_1 = (i_1, j_1) \rightarrow c_2 = (i_2, j_2) \rightarrow c_3 = (i_3, j_3) \rightarrow c_4 = (i_4, j_4)$$

という経路で,

$$\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = A \quad \{j_1, j_2, j_3, j_4\} = B$$

となるものは, 次の 3 通りの経路が考えられます.



したがって, それぞれの経路の確率を計算すると

$$p_{64^23}(A, B | 1, 1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$$

となります.

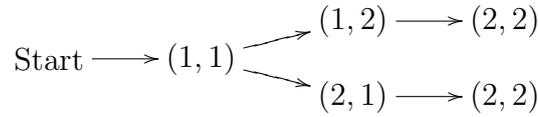
もう少し, 小さい例で  $\lambda = 321$ ,  $A = \{2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  としてみましょう. このときは, 始点は  $(2, 1)$  で終点は  $(2, 2)$  ですから, 樹形図を描くと

$$\text{Start} \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (2, 2)$$

という経路しかありません. よって, この経路の条件付き確率は

$$p_{321}(\{2\}, \{1, 2\} | 2, 1) = \frac{1}{2}$$

です. 始点が  $(2, 1)$  という条件のもとでの条件付き確率なので, 始点を置く確率  $\frac{1}{6}$  は掛けないことに注意してください. また,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  のときはこのときは, 始点は  $(1, 1)$  で終点は  $(2, 2)$  で,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$  になる方法を, 樹形図に描くと



なので, これらの経路の条件付き確率を求めると

$$p_{321}(\{1, 2\}, \{1, 2\} | 1, 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

になります.

問題 5.5. 上と同様にして

$$p_{321}(\{1, 2\}, \{2\} | 1, 2) = \frac{1}{2} \quad p_{321}(\{2\}, \{2\} | 2, 2) = 1$$

を示してください.

補題 5.6.  $\lambda$  を分割として, ある自然数の集合の組

$$(A, B) = (\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_l\})$$

が与えられ,  $(a_k, b_l)$  が  $Y_\lambda$  の角であるとしませう. このとき

$$p_\lambda(A, B | a_1, b_1) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_\lambda(a_i, b_l) - 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{h_\lambda(a_k, b_j) - 1} \quad (5.2)$$

が成り立ちます. ここで, 空の積は 1 と考えてください.

証明. 始点は,  $(a_1, b_1)$  ですが, 次に移るのは, 必ず  $(a_1, b_2)$  か, または,  $(a_2, b_1)$  のどちらかでなければならず, どちらも  $\frac{1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1}$  の確率で選ばれます. もし,  $(a_1, b_2)$  に行った場合は, 列番号には, もう  $b_1$  が出てくることはないので,  $(a_1, b_2)$  を始点として, 経路集合が  $(A, \{b_2, \dots, b_l\})$  になる確率を考えればよく, また,  $(a_2, b_1)$  に行った場合は, 行番号には, もう  $a_1$  が出てくることはないので,  $(a_2, b_1)$  を始点として, 経路集合が  $(\{a_2, \dots, a_k\}, B)$  になる確率を考えればよいこととなります. すなわち

$$\begin{aligned} p_\lambda(A, B | a_1, b_1) &= \frac{1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1} p_\lambda(A, B \setminus \{b_1\} | a_1, b_2) + \frac{1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1} p_\lambda(A \setminus \{a_1\}, B | a_2, b_1) \\ &= \frac{1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1} \{p_\lambda(A, B \setminus \{b_1\} | a_1, b_2) + p_\lambda(A \setminus \{a_1\}, B | a_2, b_1)\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

という式が成り立ちます. ここで,  $B \setminus \{b_1\}$  は集合  $B$  から  $b_1$  を除いた集合  $\{b_2, \dots, b_l\}$  を表します.  $A \setminus \{a_1\}$  も  $\{a_2, \dots, a_k\}$  という意味です. ただし, この式は,  $B \setminus \{b_1\} = \emptyset$  や  $A \setminus \{a_1\} = \emptyset$  のときは,

$$p_\lambda(A, \emptyset | a_1, b_2) = p_\lambda(\emptyset, B | a_2, b_1) = 0$$

と定義されていると解釈してください. そこで, この (5.3) 式を使って, (5.2) 式を  $|A| + |B|$  に関する帰納法によって証明しましょう. ここで  $|A|$  とは  $A$  の元の個数です.

- (i)  $|A| + |B| = 2$  のときは,  $|A|, |B| \geq 1$  なので  $A = \{a_1\}, B = \{b_1\}$  で, この場合は, (5.2) 式の右辺の積は空なので 1 で, 経路も始点  $(a_1, b_1)$  が終点になり, 左辺の確率も 1 になり, 成り立ちます.
- (ii)  $n \geq 3$  として,  $|A| + |B| = n - 1$  まで, (5.2) 式が成り立つとします. (5.3) 式より

$$p_\lambda(A, B | a_1, b_1) = \frac{1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1} \left\{ \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_\lambda(a_i, b_l) - 1} \prod_{j=2}^{l-1} \frac{1}{h_\lambda(a_k, b_j) - 1} + \prod_{i=2}^{k-1} \frac{1}{h_\lambda(a_i, b_l) - 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{h_\lambda(a_k, b_j) - 1} \right\}$$

$$= \frac{h_\lambda(a_1, b_l) - 1 + h_\lambda(a_k, b_1) - 1}{h_\lambda(a_1, b_1) - 1} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_\lambda(a_i, b_l) - 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{h_\lambda(a_k, b_j) - 1}$$

となります. ここで, 補題 2.5 の (2.1) 式より  $h_\lambda(a_1, b_l) = \lambda_{a_1} + \lambda'_{b_l} - a_1 - b_l + 1$ ,  $h_\lambda(a_k, b_1) = \lambda_{a_k} + \lambda'_{b_1} - a_k - b_1 + 1$ ,  $h_\lambda(a_1, b_1) = \lambda_{a_1} + \lambda'_{b_1} - a_1 - b_1 + 1$ ,  $h_\lambda(a_k, b_l) = \lambda_{a_k} + \lambda'_{b_l} - a_k - b_l + 1$  なので

$$h_\lambda(a_1, b_l) + h_\lambda(a_k, b_1) = h_\lambda(a_1, b_1) + h_\lambda(a_k, b_l)$$

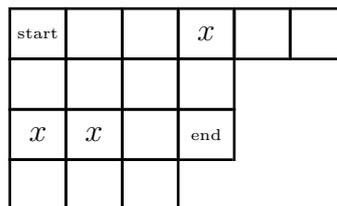
となり,  $(a_k, b_l)$  が角なので,  $h_\lambda(a_k, b_l) = 1$  ということを使うと

$$p_\lambda(A, B | a_1, b_1) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_\lambda(a_i, b_l) - 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{h_\lambda(a_k, b_j) - 1}$$

を得ます. よって, (5.2) 式は,  $|A| + |B| = n$  のときも成り立ちます.

(i), (ii) より, (5.2) 式は, 任意の  $(A, B)$  に対して成り立ちます.  $\square$

さて, この補題が正しいかどうか, 先ほどの例で確認してみましょう. 例えば, 分割が  $\lambda = 64^23$  で  $A = \{1, 3\}, B = \{1, 2, 4\}$  のとき, ヤング図形は



の形になり, (5.2) 式の右辺は  $x$  の入った箱の鉤長から 1 引いた数の逆数をかけて

$$\frac{1}{h_\lambda(1, 4) - 1} \cdot \frac{1}{h_\lambda(3, 1) - 1} \cdot \frac{1}{h_\lambda(3, 2) - 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{48}$$

となります. これは, 先ほどの計算結果  $p_\lambda(A, B | 1, 1) = \frac{1}{48}$  と一致します.

では, 定理 5.3 の (5.3) 式の証明を完成させましょう. (5.3) 式の右辺が

$$\frac{F_\lambda(\alpha, \beta)}{F_\lambda} = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{\alpha-1} \left( 1 + \frac{1}{h_\lambda(i, \beta) - 1} \right) \prod_{j=1}^{\beta-1} \left( 1 + \frac{1}{h_\lambda(\alpha, j) - 1} \right)$$

となることは証明したので、この式の右辺を展開します。例えば

$$\prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{h_{\lambda}(i, \beta) - 1}\right) = \sum_{A'} \prod_{a \in A'} \frac{1}{h_{\lambda}(a, \beta) - 1}$$

の左辺を展開すると、積の中の各括弧で 1 を選ぶか  $\frac{1}{h_{\lambda}(i, \beta) - 1}$  を選ぶかの二者択一です。後者を選ぶ添字  $i$  の集合を  $A' = \{a_1, \dots, a_{k-1}\} \subseteq \{1, \dots, \alpha - 1\}$  としましょう。したがって、右辺の和は  $\{1, \dots, \alpha\}$  の部分集合  $A'$  を動きます。これに  $a_k = \alpha$  を付け加えた集合を  $A$  とおきましょう。そうすると

$$\prod_{i=1}^{\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{h_{\lambda}(i, \beta) - 1}\right) = \sum_A \prod_{\substack{a \in A \\ a \neq \alpha}} \frac{1}{h_{\lambda}(a, \beta) - 1}$$

と書き直されます。ここで、和は集合  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$  で

$$1 \leq a_1 < \dots < a_k = \alpha$$

をみたすものを動かせばよいことになります。もう 1 つの積も同様に展開すると、

$$\prod_{j=1}^{\beta-1} \left(1 + \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha, j) - 1}\right) = \sum_B \prod_{\substack{b \in B \\ b \neq \beta}} \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha, b) - 1}$$

こちらの和は、集合  $B = \{b_1, \dots, b_l\}$  で

$$1 \leq b_1 < \dots < b_l = \beta$$

をみたすものを動かします。したがって、これらの展開を代入すると

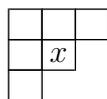
$$\frac{F_{\lambda}(\alpha, \beta)}{F_{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{(A, B)} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{h_{\lambda}(a_i, \beta) - 1} \prod_{j=1}^{l-1} \frac{1}{h_{\lambda}(\alpha, b_j) - 1}$$

となります。最後に、補題 5.6 の (5.2) 式を使うと、

$$\frac{F_{\lambda}(\alpha, \beta)}{F_{\lambda}} = \frac{1}{n} \sum_{(A, B)} p_{\lambda}(A, B | a_1, b_1)$$

となります。ここで、最初の始点  $(a_1, b_1)$  を選ぶ確率は  $1/n$  で、 $(A, B)$  をすべて動かせば、 $(\alpha, \beta)$  に到達するすべての経路の確率を足すことになるので、これは  $p_{\lambda}(\alpha, \beta)$  を与えます。これで、定理 5.3 の (5.1) 式の証明が完成されました。

最後の計算は、ちょっと抽象的な集合の記号を使って難しく思えた人のために、具体的な例で、今の計算を追ってみましょう。例えば、 $\lambda = 321$ ,  $(\alpha, \beta) = (2, 2)$  のとき



(5.3) 式の右辺は

$$\frac{F_{\lambda}(2, 2)}{F_{\lambda}} = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{h_{\lambda}(1, 2) - 1}\right) \left(1 + \frac{1}{h_{\lambda}(2, 1) - 1}\right)$$

なので, 展開すると

$$\frac{F_\lambda(2, 2)}{F_\lambda} = \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{h_\lambda(1, 2) - 1} + \frac{1}{h_\lambda(2, 1) - 1} + \frac{1}{h_\lambda(1, 2) - 1} \cdot \frac{1}{h_\lambda(2, 1) - 1} \right)$$

となります. それぞれの項を補題 5.6 (5.2) 式を使って解釈すると

$$\begin{aligned} p_\lambda(\{2\}, \{2\} | 2, 2) &= 1 \\ p_\lambda(\{1, 2\}, \{2\} | 1, 2) &= \frac{1}{h_\lambda(1, 2) - 1} = \frac{1}{2} \\ p_\lambda(\{2\}, \{1, 2\} | 1, 2) &= \frac{1}{h_\lambda(2, 1) - 1} = \frac{1}{2} \\ p_\lambda(\{1, 2\}, \{1, 2\} | 1, 1) &= \frac{1}{h_\lambda(1, 2) - 1} \cdot \frac{1}{h_\lambda(2, 1) - 1} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となります. したがって

$$\begin{aligned} &\frac{F_\lambda(2, 2)}{F_\lambda} \\ &= \frac{1}{6} \{ p_\lambda(\{2\}, \{2\} | 2, 2) + p_\lambda(\{1, 2\}, \{2\} | 1, 2) + p_\lambda(\{2\}, \{1, 2\} | 1, 2) + p_\lambda(\{1, 2\}, \{1, 2\} | 1, 1) \} \\ &= \frac{1}{6} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

は角  $(2, 2)$  に至る全ての経路を尽くして  $p_\lambda(2, 2)$  に等しくなります.

最後に, 表現論の歴史について, 簡単に触れておきましょう. ヤングやロビンソンによって創始された対称群の表現の研究は, その後, フロベニウス<sup>5</sup>によって, 有限群の(複素数体上の)表現論に発展しました. フロベニウスの目的は, “群行列式”に関する問題の理解でしたが, 特に, 有限群の指標の理論を完成させました. ほぼ同時期に, 少し遅れて, シューア<sup>6</sup>が群の表現論の基礎付けを作り, 現在の形を完成させました. また, 有限群の(複素数体上の)表現論に続いて, 1920年代後半

<sup>5</sup>フェルディナント・ゲオルク・フロベニウス (Georg Ferdinand Frobenius, 1849年10月26日 - 1917年8月3日) はドイツの数学者. 1849年10月26日にベルリン近郊の Charlottenburg に生まれる. 彼の両親は Christian Ferdinand Frobenius と Christine Elizabeth Friedrich でプロテスタントだった. 1860年に11歳で Joachimsthal Gymnasium に入学し, 1867年ゲッティンゲン大学に入学したが, 彼はそこに半期しか通わずに, ベルリン大学に転じた. ベルリン大学で, 彼はクロネッカー (Kronecker), クンマー (Kummer), ワイエルシュトラス (Karl Weierstrass) などの講義を受け, 1870年に博士号を取得した. そのときの指導教官は, ワイエルシュトラスで, 彼の博士論文は, 微分方程式の解についてであった. Sophienrealschule の Joachimsthal Gymnasium で高校の先生をした後, 1874年ベルリン大学非常勤講師に任命されたが, 彼がベルリンに住んだのは, その後しばらくで, 1875年から1892年までチューリッヒ工科大学 (Eidgenössische Polytechnikum) 教授を務めた. このチューリッヒに住んだ17年間に, 彼は結婚し家族とともに過ごした. 彼は数学の広い異なる分野で業績を持ち, 多くの重要な仕事をした. 1891年12月暮れに, クロネッカーが死に, 彼のベルリン大学における地位は空席となった. ワイエルシュトラスは, フロベニウスを呼び戻すことが, ベルリン大学を数学の最前線に保つために必要なことであると考え, フロベニウスをベルリン大学教授に任命するために, 彼の影響力を使った. 1893年からベルリン大学教授となり, 最期までその職にあり続けた. また, 彼は Prussian Academy of Sciences にも推薦された. 群の指標の概念を導入し, 有限群の表現論を実質的に完成した. これはのちに量子力学に不可欠のものとなる. また代数的整数論でフロベニウス置換を発見.



<sup>6</sup>イサイ・シューア (Issai Schur, Issai Schur, 1875年1月10日 - 1941年1月10日) は, ドイツとイスラエルの地で活動したユダヤ系の数学者. ポーランド (ベラルーシ) のモギリョフ県モギリョフ (マヒリョウ) でユダヤ系ドイツ人の子として生まれる. ベルリンで学び, 1901年に博士号を取得. 1903年に講師となり, ボン滞在を経て, 1919年に教授となる. 現在ベラルーシ領となっているロシア帝国の

までには、複素半単純 Lie 代数の有限次元表現論、コンパクト Lie 群の表現論の基礎が完成し、表現論の古典的題材になりました。一般の認知度が高いとは言えませんが、その後も発展が続き、表現論の関係する分野は多岐にわたり、現在でも、代数、解析、幾何、組合せ論など数学の広い分野に関連して、研究されています。<sup>7</sup>

## 参考文献

- [1] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, “The hook graphs of the symmetric group”. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–325.
- [2] Curtis Greene, Albert Nijenhuis, and Herbert S Wilf, “A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape”, *Advances in Mathematics*, **31** (1979), 104–109.
- [3] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Oxford Mathematical Monographs (1999).
- [4] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 1* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), Cambridge University Press (2012).
- [5] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics: Volume 2* (Cambridge Studies in Advanced Mathematics), Cambridge University Press (2001).
- [6] 寺田 至, ヤング図形のはなし (日評数学選書), 日本評論社 (2002).
- [7] 山田 裕史, 組合せ論プロムナード, 日本評論社 (2009).
- [8] Alfred Young. “Quantitative substitutional analysis II”, *Proc. London Math. Soc.*, **Ser. 1**, **35** (1902), 361–397.

一部で生まれ、ラトヴィアでも育ったが、自分自身をユダヤ人というよりはむしろドイツ人と考えていた。このため、1934年に英米の大学に招かれた時もドイツからの出国を拒んだ。にもかかわらず、1935年、彼はユダヤ人として教職を追われ、1938年には親ナチの数学者ピーベルバッハの煽動によってプロイセン学士院から追放された。このため1939年にパレスチナへ移住し、貧困と屈辱を忍びつつ晩年を送った。彼は66歳の誕生日にテルアヴィヴで死んだ。フロベニウスに師事し、(最も関係深い対象として) 群の表現について取り組んだが組合せ論や数論にも、あるいは理論物理学にまでも手掛けた。今日おそらくシューアの業績として最もよく知られたものは、シューア分解の存在に関することと、群表現論に関するシューアの補題であろう。リヒャルト・パウアー、ベルンハルト・ノイマン、ハインツ・ブリューファー、リヒャルト・ラードなどの弟子がいる。シューアの講義は学生たちに非常に人気であった。1929年、ソヴィエト連邦科学アカデミーの外国人客員として選出された。

### <sup>7</sup>Acknowledgement:

最後に、原稿を丁寧にチェックして頂いた和歌山大学教育学部の田川裕之教授に感謝の意を表したいと思います。また、山田裕史先生の本「組合せ論プロムナード」[7]をゼミで読んで解説してくれた、岡山大学理学部数学科4年の田中大貴君にも感謝の意を表したいと思います。

