経路空間上のGibbs測度に関連した微分作用素の一意性問題とその応用

河備 浩司

岡山大学大学院自然科学研究科

先端基礎科学専攻 数理科学講座

e-mail: kawabi@math.okayama-u.ac.jp

於：日本数学会2007年度秋季総合分科会@東北大学

1 はじめに

近年の Dirichlet 形式理論の発展により、確率論、ポテンシャル論、偏微分方程式をはじめとする解析学および、量子論をはじめとする物理学のつながりがますます密接なものになってきている。その中でも確率論的手法は状態空間が無限次元の場合でも有効に働くので、ここから多種多様な無限次元空間上の解析理論を構築する展開が期待できよう。

まず、Dirichlet 形式の定義を復習しておく。X を完備可分距離空間とし、(実際に後では確率測度のみを扱うが) μ を σ-有限な測度とする。2 乗可積分な実関数の空間 $L^2(\mu) = L^2(X;\mu)$ 内で稠密な線形空間 $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ で定義された対称双線形形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が **Dirichlet 形式**であるとは、以下の 3 条件を満たすときを言う。

($\mathcal{E}$1): $\mathcal{E}$ は非負、すなわち $\mathcal{E}(u,u)\ge 0,\ u\in\mathcal{F}$.

($\mathcal{E}$2): $\mathcal{E}$ は閉形式、すなわち $\mathcal{F}$ は内積 $\mathcal{E}_1(u,v) := \mathcal{E}(u,v) + (u,v)_{L^2(\mu)}$ に関して Hilbert 空間になっている。

($\mathcal{E}$3): $\mathcal{E}$ は Markov 性を持つ。
すなわち任意の $\varepsilon>0$ に対して以下の 2 条件を満たす関数 $\varphi_\varepsilon:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が存在する。

- $\varphi_\varepsilon(t)=t,\ \ \forall\, t\in[0,1].\ -\varepsilon\le\varphi_\varepsilon(t)\le 1+\varepsilon,\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}.\ 0\le\varphi_\varepsilon(t')-\varphi_\varepsilon(t)\le t'-t,\ \ t'>t.$
- $u\in\mathcal{F}\implies\varphi_\varepsilon(u)\in\mathcal{F}, \mathcal{E}\big(\varphi_\varepsilon(u),\varphi_\varepsilon(u)\big)\le\mathcal{E}(u,u).$

Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対して、生成作用素と呼ばれる $L^2(\mu)$ 上の非正な自己共役作用素 $(\mathcal{L},\mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ が

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}(\mathcal{L}) &= \big\{u\in\mathcal{F}\mid \exists\,\mathcal{L}u\in L^2(\mu)\ \text{s.t.}\ \mathcal{E}(u,v)=(-\mathcal{L}u,v)_{L^2(\mu)},\ \forall\, v\in\mathcal{F}\big\},\\ \mathcal{E}(u,v) &= (-\mathcal{L}u,v)_{L^2(\mu)}, \forall\, u\in\mathrm{Dom}(\mathcal{L}),\ \forall\, v\in\mathcal{F}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

で定まり、これが生成する半群 $\{e^{t\mathcal{L}}\}_{t\ge 0}$ は $L^2(\mu)$ 上の C_0-縮小半群となり、条件 **($\mathcal{E}$3)** より Markov 半群 $(u\in L^2(\mu),\ 0\le u\le 1,\ \mu\text{-a.e.}\Longrightarrow 0\le e^{t\mathcal{L}}u\le 1,\ \mu\text{-a.e.})$ にもなる。

また逆に $L^2(\mu)$ 上の自己共役作用素 $(\mathcal{L}, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}))$ が、

$$\big(\mathcal{L}u, (u-1)\vee 0\big)_{L^2(\mu)} \le 0, \quad u \in \mathrm{Dom}(\mathcal{L}) \tag{1.2}$$

を満たす時 (非正性はこの条件から自動的に従う)、これを **Dirichlet 作用素**と呼び、

$$\mathcal{F} := \mathrm{Dom}(\sqrt{-\mathcal{L}}), \quad \mathcal{E}(u,v) := \big(\sqrt{-\mathcal{L}}u, \sqrt{-\mathcal{L}}v\big)_{L^2(\mu)},\ u,v \in \mathcal{F}$$

は Dirichlet 形式になる (条件 (1.1) は Markov 性 **($\mathcal{E}$3)** に対応している。また当然であるが、Dirichlet 形式の生成作用素は Dirichlet 作用素である)。

しかしながら実際に個々の問題を扱う際は、Dirichlet 形式および Dirichlet 作用素の定義域が最初から明確に与えられている事はまれである。すなわち $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ や滑らかな cylinder 関数全体 $\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$ など、双線形形式 $\mathcal{E}$ および対称作用素 $\mathcal{L}_0$ が計算しやすい $L^2(\mu)$ の稠密な部分空間 $\mathcal{D}$ 上でまずは定義されている場合がほとんどである。よって個々の具体的な問題では、**pre-Dirichlet 形式** $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ (条件 **($\mathcal{E}$1)**,**($\mathcal{E}$3)** が $u \in \mathcal{D}$ に対して成り立つ双線形形式) がまずは与えられていて、そこから議論が始まる事が多い。

まずはこれが Dirichlet 形式に閉拡大できるかという問題を考えねばならない訳だが、もし $\mathcal{E}(u,v) = (-\mathcal{L}_0 u, v)_{L^2(\mu)},\ u,v \in \mathcal{D}$ と「部分積分」できたとすると (この $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ を **pre-Dirichlet 作用素**と呼ぶことにする)、$(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ は closable となり、$\mathcal{D}$ の $\mathcal{E}_1$-位相での閉包 $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ を考えることができる。閉包をとっても Markov 性は保存されるので、$(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ は Dirichlet 形式となる。この $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ に対応する自己共役作用素 $(\mathcal{L}_\mu, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_\mu))$ は、$(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の **Friedrichs 拡大**と呼ばれる Dirichlet 作用素となり、これが生成する半群は $L^2(\mu)$ 上の対称 Markov C_0-縮小半群になる。

すると次に考えるべき問題として、以下の**拡大の一意性問題**が挙げられると思う。

[**ES**] **(本質的自己共役性, strong uniqueness, L^2-uniqueness):**
- $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の $L^2(\mu)$ における自己共役拡大が一意である。

$\Leftrightarrow$ • $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の graph norm $\|u\|_{\mathcal{L}_0} := \|u\|_{L^2(\mu)} + \|\mathcal{L}_0 u\|_{L^2(\mu)}$ での閉包が自己共役作用素になる ($\mathcal{E}$ の非負性より $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ は dissipative. よって closable となることに注意)。

$\Leftrightarrow$ • 生成作用素が $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の拡大になっている様な $L^2(\mu)$ 上の対称 C_0-半群が一意である。

[MU] **(Markov 自己共役拡大の一意性, Markov uniqueness):**
- pre-Dirichlet 作用素 $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ が唯一の Dirichlet 作用素の拡大を持つ。

$\Leftrightarrow$ • 生成作用素が $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の拡大になっている様な Dirichlet 形式が一意である。

$\Leftrightarrow$ • 生成作用素が $(\mathcal{L}_0, \mathcal{D})$ の拡大になっている様な $L^2(\mu)$ 上の対称 Markov C_0-縮小半群が一意である。

明らかに [**ES**] の方が [**MU**] より強い概念である。ラフに言うと [**ES**] は Cauchy 問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}_0 u, \quad u_0 = f \in L^2(\mu)$$

の適切性 (well-posedness)、[**MU**] は $\mathcal{L}_0$ を生成作用素として持つ Markov 過程の一意性を導く。よってこれは偏微分方程式、確率論の両サイドから見て重要な問題であり、状態空

間が有限次元の場合は

$$\mathcal{E}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx \quad \text{on } L^2(\rho dx) \quad (\text{ただし } \rho \geq 0) \tag{1.3}$$

を扱った Wielens [40] などの仕事を先駆けとして、多くの研究者がこの問題を偏微分方程式・確率論双方からのアプローチにより論じてきた (詳細は Eberle [10] を参照)。

それに対して無限次元空間においては (1.3) における flat な Lebesgue 測度 "dx" に相当するような測度が存在しないので、まず (確率論的に構成された) どの測度を参照測度として扱うべきかを考える必要がある。その代表例として Wiener 空間 $W_0(\mathbb{R}^d)$ 上の Wiener 測度 $\mathcal{W}$ が挙げられよう。これは形式的表現

$$\mathcal{W}(dw) = Z^{-1} \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |w'(x)|^2_{\mathbb{R}^d} dx \Big) \prod_{x \in \mathbb{R}} dw(x), \tag{1.4}$$

(ただし Z は正規化定数、$\prod_{x\in\mathbb{R}} dw(x)$ は Feynman 流の "flat な測度 $\mathcal{D}(w)$") を持つ Gauss 測度である。Malliavin 解析で基本的な役割を果たす Ornstein-Uhlenbeck 作用素とは (1.3) において、参照測度を $\mathcal{W}(dw)$ に置き換えた Dirichlet 形式に対応する Dirichlet 作用素のことである。これは $\Delta - x \cdot \nabla$ の無限次元版と思え、固有値、固有関数のすべてが分かってしまうゆえに問題 [**ES**] は容易に解決される。これが無限次元で最も標準的な状況と言われるゆえんである。よって参照測度が $\rho(w)\mathcal{W}(dw)$ と表される場合の (1.3) に関する一意性問題が、まずは Takeda [39], Röckner-Zhang [32], [33], Shigekawa [34] などにより (主に Malliavin 解析の手法で) 論じられてきたのもある意味では自然な流れである。その他にも

- 生成作用素が pre-Dirichlet 作用素の拡大であるような確率過程 (格子スピン系の $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ を例とする無限次元空間上の確率微分方程式の解) を導入し、その一意性を用いた手法
(cf. Albeverio-Kondratiev-Röckner [1])
- 上記のアイデアを確率偏微分方程式の場合にも適用できるように拡張した手法
(cf. Da Prato [6], Da Prato-Tubaro [8], [9], Da Prato-Röckner [7])
- 有限次元近似と熱方程式の次元によらないアプリオリ評価を組み合わせた手法
(cf. Liskevich-Semenov [26], Liskevich-Röckner [25])

などの仕事が挙げられるが、無限次元空間といっても多種多様なので念頭に置くモデルによってアプローチは異なってくるのが現状である (更なる詳細は [10] を参照)。

本講演の主な目的は、無限体積経路空間 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上の Gibbs 測度を参照測度とした場合の (1.3) に相当する pre-Dirichlet 形式 (および対応する pre-Dirichlet 作用素) の一意性問題および time dependent Ginzburg-Landau 型確率偏微分方程式と呼ばれる $\mathbb{R}$ 上で定義されたランダムな反応拡散方程式との関連を Michael Röckner 氏 (Bielefeld 大学) との共同研究 [23] に沿って論じることである。ここで言う Gibbs 測度とは、形式的には

$$\mu(dw) = Z^{-1} \exp\Big(-\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |w'(x)|^2_{\mathbb{R}^d} dx - \int_{\mathbb{R}} U(w(x)) dx \Big) \prod_{x \in \mathbb{R}} dw(x), \tag{1.5}$$

ただし $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は自己 potential 関数

と表される $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度であり、ユークリッド化された場の量子論における無限体積の $P(\phi)_1$-モデルや、統計力学における界面モデル (の連続版) での平衡状態を記述する際に登場する重要な対象である。また一見すると μ は $\mathcal{W}$ に対して絶対連続のようにも思われるが、そうとはならないのも (技術的な) 特徴として挙げられよう (Remark 2.4)。

最後に本稿の構成について述べておく。第 2 節では Gibbs 測度 (1.5) の数学的定式化および基本的事項をまとめた後、(1.3) に相当する pre-Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{FC}_b^\infty)$ および pre-Dirichlet 作用素 $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ を導入し、主要な結果である一意性定理を述べる。第 3 節では証明の概略を述べる。生成作用素が $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ の拡大であるような確率過程が Iwata [16], Funaki [11], [13] などで論じられている time dependent Ginzburg-Landau 型確率偏微分方程式の解であることに着目する。ここではこれを Ornstein-Uhlenbeck 過程の " 摂動 "とみなし、Ornstein-Uhlenbeck 作用素の詳細な性質およびカップリング法による摂動項の処理を合わせることで主定理が示される。第 4 節では一意性定理の応用として Riesz 変換の有界性 (Sobolev norm の Meyer 同値性) について述べ、第 5 節にて関連する話題、注意、今後の課題について述べる。

2　問題設定と主要な結果

この節では、経路空間 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の (U-)Gibbs 測度 μ に関する基本的性質を整理し、これから考える問題設定を行う。その後、我々の主要な結果 (pre-Dirichlet 作用素なる微分作用素の本質的自己共役性、pre-Dirichlet 形式の Markov 拡大の一意性) を述べる。

以下で Dirichlet 形式を導入する際に、状態空間として 3 つ組 (rigged Hilbert space) をとるほうが都合が良いので、そのために必要な関数空間を準備しておく。まず $\chi \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ を $|x| \geq 1$ で $\chi(x) = |x|$ なる正値対称凸関数として、重み関数 $\rho_r \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), r \in \mathbb{R}$ を $\rho_r(x) := e^{r\chi(x)}$, $x \in \mathbb{R}$ と定義する。以後断らない限り、$r > 0$ を (後の Proposition 3.6 のために) $K_1 + 2r^2 > 0$ となるように大きめに取り固定しておく (K_1 は条件 **(U1)** に出てくる定数)。

- $E = L_r^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d : \rho_{-2r}(x)dx)$. これは内積

$$(X,Y)_E := \int_{\mathbb{R}} \big(X(x),Y(x)\big)_{\mathbb{R}^d}\rho_{-2r}(x)dx, \quad X,Y \in E$$

で Hilbert 空間となる (norm を $\|\cdot\|_E$ と記す)。

- $H := L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$. (通常の内積で Hilbert 空間となり、norm を $\|\cdot\|_H$ と記す)。

ここで Riesz の同型 $H^* \cong H$ により H^* と H を同一視する。この同一視の下、稠密かつ連続な埋め込み $E^* = L_{-r}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \subset H \subset E$ が成り立つ。

これらの他にも $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ の tempered な部分空間 $\mathcal{C}$ を

- $$\begin{aligned}\mathcal{C} &:= \Big\{w \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \mid \lim_{|x|\to\infty} w(x)\rho_{-r}(x) = 0 \ \text{ for every } r>0\Big\} \\ &= \bigcap_{r>0}\big\{w \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d) \mid \|w\|_{r,\infty} < \infty\big\}, \qquad \text{ただし } \|w\|_{r,\infty} := \sup_{x\in\mathbb{R}}|w(x)|\rho_{-r}(x)\end{aligned}$$

で定義する。この空間はsemi-norm系 $\{\|\cdot\|_{r,\infty}\}_{r>0}$ でFréchet空間になり、埋め込み $\mathcal{C} \hookrightarrow E \cap C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ は E の位相で稠密かつ連続となる。

本節ではpotential関数 $U \in C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ に対して以下の3つの条件を課す。

(U1): There exist a constant $K_1 \in \mathbb{R}$ and a convex function $\widetilde{U} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ such that

$$U(z) = -\frac{K_1}{2}|z|^2 + \widetilde{U}(z), \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

(U2): There exist $K_2 > 0$ and $p > 0$ such that

$$|\widetilde{\nabla} U(z)| \leq K_2(1+|z|^p), \qquad \text{a.}e.\ z \in \mathbb{R}^d,$$

where $\widetilde{\nabla} U(z) := -K_1 z + \partial_0 \widetilde{U}(z), z \in \mathbb{R}^d$ and $\partial_0 \widetilde{U}$ is the minimal section of the subdifferential $\partial \widetilde{U}$, i.e.,

$$\begin{aligned} \partial\widetilde{U}(z) &:= \left\{z^* \in \mathbb{R}^d \mid \widetilde{U}(z') \geq \widetilde{U}(z) + (z'-z, z^*)_{\mathbb{R}^d}, \ \text{ for all } z' \in \mathbb{R}^d\right\}, \\ \partial_0\widetilde{U}(z) &:= \left\{y_0 \in \mathrm{Range}(\partial\widetilde{U}(z)) \mid |y_0|_{\mathbb{R}^d} = \min_{y \in \mathrm{Range}(\partial\widetilde{U}(z))} |y|_{\mathbb{R}^d}\right\}. \end{aligned}$$

(U3): $\lim_{|z|\to\infty} U(z) = \infty$.

Remark 2.1 $U \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ の場合は、(当然ながら) $\widetilde{\nabla} U$ は通常のgradient ∇U と一致する。この時、条件 **(U1)** はone-sided Lipschitz condition

(U1)' $\quad \left(\nabla U(z_1) - \nabla U(z_2), z_1 - z_2\right)_{\mathbb{R}^d} \geq -K_1|z_1 - z_2|^2, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d.$

と同値になる。さらに $U \in C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ の時は $\nabla^2 U \geq -K_1$ と同値になる。

<u>**Example:**</u> $\quad U(z) = \sum_{j=0}^{2m} a_j|z|^j, \quad a_{2m} > 0,\ m \in \mathbb{N}.$

(square potential $U(z) = a|z|^2$ やdouble-well potential $U(z) = a(|z|^4 - |z|^2)$ は上記のクラスの代表的な例である。また $\widetilde{U}(z) = |z|$ は凸関数であるが C^1-級ではなく、$\partial\widetilde{U}(0) = [-1,1]$ なので $\partial_0\widetilde{U}(z) = -1\ (z<0), 0\ (z=0), 1\ (z>0)$ である。)

2.1 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の $(U$-$)$Gibbs測度からの準備

この小節では、(1.5) にて形式的に導入された経路空間 $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の $(U$-$)$Gibbs測度 $(P(\phi)_1$-測度$)$ なる確率測度をSimon [38], Iwata [15], Betz-Lörinczi [5] に従い、数学的にきちんと定義し、いくつかの基本的性質をまとめておく。ここでは $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ には広義一様収束位相を入れ、$C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の σ-field $\mathcal{B} := \sigma(\{w(x); x \in \mathbb{R}\})$ を与える。$\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d))$ を可測空間 $(C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d),\mathcal{B})$ 上の確率測度の全体とする。$T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ に対して、$\mathcal{B}$ のsub-σ-fieldたち $\mathcal{B}_{[T_1,T_2]} := \sigma(\{w(x); T_1 \leq x \leq T_2\})$, $\mathcal{B}_{[T_1,T_2],c} := \sigma(\{w(x); x \leq T_1, x \geq T_2\})$ も与えて

おく。さらに $H_{\mathcal{W}} := -\frac{1}{2}\Delta$ と書くことにする。ただし $\Delta := \sum_{i=1}^d \partial^2/\partial z_i^2$ は通常の d-次元 Laplacian である。すると半群 $e^{-tH_{\mathcal{W}}}$ の核関数は以下のように与えられる。

$$p(t, z_1, z_2) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}^d} \exp\big(-\dfrac{|z_1 - z_2|^2}{2t} \big), & t \neq 0, \\ \delta(z_1 - z_2), & t = 0. \end{cases}$$

まず最初に、形式的表現 (1.5) 内の Gauss 測度に相当する部分の数学的な意味をどう与えるべきかを考えたい。$x_1 < x_2 < \cdots < x_n,\ A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$A := \{ w \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid w(x_1) \in A_1, w(x_2) \in A_2, \cdots, w(x_n) \in A_n \}$$

と $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上の cylinder set を定義する。これに対して

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(A) &= \Big(\mathbf{1}_{A_1}, e^{-(x_2-x_1)H_{\mathcal{W}}} \mathbf{1}_{A_2} e^{-(x_3-x_2)H_{\mathcal{W}}} \mathbf{1}_{A_3} \cdots e^{-(x_n-x_{n-1})H_{\mathcal{W}}} \mathbf{1}_{A_n} \Big)_{L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dq_1\, \mathbf{1}_{A_1}(q_1) \int_{\mathbb{R}^d} dq_2\, p(x_2 - x_1, q_1, q_2) \mathbf{1}_{A_2}(q_2) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} dq_3\, p(x_3 - x_2, q_2, q_3) \mathbf{1}_{A_3}(q_3) \cdots \int_{\mathbb{R}^d} dq_n\, p(x_n - x_{n-1}, q_{n-1}, q_n) \mathbf{1}_{A_n}(q_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

を満たすような $(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \mathcal{B})$ 上の測度が一意的に存在する。これは $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ 上の **Wiener 測度**と呼ばれ、time interval が全区間 $\mathbb{R}$ の d-次元 Brown 運動 $(\beta_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が導く測度であり、形式的表現 (1.4) の数学的定式化と思われるが、$\mathcal{W}(C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)) = \infty$ なので確率測度にはならず、扱いづらい。(構成する際に直接 Kolmogorov の拡張定理が使えず、通常の Brown 運動を時刻 0 で折り返して張り合わせる議論を要する。詳細は [38] の 39 ページを参照せよ。)

これに対して、有限体積の経路空間であれば、$T_1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq T_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}^d$ に対して、(2.1) に類似の関係式

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{[T_1, T_2]}^{z_1, z_2}(A) &= \Big(e^{-(x_1-T_1)H_{\mathcal{W}}} \mathbf{1}_{A_1} e^{-(x_2-x_1)H_{\mathcal{W}}} \mathbf{1}_{A_2} \cdots \\ &\qquad e^{-(x_n-x_{n-1})H_{\mathcal{W}}} \big(\mathbf{1}_{A_n} p(T_2 - x_n, \cdot, z_2) \big) \Big)(z_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dq_1\, p(x_1 - T_1, z_1, q_1) \mathbf{1}_{A_1}(q_1) \int_{\mathbb{R}^d} dq_2\, p(x_2 - x_1, q_1, q_2) \mathbf{1}_{A_2}(q_2) \cdots \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^d} dq_n\, p(x_n - x_{n-1}, q_{n-1}, q_n) \mathbf{1}_{A_n}(q_n) p(T_2 - x_n, q_n, z_2), \end{aligned} \tag{2.2}$$

をみたす $(C([T_1, T_2], \mathbb{R}^d), \mathcal{B}_{[T_1, T_2]})$ 上の測度 $\mathcal{W}_{[T_1, T_2]}^{z_1, z_2}$ が一意的に存在することが分かる。これは**条件付け Wiener 測度**と呼ばれ $\beta_{T_1} = z_1, \beta_{T_2} = z_2$ なる Brownian bridge が導く測度である。なお $\mathcal{W}_{[T_1, T_2]}^{z_1, z_2}(C([T_1, T_2], \mathbb{R}^d)) = p(T_2 - T_1, z_1, z_2)$ となり、確率測度ではないことに注意。後のためにこれを与えられた (外側の path) $\xi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ を用いて

$$\mathcal{W}_{[T_1, T_2]}^{\xi}(dw) := \begin{cases} \mathcal{W}_{[T_1, T_2]}^{\xi(z_1), \xi(z_2)}(dw), & \text{if } w = \xi \text{ on } [T_1, T_2]^c \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の測度に拡張しておく。(ただし特に $\xi(x)\equiv z_1$ $(x\le T_1)$, $\xi(x)\equiv z_2$ $(x\ge T_2)$ の場合は、簡単のため $\mathcal{W}^{z_1,z_2}_{[T_1,T_2]}$ とそのまま書くことにする。)

次に、上記の Gauss 測度に potential 関数 U に関する部分を加味し、$C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上に Gibbs 測度 μ を構成しよう。ここでは、Schrödinger 作用素 $H_U := H_{\mathcal{W}}+U$ が生成する $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 上の Schrödinger 半群 $\{e^{-tH_U}\}_{t\ge 0}$ の核関数 $K(t,z_1,z_2)$ が

$$K(T_2-T_1,z_1,z_2)=\int_{C([T_1,T_2],\mathbb{R}^d)}\exp\Big(-\int_{T_1}^{T_2}U(w(x))dx\Big)\mathcal{W}^{z_1,z_2}_{[T_1,T_2]}(dw) \tag{2.3}$$

と Feynman-Kac の公式より汎関数積分表示できることが Key となる。まずは条件 **(U3)** の下での Schrödinger 作用素 H_U に関する基本的な性質を整理しておく (詳細は Reed-Simon [31] を参照)。

- $(H_U, C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}))$ は $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ にて本質的自己共役 (これの自己共役拡大も H_U と記す)。
- H_U は purely discrete spectrum を持つ。
- H_U の最小固有値 $\lambda_0(>\min U)$ は simple で、対応する規格化された固有関数 (ground state と呼ばれる) Ω は正にとれる。
- 任意の $\alpha>0$ に対して定数 $C=C(\alpha)>0$ が存在し、$|\Omega(z)|\le Ce^{-\alpha|z|}$ が成り立つ。

以下では、$U_0 := U-\lambda_0$ とし、対応する Schrödinger 作用素を $H_{U_0} := H_U-\lambda_0$ と書くことにする。$e^{-tH_{U_0}}=e^{\lambda_0 t}e^{-tH_U}$, $e^{-tH_{U_0}}\Omega=\Omega$ なる関係が成り立つことに注意。

$C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度 $\mu=\mu_U$ が **(U-)Gibbs 測度** (または $P(\phi)_1$-測度) であるとは、cylinder set

$$\begin{aligned} A &:= \{w\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)\mid w(x_1)\in A_1, w(x_2)\in A_2,\cdots,w(x_n)\in A_n\}(\in\mathcal{B}_{[T_1,T_2]}),\\ &\qquad\qquad \text{ただし } T_1\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le T_2,\ A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\quad\text{に対して}\end{aligned}$$

$$\mu(A)=\Big(\Omega, e^{-(x_1-T_1)H_{U_0}}\mathbf{1}_{A_1}e^{-(x_2-x_1)H_{U_0}}\mathbf{1}_{A_2}\cdots e^{-(x_n-x_{n-1})H_{U_0}}\mathbf{1}_{A_n}e^{-(T_2-x_n)H_{U_0}}\Omega\Big)_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})}$$

を満たすものである。$\big(e^{-tH_{U_0}}$ の $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$-対称性および $e^{-tH_{U_0}}\Omega=\Omega$ を用いると、これの右辺は

$$\big(\Omega\mathbf{1}_{A_1}, e^{-(x_2-x_1)H_{U_0}}\mathbf{1}_{A_2}\cdots e^{-(x_n-x_{n-1})H_{U_0}}\mathbf{1}_{A_n}\Omega\big)_{L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})} \tag{2.4}$$

となり、両端 T_1,T_2 に依存しない。これにより Kolmogorov の拡張定理を用いてこのような確率測度 μ が一意的に存在することが分かる。$\big)$

Remark 2.2 先ほどの Feynman-Kac の公式を用いると、μ の定義式は

$$\begin{aligned}\mu(A) &= e^{(T_2-T_1)\lambda_0}\int_{\mathbb{R}^d}dz_1\Omega(z_1)\int_{\mathbb{R}^d}dq_1\,K(x_1-T_1,z_1,q_1)\mathbf{1}_{A_1}(q_1)\\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}^d}dq_2\,K(x_2-x_1,q_1,q_2)\mathbf{1}_{A_2}(q_2)\cdots\int_{\mathbb{R}^d}dq_n\,K(x_n-x_{n-1},q_{n-1},q_n)\mathbf{1}_{A_n}(q_n)\\ &\quad\times\int_{\mathbb{R}^d}dz_2\,K(T_2-x_n,q_n,z_2)\Omega(z_2)\\ &= e^{(T_2-T_1)\lambda_0}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Omega(z_1)\Omega(z_2)\mathbb{E}^{\mathcal{W}^{z_1,z_2}_{[T_1,T_2]}}\Big[\exp\Big(-\int_{T_1}^{T_2}U(w(x))dx\Big);A\Big]dz_1dz_2\end{aligned}$$

のような表現にもなる ([15] ではこの表記が定義となっている)。

以下、この Gibbs 測度 μ の持ついくつかの基本性質をまとめておく。

[1]. 上記の Gibbs 測度の定義式 (2.4) から明らかに μ は平行移動不変である。これと先の Ω の評価をあわせると、Kolmogorov-Totoki 論法により $\mu(\mathcal{C})=1$ であることが分かる ([15] の Proposition 2.7 を参照)。

[2]. $\mathbb{R}^d$ 上に $\nu(dz):=\Omega(z)^2dz$ なる確率測度を導入し、

$$H_\nu f:=\Omega^{-1}H_{U_0}(\Omega f)=-\frac{1}{2}\Delta f+\Big(\frac{\nabla\Omega}{\Omega},\nabla f\Big)_{\mathbb{R}^d},\quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$$

なる作用素を考えると、これは $L^2(\nu)=L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R};\nu)$ 上で本質的自己共役である (これの自己共役拡大も H_ν と記す)。すると $e^{-tH_\nu}f=\Omega^{-1}e^{-tH_{U_0}}\Omega f,\ f\in L^2(\nu)$ であり、$\{e^{-tH_\nu}\}_{t\geq 0}$ は $L^2(\nu)$ 上の対称 Markov 半群となる。また (2.4) は

$$\mu(A)=\big(\mathbf{1}_{A_1},e^{-(x_2-x_1)H_\nu}\mathbf{1}_{A_2}\cdots e^{-(x_n-x_{n-1})H_\nu}\mathbf{1}_{A_n}\big)_{L^2(\nu)}$$

と書き換えられる。これは我々の Gibbs 測度 μ が、$-H_\nu$ を生成作用素とし定常分布 ν を持つ Markov 過程 $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の導く $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の確率測度であることを意味している。ちなみに $(\omega_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は確率微分方程式

$$d\omega_t=d\beta_t-\frac{\nabla\Omega}{\Omega}(\omega_t)dt,\quad t\in\mathbb{R}$$

の解であり、$P(\phi)_1$-process と呼ばれる。

このことから、

$$\int\Big(\int_{\mathbb{R}}|w(x)|^m\rho_{-2r}(x)dx\Big)\mu(dw)\leq\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^d}|z|^m\Omega(z)^2dz<\infty,\quad m\in\mathbb{N},r>0 \tag{2.5}$$

なる評価を得る。この評価は後でよく用いられる。

[3]. 我々の Gibbs 測度 μ は**DLR 方程式**を満たす。すなわち以下の関係式が成り立つ ([15] の Proposition 2.7 もしくは [5] の Theorem 3.1 を参照)。

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^\mu\big[\mathbf{1}_A|\mathcal{B}_{[T_1,T_2],c}\big](\xi)\ &=\ Z_{[T_1,T_2]}^{-1}(\xi)\int_A\exp\Big(-\int_{T_1}^{T_2}U(w(x))dx\Big)\mathcal{W}^\xi_{[T_1,T_2]}(dw),\\ &\text{for }\mu\text{-a.e. }\xi(\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)),\ \text{all }T_1<T_2\text{ and }A\in\mathcal{B}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

ここで $Z_{[T_1,T_2]}(\xi)=\mathbb{E}^{\mathcal{W}^\xi_{[T_1,T_2]}}[\exp(-\int_{T_1}^{T_2}U(w(x))dx)]$ は正規化定数である。DLR 方程式 (2.6) は形式的表現 (1.5) の一つの数学的定式化と解釈され、本来はこれが Gibbs 測度の定義でもある。逆に、与えられた potential 関数 U に対して DLR 方程式を満たす $\mu\in\mathcal{P}(C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d))$ は一般には一意ではない (詳細は [5] を参照)。

[4]. DLR 方程式 (2.6) から Gibbs 測度 μ が $C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$-quasi-invariant であることが分かる。すなわち、すべての $k\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ に対してシフトされた測度 $\mu(\cdot+k)$ と μ は同値であり、$\mu(k+dw)=\Lambda(k,w)\mu(dw)$ と書いた際の Radon-Nikodym 密度 $\Lambda(k,w)$ は

$$\Lambda(k,w) = \exp\Big\{ \int_{\mathbb{R}} \Big(U\big(w(x)\big) - U\big(w(x)+k(x)\big) - \frac{1}{2}|k'(x)|^2 + (w(x), \Delta_x k(x))_{\mathbb{R}^d} \Big) dx \Big\},$$
$$\text{ただし } \Delta_x := d^2/dx^2. \tag{2.7}$$

と表される (上記の積分の被積分関数は $\mathrm{supp}(k)$ の外では 0 であることに注意)。

Remark 2.3 $U(z) = \dfrac{1}{2}|z|^2 - \dfrac{d}{2}$ (調和振動子) に対する Gibbs 測度 μ_0 は

$$\mathbb{E}^{\mu_0}[q_j(x)] = 0, \quad \mathbb{E}^{\mu_0}[q_j(x)q_k(y)] = \frac{1}{2}e^{-|x-y|}\delta_{jk}, \qquad 1 \le j,k \le d,\ x,y \in \mathbb{R}$$

を満たす $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の Gauss 測度であり、一般の Gibbs 測度 μ を $\mathcal{B}_{[T_1,T_2]}$ 上に制限すれば μ_0 に関して絶対連続になる ($\frac{d\mu_U}{d\mu_0}|_{\mathcal{B}_{[T_1,T_2]}}$ の具体的表示などの詳細は [38] の Theorem 6.7 を参照せよ)。しかしながら、大域的にはこのようなことは成り立たない ($U_1 - U_2$ が定数でない $\Longrightarrow$ μ_{U_1} と μ_{U_2} は特異) ことも知られている。詳細は [38] の Theorem 6.8 を参照せよ。

2.2 Dirichlet 形式を通した微分作用素の導入および一意性定理

この小節では Dirichlet 形式を導入し、我々の一意性問題の設定および主結果を述べる。まずはいくつかの準備と記号の導入を行う。先の小節で定義された $C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ 上の Gibbs 測度 μ は $\mu(\mathcal{C}) = 1$ を満たすので、埋め込み写像 $\mathcal{C} \hookrightarrow E$ の連続性より自然に $\mu \in \mathcal{P}(E)$ へと拡張できる。よって今後は3つ組 (E,H,μ) を状態空間と解釈して議論を進める。さらに $C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ は E で稠密である事と、μ の $C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$-quasi invariance を用いると $\mathrm{supp}(\mu) = E$ が分かる ([4] の Proposition 2.7 を参照)。次に E 上の滑らかな cylinder 関数全体の空間を定義する。$K \subset E^*$ を E の稠密な部分空間とし、

$$\mathcal{FC}_b^\infty(K) := \Big\{ F(w) = f(\langle w,\varphi_1\rangle, \cdots, \langle w,\varphi_n\rangle) \ \Big|\ n \in \mathbb{N},\ \{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset K,$$
$$f = f(\alpha_1, \ \cdots, \alpha_n) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),\ \langle w,\varphi_i\rangle := \int_{\mathbb{R}} (w(x),\varphi_i(x))_{\mathbb{R}^d} dx \ \Big\}$$

と定義する。簡単のために以下では $\mathcal{FC}_b^\infty := \mathcal{FC}_b^\infty(C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d))$ と書く。$\mathrm{supp}(\mu) = E$ なので、$\mathcal{FC}_b^\infty$ の異なる 2 つの関数は $L^2(\mu)$ の元としても異なり、以後の微分作用素の定義において面倒なことにはならない。$\mathcal{FC}_b^\infty$ は $L^2(\mu)$ で稠密である。

次に $F \in \mathcal{FC}_b^\infty$ 作用する H-Fréchet 微分作用素 D_H を

$$D_H F(w) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}(\langle w,\varphi_1\rangle, \cdots, \langle w,\varphi_n\rangle)\varphi_i$$

で定義する。ここで $\varphi_i \in H$ とみなすことで $D_H F$ は E 上で定義された H-値関数となる。μ の $C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$-quasi invariance より、$F,G \in \mathcal{FC}_b^\infty$ と $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ に対して以下の部

分積分公式が成り立つ。

$$\int_E \big(D_H F(w),\varphi\big)_H G(w)\mu(dw)$$
$$= -\int_E F(w)\big(\varphi, D_H G(w)\big)_H \mu(dw) - \int_E F(w)G(w)\beta_\varphi(w)\mu(dw). \tag{2.8}$$

ただし β_φ は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_E F(w)\big\{\Lambda(\varepsilon\varphi,w)-1\big\}\mu(dw) = \int_E F(w)\beta_\varphi(w)\mu(dw),\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$$

で定義される Gibbs 測度 μ の φ 方向の対数微分であり、(2.7) より

$$\beta_\varphi(w) = \langle w, \Delta_x\varphi\rangle - \langle\widetilde{\nabla}U(w(\cdot)),\varphi\rangle \qquad \text{と具体的に計算できる。}$$

さて、次の pre-Dirichlet 形式

$$\mathcal{E}(F,G) = \frac{1}{2}\int_E \big(D_H F(w), D_H G(w)\big)_H \mu(dw),\quad F,G\in\mathcal{FC}_b^\infty$$

を考えよう。すると部分積分公式 (2.8) より

$$\mathcal{E}(F,G) = \big(-\mathcal{L}_0 F, G\big)_{L^2(\mu)},\quad F,G\in\mathcal{FC}_b^\infty \tag{2.9}$$

とも表される。ここで $F\in\mathcal{FC}_b^\infty$ に作用する微分作用素 (pre-Dirichlet 作用素) $\mathcal{L}_0$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0F(w) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(D_H^2F(w)) - \frac{1}{2}\big\langle\widetilde{\nabla}U(w(\cdot)), D_HF(w)\big\rangle + \frac{1}{2}\big\langle w, \Delta_x D_H F(w(\cdot))\big\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha_i\partial\alpha_j}\big(\langle w,\varphi_1\rangle,\cdots,\langle w,\varphi_n\rangle\big)\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial\alpha_i}\big(\langle w,\varphi_1\rangle,\cdots,\langle w,\varphi_n\rangle\big)\cdot\big\{\langle w,\Delta_x\varphi_i\rangle - \langle\widetilde{\nabla}U(w(\cdot)),\varphi_i\rangle\big\}\end{aligned}$$

で定義されたものである (条件 **(U2)** および (2.5) より $\mathcal{L}_0F\in L^2(\mu)$ となることに注意)。第 1 節で述べたことだが、(2.9) より pre-Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{FC}_b^\infty)$ が closable である事および (pre-Dirichlet 作用素) $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ が対称作用素である事がすぐに分かり、$(\mathcal{E},\mathcal{FC}_b^\infty)$ の最小閉拡大として Dirichlet 形式 $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ および、これの生成作用素として Friedrichs 拡大 $(\mathcal{L}_\mu,\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_\mu))$ を考えることができる。

ここで本講演における主結果である $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ の拡大の一意性定理を述べることにする。

Theorem 2.4 (本質的自己共役性, [23]) *Under conditions* **(U1)**, **(U2)** *and* **(U3)**, *the pre-Dirichlet operator* $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ *is essentially self-adjoint on* $L^2(\mu)$.

実は $U\in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ の場合は、$(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ の (唯一の) 自己共役拡大が生成する半群が、確率偏微分方程式 (3.2) の解の推移半群に一致する。この事は次節の最後に述べたい。

この定理の系として、以下の事が言える。

Corollary 2.5 (Markov 拡大の一意性, [23]) *The Dirichlet form* $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ *is the unique extension of the pre-Dirichlet operator* $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$.

Remark 2.6 closable な pre-Dirichlet 形式が与えられた場合、第 1 節ですでに述べたとおり最小閉拡大は Markov 性を保つのだが、一般の閉拡大は Markov 性を保つとは限らない。状態空間が Banach 空間 (を含む位相ベクトル空間) の場合、自然な順序関係についての Markov 拡大の最大元の存在性は Albeverio-Kusuoka [2], Albeverio-Kusuoka-Röckner [3] にて示されている。我々の問題のフレームワークでは最大元 $(\mathcal{E}^+,\mathcal{D}(\mathcal{E}^+))$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{E}^+) &= \big\{F\in L^2(\mu)\mid [\mathbf{RAC}],[\mathbf{SGD}],\ \widetilde{D}_HF\in L^2(\mu;H)\big\},\\ \mathcal{E}^+(F,G) &= \frac{1}{2}\int_E \big(\widetilde{D}_HF(w),\widetilde{D}_HG(w)\big)_H\mu(dw)\quad F,G\in\mathcal{D}(\mathcal{E}^+).\end{aligned}$$

で与えられる ([2] の Theorem 2.5 を参照)。ただし

[RAC] (ray absolutely continuous):
E 上の可測関数 F が μ に関して ray absolutely continuous であるとは、任意の $k\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ に対して $\tilde{F}_k(w+tk), w\in E$ が t について絶対連続であるような修正 $\tilde{F}$ を持つことを言う。

[SGD] (stochastic Gateaux differentiable):
E 上の可測関数 F が stochastic Gateaux differentiable であるとは、ある可測写像 $\widetilde{D}_HF: E\to H$ が存在して、任意の $k\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ と $\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{t\searrow 0}\mu\Big(\Big\{w\in E\ \Big|\ \frac{1}{t}\big|F(w+tk)-F(w)-t\big(\widetilde{D}_HF(w),k\big)_H\big|>\varepsilon\Big\}\Big)=0$$

が成立することを言う。

Corollary 2.5 は、$(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))=(\mathcal{E}^+,\mathcal{D}(\mathcal{E}^+))$ を主張するものである。ちなみに H**-Lipschitz 連続性** ($|F(w+h)-F(w)|\le C\|h\|_H,\ \forall w\in E,\forall h\in H$) が [**RAC**] と [**SGD**] の十分条件であることが Kusuoka [24] にて示されており、これにより H-距離関数が $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ の元になることが分かる。この事は $(\mathcal{E},\mathcal{D}(\mathcal{E}))$ に対応する拡散過程 (後述) の Varadhan 型短時間漸近挙動 (の上からの評価) を示す際に必要であった (Kawabi [18])。

3 証明の概略

この節では論文 [23] に沿って証明の概略を述べたい。まず $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ は closable なので、(第 1 章で述べた) graph norm での閉包 $(\overline{\mathcal{L}_0},\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0}))$ を考える事ができる。この閉作用素が $L^2(\mu)$ にて自己共役であることを示せばよいが、Lumer-Phillips の定理 ([10] の Theorem 1.1, 1,2 を参照) と $\mathcal{FC}_b^\infty$ が $L^2(\mu)$ で稠密であることより、$\mathcal{FC}_b^\infty\subset\mathrm{Range}(\lambda-\overline{\mathcal{L}}_0)$ $(\subset L^2(\mu))$ なる (充分に大きな)$\lambda>0$ が存在することを示せばよいことになる。すなわち

$$\exists\lambda>0,\quad \forall F\in\mathcal{FC}_b^\infty,\quad \exists\Phi\in\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}}_0)\quad \text{s.t.}\quad \lambda\Phi-\overline{\mathcal{L}}_0\Phi=F \tag{3.1}$$

という "無限次元空間 E 上の elliptic problem" を解くことに帰着されるが、この解の候補を $(\mathcal{L}_0,\mathcal{FC}_b^\infty)$ の背後にある確率過程 (time-dependent Ginzburg 型確率偏微分方程式の解) を用いて見つけてこようというのがラフなアイデアである。

3.1 確率偏微分方程式からの準備

この小節では time-dependent Ginzburg 型確率偏微分方程式に関して今後の議論において必要な事実を Iwata [15], [16], Funaki [11], [12], [13] に沿って簡単にまとめておく。まず $(\Theta, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ を完備な (フィルター付) 確率空間として、その上で定義された $(\mathcal{F}_t)$-適合な white noise 過程 (H-柱状 Brown 運動) を $B = \{B_t(\cdot)\}_{t\geq 0}$ とする (形式的には $dB_t(x)dB_s(y) = \delta(x-y)\delta(t-s)$ なる共分散構造を持つ)。time-dependent Ginzburg 型確率偏微分方程式 ($P(\phi)_1$-field の時間発展) とは、$\mathbb{R}$ 上の反応拡散方程式に white noise 過程の揺らぎを加えた方程式

$$dX_t(x) = \frac{1}{2}\big\{\Delta_x X_t(x) - \nabla U(X_t(x))\big\}dt + dB_t(x),\ x\in\mathbb{R},\ t>0 \tag{3.2}$$

のことを言う。まずはこの方程式の解の定義を [13],[16] に従って与えよう。E-値 $\{\mathcal{F}_t\}$-適合な連続過程 $X := \{X_t(x)\}_{t\geq 0}$ が (3.2) の解であるとは、

$$\begin{aligned} X_t(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y)X_0(y)dy - \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} g(t-s,x,y)\nabla U(X_s(y))dyds \\ &\quad + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} g(t-s,x,y)dB_s(y)dy, \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 0, \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{aligned} \tag{3.3}$$

なる確率積分方程式 (mild form) を満たすことを言う。ただし $g(t,x,y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\big(-\frac{|x-y|^2}{2t}\big)$ である。ちなみに mild form (3.3) と以下の弱形式 (weak form) は同値であることが知られている。

$$\begin{aligned} \langle X_t, \varphi\rangle &= \langle X_0, \varphi\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \langle X_s, \Delta_x\varphi\rangle ds - \frac{1}{2}\int_0^t \big\langle \nabla U(X_s(\cdot)), \varphi\big\rangle ds \\ &\quad + \langle B_t, \varphi\rangle, \qquad t\geq 0, \quad \forall\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \end{aligned} \tag{3.4}$$

方程式 (3.2) の解の存在・一意性に関しては以下の結果が知られている。

[Fact 1]. ([16] の Theorem 5.1, 5.2): 条件 (U1)' と (U2) の下で、確率偏微分方程式 (3.2) は初期条件 $X_0 = w \in \mathcal{C}$ に対して一意解 $X = X^w \in C([0,\infty), \mathcal{C})$ を持つ (以下では $X^w \in C([0,\infty), E)$ と解釈することもある)。

Remark 3.1 ∇U が Lipschitz 連続ならば、$X_0 = w \in E$ に対して一意解 $X = X^w \in C([0,\infty), E)$ を持つ ([16] の Theorem 4.1, [12] の Theorem 2.10, [13] の定理 6.10 を参照)。

次に、P_w を X^w が導く $C([0,\infty), E)$ 上の確率測度とし、推移半群 $\{P_t\}_{t\geq 0}$ を

$$P_tF(w) := \mathbb{E}\big[F(X_t^w)\big] = \int_E F(y)P_w(X_t\in dy), \quad w\in\mathcal{C},\ F\in C_b(E,\mathbb{R})$$

で定義すると以下の Gibbs 測度 μ の可逆性が成り立つ。

[Fact 2]. ([15] の Lemma 2.9):

$$\int_E F(w)P_tG(w)\mu(dw) = \int_E P_tF(w)G(w)\mu(dw), \quad t\geq 0, \quad F,G\in C_b(E,\mathbb{R}). \tag{3.5}$$

このことより、$\{P_t\}_{t\geq 0}$ は $L^2(\mu)$ 上の対称 Markov C_0-縮小半群に拡張できる。これの生成作用素を $(\mathcal{L}_2, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2))$ と記す。(3.4) に伊藤の公式を用いると、$(\mathcal{L}_2, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2))$ が $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty)$ の拡大になることが容易に分かる。また、後の技術的理由 (無限体積のモデルを扱っている影響) から関数空間

- $\mathcal{C}_\infty^\infty := \bigcap_{k=0}^\infty \bigcap_{r>0} \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \mid \|\dfrac{d^k\varphi}{dx^k}\|_{-r,\infty} < \infty\Big\}$

を導入する必要がある。$C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_\infty^\infty$ であり、 $\mathcal{C}_\infty^\infty$ は E で稠密であるので、第 2 節にて $\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$ の元に対して定義された微分作用素 D_H と $\mathcal{L}_0$ は、$\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$ 上に自然に拡張できる。これらをまとめると以下の補題を得る。

Lemma 3.2 (1) $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty) \subset (\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)) \subset (\mathcal{L}_2, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2))$.
(2) *The closure of* $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty))$ *in* $L^2(\mu)$ *coincides with* $(\overline{\mathcal{L}_0}, \mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0}))$.

3.2 "適切な"Ornstein-Uhlenbeck 作用素の導入と鍵となる命題

先の Lemma 3.2 より、方程式 (3.1) の解の候補としてすぐに $\Phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t F dt$ が浮かび上がってくる。この Φ が $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2)$ の元となるのは明らかであるが、我々はこれよりも狭い $\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0})$ に入ることを示さねばならない。また現段階では $\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0})$ に関する情報は数少ないため、$\Phi \in \mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0})$ を直接示すのは難しい印象を受ける。そこで $\overline{\mathcal{L}_0}$ を "適切な"Ornstein-Uhlenbeck 作用素の摂動と解釈し、$\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty$(および $\mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$) と $\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0})$ の間にその Ornstein-Uhlenbeck 作用素の定義域をはさみ込むことをまずは目指していく。

はじめに E 上の Ornstein-Uhlenbeck 過程を定義する。正数 κ を $\kappa > 2r^2$ となるように (大きめに) 取り固定しておく。次に

$$S_t w(x) := e^{-\kappa t/2} \int_{\mathbb{R}} g(t,x,y) w(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

とすると $\{S_t\}_{t\geq 0}$ は E 上の (非対称な) C_0-縮小半群となる ($\kappa > 2r^2$ は縮小性を出すための条件)。$(A, \mathrm{Dom}(A))$ をこの半群の生成作用素とすると $Aw = \frac{1}{2}(\Delta_x - \kappa)w, w \in \mathcal{C}_\infty^\infty$ が成り立つ。ここで確率偏微分方程式

$$dY_t(x) = \frac{1}{2}\big\{\Delta_x Y_t(x) - \kappa Y_t(x)\big\}dt + dB_t(x),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \tag{3.6}$$

を考える。初期データ $Y_0 = w \in E$ に対する (3.6) の解を Ornstein-Uhlenbeck 過程と呼び、$Y^w := \{Y_t^w(\cdot)\}_{t\geq 0}$ と書くことにすると、

$$\begin{aligned} Y_t^w &= S_t w + \int_0^t S_{t-s}\sqrt{Q} dW_s, \quad t \geq 0, \\ &\text{ただし } Q \in L(E,E):\ Qw := \rho_{-2r} \cdot w, \quad \{W_t\}_{t\geq 0} : E\text{-柱状 Brown 運動}. \end{aligned}$$

なる表現を得る。よって (E 値確率変数)Y_t^w は平均 0、共分散作用素

$$Q_t := \int_0^t S_s Q S_s^* ds = \int_0^t e^{sA} Q e^{sA^*} ds \in L_{(1)}(E,E)$$

の Gauss 分布 N_{Q_t} に従うことが分かり、Ornstein-Uhlenbeck 半群 $\{R_t\}_{t\geq 0}$ は

$$R_tF(w) := \mathbb{E}[F(Y_t^w)] = \int_E F(S_tw+y)N_{Q_t}(dy)$$

で与えられる。本講演では近年の Da Prato, Priola, Röckner, Tubaro たちの仕事 [9], [29], [30] に従い、この半群を E 上の連続関数全体の部分空間である以下の関数空間上で考えることにする。ただし $DF : E \to E$ は関数 F の E-Fréchet 微分をあらわすことにする ($D_HF = QDF$ に注意)。

- $UC_{b,2}(E) := \{F : E \to \mathbb{R} \mid \frac{F(\cdot)}{1+\|\cdot\|_E^2}$ is uniformly continuous and bounded$\}$
  (これは norm $\|F\|_{b,2} := \sup_{w\in E} \frac{|F(w)|}{1+\|w\|_E^2}$ で Banach 空間になる。)
- $C_{b,2}^1(E) := \big\{F \in UC_{b,2}(E) \mid F$ is continuously differentiable with $\|DF\|_{b,2} := \sup_{w\in E} \frac{\|DF(w)\|_E}{1+\|w\|_E^2}\big\}$

すると $R_t(UC_{b,2}(E)) \subset UC_{b,2}(E), R_t(C_{b,2}^1(E)) \subset C_{b,2}^1(E)$ となることが分かるが、**強連続とはならない**ので通常の意味での生成作用素として Ornstein-Uhlenbeck 作用素を定義することができない。

<u>**Example:**</u> $\{R_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}$ 上の通常の Ornstein-Uhlenbeck 過程 ($dX_t = d\beta_t - \frac{1}{2}X_tdt$) の推移半群とし、$F(x) = \sin x$ ($\in C_b(\mathbb{R})$) とすると、

$$\liminf_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_{t_n}F(x) - F(x)| \geq 2, \qquad \text{ただし } t_n := 2\log\Big(\frac{2n+1}{2n-1}\Big) \ (\searrow 0 \text{ as } n\to\infty)$$

となるので、$\|R_tF - F\|_\infty$ は $t \searrow 0$ としても 0 に収束しないことが分かる。

しかし収束の意味を「一様収束」から「一様有界・各点収束」に緩めてしまえば、Ornstein-Uhlenbeck 半群 $\{R_t\}_{t\geq 0}$ は π**-semigroup** (weakly continuous semigroup) という枠組みで捉えなおすことができる。そこで Ornstein-Uhlenbeck 作用素 $(L, \mathcal{D}(L; UC_{b,2}(E)))$ および $(L, \mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E)))$ を、

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(L; UC_{b,2}(E)) &:= \Big\{F \in UC_{b,2}(E) \ \Big| \ \sup_{t>0} \frac{1}{t}\|R_tF - F\|_{b,2} < \infty, \\
&\qquad \exists G(= LF) \in UC_{b,2}(E) \text{ s.t. } \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(R_tF(w) - F(w)) = G(w),\ w\in E\Big\}, \\
\mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E)) &:= \Big\{F \in C_{b,2}^1(E) \ \Big| \ \sup_{t>0} \frac{1}{t}\|R_tF - F\|_{b,2} < \infty, \\
&\qquad \exists G(= LF) \in C_{b,2}^1(E) \text{ s.t. } \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(R_tF(w) - F(w)) = G(w),\ w\in E\Big\}.
\end{aligned}$$

と定義する。明らかに $\mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E)) \subset \mathcal{D}(L; UC_{b,2}(E))$ であり、レゾルベントを $\Psi_\lambda F := \int_0^\infty e^{-\lambda t}R_tFdt, \lambda > 0$ とすると

$$\mathcal{D}(L; UC_{b,2}(E)) = \Psi_\lambda(UC_{b,2}(E)), \quad \mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E)) = \Psi_\lambda(C_{b,2}^1(E))$$

となることも知られている（詳細は [29] の Proposition 2.2.8 を参照)。

以下の Key となる命題は、$\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$ $\mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E))$ の関係だけでなく、$\mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E))$ の元が $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$ の 4-sequence で「良い近似」ができる事を示している。

Proposition 3.3 (1) $\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty) \subset \mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E))$ *holds and we have*

$$LF(w) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(D_H^2 F(w)\big) + \frac{1}{2}\langle w, (\Delta_x - \kappa) D_H F(w)\rangle, \quad F \in \mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty).$$

(2) *Let* $F \in \mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E))$. *Then there exists a* 4*-sequence* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}^4} = \{F_{n_1,\cdots,n_4}\} \subset \mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$ *such that for all* $w \in E$ *we have*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(w) = F(w), \ \lim_{n\to\infty} DF_n(w) = DF(w), \ \lim_{n\to\infty} LF_n(w) = LF(w)$$

and the estimates

$$\begin{aligned}
\|F_n\|_{b,2} &\le \frac{2e}{e-1}\big(1+\mathrm{Tr}(Q_\infty)\big)\cdot\big(\|F\|_{b,2} + \|LF\|_{b,2}\big),\\
\|DF_n\|_{b,2} &\le \frac{2e}{e-1}\big(1+\mathrm{Tr}(Q_\infty)\big)\\
&\quad \times \big(2\|F\|_{b,2} + \|DF\|_{b,2} + 2\|LF\|_{b,2} + \|DLF\|_{b,2}\big),\\
\|LF_n\|_{b,2} &\le 1 + 2\big(2+\mathrm{Tr}(Q_\infty)\big)\cdot\big(\|F\|_{b,2} + \|LF\|_{b,2}\big).
\end{aligned}$$

以上の Lemma 3.2, Proposition 3.3 および Proposition 3.4 の帰結として、$\mathcal{FC}_b^\infty(\mathcal{C}_\infty^\infty)$ と $\mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}}_0)$ の間に $\mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E))$ をはさみ込めることが分かる。

Proposition 3.4 $\mathcal{D}(L, C_{b,2}^1(E)) \subset \mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}}_0)$ *and the following identity holds:*

$$\overline{\mathcal{L}}_0 F = LF + (b(\cdot), DF)_E, \quad F \in \mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E)),$$

where $b:\ \mathrm{Dom}(b) \subset E \to E$ *is a measurable mapping with* $\mathrm{Dom}(b) = \mathcal{C}$ *defined by*

$$b(w)(\cdot) := \frac{1}{2}\big(\kappa w(\cdot) - \nabla U(w(\cdot))\big).$$

3.3 カップリング法による証明の完結

本小節にて主定理の証明のあらすじを述べたい。上記の Proposition 3.4 より、条件 **(U1)'** の下では解の候補 $\Phi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t F dt,\ \lambda > \frac{K_1}{2} + r^2$ が $\mathcal{D}(L; C_{b,2}^1(E))$ の元であり、方程式

$$\lambda\Phi - L\Phi - (b(\cdot), D\Phi)_E = F \tag{3.7}$$

を満たすことを示せば、方程式 (3.1) を解いたことになり、証明は完結する。

Remark 3.5 さらに一般の場合は可測写像

$$\widetilde{b}(w)(\cdot) := -\frac{1}{2}\partial_0 \widetilde{U}(w(\cdot)), \quad w \in \mathrm{Dom}(\widetilde{b}) = \mathcal{C} \quad (\widetilde{U}\text{ は条件 }\mathbf{(U1)}\text{ に登場する関数})$$

に対して、吉田近似 $\widetilde{b}_\alpha$ (Lipschitz 連続性の回復) を行った後に Hilbert 空間上の軟化子 (regularity の回復) を用いた近似

$$\begin{aligned}
\widetilde{b}_{\alpha,\beta}(w) &:= \int_E e^{\beta B}\widetilde{b}_\alpha\big(e^{\beta B}w + y\big) N_{\frac{1}{2}B^{-1}(e^{2\beta B}-1)}(dy), \quad w \in E, \alpha, \beta > 0.\\
&\big(\text{ ただし } B : \mathrm{Dom}(B) \subset E \to E \text{ は負値自己共役かつ } B^{-1} \in L_{(1)}(E, E)\ \big)
\end{aligned}$$

を行うことにより、結局は条件

(D) $\widetilde{b} : E \to E$ is dissipative, smooth and has bounded derivatives of all orders.

の下で証明を行えば良いことになる。すなわち Theorem 2.4 を示すだけなら、Remark 3.1 で述べた程度の結果 (ドリフトが Lipschitz 連続な場合の (3.2) の解の一意存在性) さえあれば十分であるとも言える。

まず $\Phi \in \mathcal{D}(L; C^1_{b,2}(E))$ を示すために $\lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t}(R_t\Phi(w) - \Phi(w))$ を計算しておこう。ただし以下では $S(b)_t := \int_0^t S_{t-s} b(X^w_s) ds$ と記す。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}(R_t\Phi(w) - \Phi(w)) \\
&= \frac{1}{t}\mathbb{E}\big[\Phi(Y^w_t) - \Phi(w)\big] \\
&= \frac{1}{t}\mathbb{E}\Big[\Phi\big(X^w_t - S(b)_t\big) - \Phi(w)\Big] \\
&= \frac{1}{t}\mathbb{E}\big[\Phi(X^w_t) - \Phi(w)\big] - \mathbb{E}\Big[\int_0^1 \Big(D\Phi\big(X^w_t - \theta S(b)_t\big), \frac{1}{t}S(b)_t\Big)_E d\theta \quad \Big] \\
&= \frac{1}{t}(P_t\Phi(w) - \Phi(w)) - \int_0^1 \mathbb{E}\Big[\Big(D\Phi\big(X^w_t - \theta S(b)_t\big), \frac{1}{t}S(b)_t\Big)_E\Big] d\theta \\
&\to \lambda\Phi(w) - F(w) + (D\Phi(w), b(w))_E \quad \text{as } t \searrow 0, \quad w \in E.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

よって、後はこの右辺が $C^1_{b,2}(E)$ に属することを示せばよいが、そのためには以下の半群 $\{P_t\}_{t\ge 0}$ の微分公式が必要となる。これの証明には [17],[18] などで用いられた確率偏微分方程式 (3.2) に対するカップリング法が有効である。

Proposition 3.6 *Let $F \in C^2_b(E)$ and let $\{P_t\}_{t\ge0}$ be the transition semigroup for X. Then $P_tF \in C^2_b(E)$ and it holds that*

$$\big(DP_tF(w), k\big)_E = \mathbb{E}\big[\big(DF(X^w_t), Z_t(w;k)\big)_E\big], \quad w \in E,\ t \ge 0, \tag{3.9}$$

for $k \in E$, where $Z_t(w;k)$ is the mild solution of the first variation equation

$$\frac{du_t}{dt} = Au_t + Db(X^w_t)[u_t]_E, \quad u_0 = k,$$

and we have

$$\|Z_t(w;k)\|_E \le e^{(K_1+2r^2)t/2}\|k\|_E, \quad \mathbb{P}\text{-}a.s. \tag{3.10}$$

Moreover

$$\begin{aligned}
D^2P_tF(w)\big[k_1,k_2\big]_{E\times E} &= \mathbb{E}\big[\big(DF(X^w_t), Z_t(w;k_1,k_2)\big)_E\big] \\
&\quad + \mathbb{E}\big[D^2F(X^w_t)\big[Z_t(w;k_1), Z_t(w;k_2)\big]_{E\times E}\big], \quad w \in E,\ t \ge 0,
\end{aligned}$$

holds for $k_1, k_2 \in E$, where $Z_t(w;k_1,k_2)$ is the mild solution of the equation

$$\frac{dv_t}{dt} = Av_t + Db(X^w_t)[v_t]_E + D^2b(X^w_t)\big[Z_t(w;k_1), Z_t(w;k_2)\big]_{E\times E}, \quad v_0 = 0.$$

We also have the estimate

$$\|Z_t(w;k_1,k_2)\|_E \le \frac{\|D^2 b\|_\infty}{\sqrt{2K_1+4r^2}} e^{(3K_1+6r^2+1)t/2} \cdot \|k_1\|_E \|k_2\|_E, \quad \mathbb{P}\text{-}a.s.$$

特に、(3.9) と (3.10) を合わせると半群 P_t の微分公式

$$\begin{aligned} \|DP_tF(w)\|_E &\le e^{(K_1+2r^2)t/2} P_t(\|DF\|_E)(w), && (3.11)\\ \|D_H P_t F(w)\|_H &\le e^{K_1 t/2} P_t(\|D_H F\|_H)(w). && (3.12) \end{aligned}$$

を得ることができ (不等式 (3.12) は [18] にも登場した)、(3.11) の帰結である

$$\begin{aligned} \|D\Phi(w)\|_E &\le \int_0^\infty e^{-\lambda t} \|D(P_tF)(w)\|_E dt \\ &\le \|DF\|_\infty \int_0^\infty e^{(\frac{K_1}{2}+r^2-\lambda)t} dt < \infty \quad \text{under } \lambda > \frac{K_1}{2} + r^2 \end{aligned}$$

なる評価を (3.8) に合わせることで、$\Phi \in \mathcal{D}(L; C^1_{b,2}(E))$ および $L\Phi = \lambda\Phi - F + (D\Phi, b(\cdot))_E$ (方程式 (3.7) そのもの) が得られたことになり、以下の定理 (Theorem 2.4 の詳細版) の証明が完結したことになる。

Theorem 3.7 *The pre-Dirichlet operator* $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty)$ *is essentially self-adjoint on* $L^2(\mu)$*. Moreover, if we assume* $U \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$*, the semigroup* $\{T_t\}_{t\ge 0}$ *generated by* $(\overline{\mathcal{L}}_0, \mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}}_0))$ *satisfies the following identity for each* $F \in L^2(\mu)$*:*

$$T_tF = P_tF, \quad \mu\text{-}a.s.,$$

where $\{P_t\}_{t\ge 0}$ *is the transition semigroup corresponding to SPDE* (3.2)*.*

Remark 3.8 $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty)$ の Friedrichs 拡大 $(\mathcal{L}_\mu, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_\mu))$ が生成する半群 $\{e^{t\mathcal{L}_\mu}\}_{t\ge 0}$ と $\{P_t\}_{t\ge 0}$ が一致する (すなわち Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ と確率偏微分方程式 (3.2) が対応する) 事は [11] の Theorem 2.1 の証明内にて示されている。

4 応用 (Riesz 変換の有界性)

この節では一意性定理 (Theorem 2.4) の応用として Riesz 変換の有界性 (および 1 次の Sobolev norm の Meyer 同値性) が得られることを述べたい。これは Yoshida [41] が格子スピン系モデルに対して論じていたことの連続極限版である。この節では potential 関数 U に対しての仮定 **(U1)**,**(U2)** を、以下のより強い仮定

(U1)”: $U \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ and there exists a constant $K_1 \in \mathbb{R}$ such that $\nabla^2 U \ge -K_1$.
(U2)’: There exist $K_2 > 0$ and $p > 0$ such that

$$|\nabla U(z)| + |\nabla^2 U(z)|_{\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d} \le K_2(1 + |z|^p), \qquad z \in \mathbb{R}^d.$$

に置き換える。また本節では、(解析の分野の流儀に従い) pre-Dirichlet 作用素 $\underline{(2\mathcal{L}_0, \mathcal{FC}_b^\infty)}$ を**改めて** $\underline{(\mathcal{L}_0, \mathcal{FC}_b^\infty)}$ **と記す**ことにする。この記法の変更により対応する pre-Dirichlet 形式および確率偏微分方程式もそれぞれ

$$\mathcal{E}(F,G) = \int_E \big(D_H F(w), D_H G(w)\big)_H \mu(dw), \quad F, G \in \mathcal{FC}_b^\infty \quad \text{と}$$

$$dX_t(x) = \big\{\Delta_x X_t(x) - \nabla U(X_t(x))\big\}dt + \sqrt{2}dB_t(x),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \quad \text{に置き換わる。}$$

$\{P_t\}_{t\geq 0}$ を上記の確率偏微分方程式の推移半群とすると、(3.5) より、$L^p(\mu), p \geq 1$, 上の C_0-縮小半群に拡張できる。その生成作用素を $\mathcal{L}$ とする (定義域をはっきりさせるために $(\mathcal{L}_p, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_p))$ と明記すべきだが、本講演ではあまりこだわらないことにする。また $(\mathcal{L}_2, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_2)) = (\mathcal{L}_\mu, \mathrm{Dom}(\mathcal{L}_\mu)) = (\overline{\mathcal{L}_0}, \mathrm{Dom}(\overline{\mathcal{L}_0}))$ であることは言うまでもない)。ここで Riesz 変換を

$$R_\alpha(\mathcal{L})F := D_H(\alpha - \mathcal{L})^{-1/2}F, \quad \alpha > 0, F \in \mathcal{FC}_b^\infty$$

と定義すると、これの有界性について以下の結果を得ることができる。

Theorem 4.1 ([20], [21]) *Under conditions* **(U1)”**, **(U2)’** *and* **(U3)**, *the Riesz transform $R_\alpha(\mathcal{L})$ is bounded on $L^p(\mu)$ for all $p > 1$ and $\alpha > K_1 \vee 0$. That is, there exists a positive constant C_p depending only on p such that*

$$\|R_\alpha(\mathcal{L})F\|_{L^p(\mu)} \leq C_p \|F\|_{L^p(\mu)}, \qquad F \in \mathcal{FC}_b^\infty.$$

Consequently, the Sobolev norm $\|F\|_{L^p(\mu)} + \|D_H F\|_{L^p(\mu;H)}$ is equivalent to the Sobolev norm $\|(1-\mathcal{L})^{1/2}F\|_{L^p(\mu)}$.

この定理の証明には Littlewood-Paley-Stein 不等式と呼ばれる調和解析で重要な不等式 (Kawabi-Miyokawa [22], Shigekawa [35]) および半群の intertwining property と呼ばれる半群と微分の交換関係 (Shigekawa [36], [37]) が重要となってくる。ここでは intertwining property (4.2) の導出について述べる。まず、H-値 cylinder 関数の空間を

$$\begin{aligned}(\mathcal{FC}_b^\infty)_H \quad := \quad & \Big\{\theta = \sum_{k=1}^m F_k e_k \ \Big|\ m \in \mathbb{N}, F_k = f_k(\langle\cdot, \varphi_1\rangle, \ldots, \langle\cdot, \varphi_n\rangle) \in \mathcal{FC}_b^\infty, \\ & \qquad e_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), 1 \leq k \leq m\Big\} \quad \text{と定義し、}\end{aligned}$$

$(\mathcal{FC}_b^\infty)_H$ 上の微分作用素

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathcal{L}_0}\,\theta(w) \quad := \quad & \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f_k}{\partial\alpha_i \partial\alpha_j}\big(\langle w, \varphi_1\rangle, \cdots, \langle w, \varphi_n\rangle\big)\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle\, e_k(\cdot) \\ & + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial\alpha_i}\big(\langle w, \varphi_1\rangle, \cdots, \langle w, \varphi_n\rangle\big) \cdot \big\{\langle w, \Delta_x\varphi_i\rangle - \langle\nabla U(w(\cdot)), \varphi_i\rangle\big\}\, e_k(\cdot). \\ & + \sum_{k=1}^m f_k\big(\langle w, \varphi_1\rangle, \cdots, \langle w, \varphi_n\rangle\big) \cdot \Big(\Delta_x e_k(\cdot) - \nabla^2 U(w(\cdot))[e_k(\cdot)]_{\mathbb{R}^d}\Big)\end{aligned}$$

を考える。条件 **(U2)** により $\overrightarrow{\mathcal{L}_0}\,\theta \in L^2(\mu; H)$ となり、以下の生成作用素レベルでの intertwining property

$$D_H \mathcal{L}_0 F = \overrightarrow{\mathcal{L}_0} D_H F, \quad F \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty \tag{4.1}$$

が成立する。次に $L^2(\mu; H)$ 上の双線形型式 $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ を

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}(\theta, \eta) := \big(-\overrightarrow{\mathcal{L}_0}\,\theta, \eta \big)_{L^2(\mu;H)}, \qquad \theta, \eta \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(H)$$

で定義すると条件 **(U1)"** より

$$\overrightarrow{\mathcal{E}}(\theta, \theta) \geq -K_1 \|\theta\|^2_{L^2(\mu;H)}, \qquad \theta \in \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(H)$$

となるので、$(\overrightarrow{\mathcal{L}_0}, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty(H))$ の Friedrichs 自己共役拡大 $(\overrightarrow{\mathcal{L}_\mu}, \mathrm{Dom}(\overrightarrow{\mathcal{L}_\mu}))$ が存在する。これに対応する閉形式を $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, \mathcal{D}(\overrightarrow{\mathcal{E}}))$ 、生成する半群を $\{\overrightarrow{P}_t\}_{t\geq 0}$ と記すことにする。すると $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty)$ の本質的自己共役性 (Theorem 2.4) より、(4.1) から半群レベルでの intertwining property

$$D_H P_t F = \overrightarrow{P}_t D_H F, \qquad t \geq 0, \quad F \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \tag{4.2}$$

を導くことができる (詳細は [37] の Theorem 2.1 と Theorem 3.2 を参照)。

5 関連した話題およびいくつかの注意

この節では、いくつかの関連した話題と注意 (今後の課題) について述べておく。

[1]. 作用素解析の立場からすると、(第 4 節で変更した解析の流儀の) pre-Dirichlet 作用素 $(\mathcal{L}_0, \mathcal{F}\mathcal{C}_b^\infty)$ の本質的自己共役性の次の課題として、スペクトル構造を調べることがあげられよう。potential 関数の凸性がある場合は、その第 1 歩としての対数 Sobolev 不等式およびスペクトルギャップの評価を得ることができる。

Theorem 5.1 ([19]) *Assume $K_1 < 0$, that is, U is (strictly) convex. Then we have the following logarithmic Sobolev inequality:*

$$\int_E F(w)^2 \log\Big(\frac{F(w)^2}{\|F\|^2_{L^2(\mu)}}\Big)\mu(dw) \leq -\frac{2}{K_1}\int_E \|D_H F(w)\|_H^2 \mu(dw), \quad F \in \mathcal{D}(\mathcal{E}). \tag{5.1}$$

Consequently, we have

$$\inf(\sigma(-\mathcal{L}_\mu) \setminus \{0\}) \geq -K_1.$$

証明には $\{P_t\}_{t\geq 0}$ の微分評価 (3.12) が用いられる。(3.12) は対数 Sobolev 不等式 (5.1) をはじめとする様々な関数不等式を導出する鍵になる評価である。放物型 Harnack 不等式およびその応用としての (3.2) の推移確率の Varadhan 型短時間漸近挙動は [17], [18] で得られている。また Theorem 5.1 より、この半群の $L^2(\mu)$-ergodicity

$$\big\|P_t F - \mathbb{E}^\mu[F]\big\|_{L^2(\mu)} \leq e^{K_1 t}\big\|F - \mathbb{E}^\mu[F]\big\|_{L^2(\mu)}, \quad t \geq 0, \quad F \in L^2(\mu) \ \ \text{も分かる。}$$

[**2**]. 最初に pre-Dirichlet 作用素 $\mathcal{L}_0$ の定義域を $\mathcal{FC}_b^\infty$ でなく、$\mathcal{FC}_\uparrow^\infty$ (関数 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ および全ての微係数が高々多項式増大度を持つ) に変更しても、評価 (2.5) のおかげで Theorem 2.4 は成り立ち、自己共役拡大は一致する。

[**3**]. potential 関数 U に対する 3 つの条件のうち、本講演の内容で本質的に効いているのは (**U1**) であり、他の条件はまだ緩める余地が残っている。特に (**U3**) は $\mathbb{R}^d$ 上の Shrödinger 作用素 H_U の ground state Ω を導くための条件であり、現在では更にゆるい Kato class の枠組みで議論されている。例えば、$\mathbb{R}^3$ 上の potential 関数 $U(z) = 1/|z|^\alpha$ を考えてみると、$\alpha < 2$ の時に U は Kato class に入り、H_U の ground state Ω は存在する。よって Gibbs 測度 μ は存在する。また (**U2**) は、$\mathcal{L}_0 F \in L^2(\mu)$ を言う際の $\langle \nabla U(w(\cdot)), \varphi \rangle \in L^2(\mu), \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ の確認のため (だけ) に必要であり、今の場合は μ の平行移動不変性および $\nabla U(z) = -z/|z|^{\alpha+2}, z \neq 0$ に注意すると、$\alpha < 1/2$ の時は

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}^\mu \big[\langle \nabla U(w(\cdot)), \varphi \rangle^2 \big] \\
&\le \Big(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \rho_{2r}(x) dx \Big) \int_E \Big(\int_{\mathbb{R}} |\nabla U(w(x))|^2 \rho_{-2r}(x) dx \Big) \mu(dw) \\
&\le \frac{C_{\varphi,r}}{r} \int_E |\nabla U(w(0))|^2 \mu(dw) = \frac{C_{\varphi,r}}{r} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\Omega(z)^2}{|z|^{2\alpha+2}} dz < \infty
\end{aligned}
$$

となる。以上により、(**U2**) と (**U3**) がなくても Theorem 2.4 は成立しうることが分かる。また Hariya [14] では、剛体壁 potential ($U(z) = \infty, z \le 0$) を持つ $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ 上の Gibbs 測度が構成され、Otobe [28] ではこの測度が反射壁確率偏微分方程式の可逆測度になることが論じられているが、この場合を含むように条件を緩めることは今後の課題である。

[**4**]. 場の量子論における Nelson の scalar field モデルでは Fock 空間という巨大な空間上の作用素解析を行う必要があるが、近年、interaction potential 関数 $V = V(t,z) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ (典型例としては $V(t,z) = \frac{\lambda}{1+t^2+|z|^2}$) を含む Gibbs 測度

$$
\begin{aligned}
\mu(dw) = Z^{-1} \exp \Big(&- \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |w'(x)|_{\mathbb{R}^d}^2 dx - \int_{\mathbb{R}} U(w(x)) dx \\
&- \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2} V(x-y, w(x)-w(y)) dx dy \Big) \prod_{x \in \mathbb{R}} dw(x)
\end{aligned}
$$

に関する汎関数積分を用いたアプローチがこれに有効であることが分かってきており、この Gibbs 測度 μ の数学的構成が Osada-Spohn [27], [14] などでされてきた。これを参照測度とした場合の一意性問題の考察も今後の課題である。

また経路空間上の確率解析の立場からすると、$C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ の $\mathbb{R}^d$ を多様体に変えた場合も考えたくなってくる。例えば手始めに $(\mathbb{R}^d, g)$ (Riemann 計量 g は強楕円性を満たす) の場合を考えてみたとする。この場合の Gibbs 測度は $\mathbb{R}^d$ 上の変数係数 Shrödinger 作用素の ground state の問題に帰着されるので、第 2 節と同様に構成可能である。その一方で pre-Dirichlet 作用素 $\mathcal{L}_0$ も (計量 g に関係した) 変数係数作用素に変わり、もはや Ornstein-Uhlenbeck 過程の摂動とは解釈できないので、今回の講演とは異なる別アプローチが必要となってくると思われる。

参考文献

[1] S. Albeverio, Y. Kondratiev and M. Röckner: *Dirichlet operators via stochastic analysis*, J. Funct. Anal. **128** (1995), pp 102–138.

[2] S. Albeverio and S. Kusuoka: *Maximality of infinite-dimensional Dirichlet forms and Høegh-Krohn's model of quantum fields*, in "Ideas and methods in quantum and statistical physics" (Oslo 1988), Cambridge Univ. Press, Cambridge (1992), pp. 301-330.

[3] S. Albeverio, S. Kusuoka and M. Röckner: *On partial integration in infinite-dimensional space and applications to Dirichlet forms*, J. London Math. Soc. **42** (1990), pp. 122–136.

[4] S. Albeverio and M. Röckner: *New developments in theory and applications of Dirichlet forms*, in "Stochastic Processes, Physics and Geometry, Ascona/Locarno, Switzerland, 1988" (S. Albeverio et al., Eds.), pp. 27–76, World Scientific, Singapore, 1990.

[5] V. Betz and J. Lörinczi: *Uniqueness of Gibbs measures relative to Brownian motion*, Ann. Henri Poincaré **5** (2003), pp. 877–889.

[6] G. Da Prato: *Transition semigroups corresponding to Lipschitz dissipative systems*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **10** (2004), pp. 177–192.

[7] G. Da Prato and M. Röckner: *Singular dissipative stochastic equations in Hilbert spaces*, Probab. Theory Relat. Fields **124** (2002), pp. 261–303.

[8] G. Da Prato and L. Tubaro: *Self-adjointness of some infinite-dimensional elliptic operators and application to stochastic quantization*, Probab. Theory Related Fields **118** (2000), pp. 131–145.

[9] G. Da Prato and L. Tubaro: *Some results about dissipativity of Kolmogorov operators*, Czechoslovak Mathematical Journal **51** (2001), pp. 685–699.

[10] A. Eberle: Uniqueness and non-uniqueness of singular diffusion operators, Lecture Notes in Mathematics **1718**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999.

[11] T. Funaki: *The reversible measure of multi-dimensional Ginzburg-Landau continuum model*, Osaka J. Math. **28** (1991), pp. 463–494.

[12] T. Funaki: *Regularity properties for stochastic partial differential equations of parabolic type*, Osaka J. Math. **28** (1991), pp. 495–516.

[13] 舟木 直久: 確率微分方程式, 岩波書店, 1997.

[14] Y. Hariya: *Construction of Gibbs measures for 1-dimensional continuum fields*, Probab. Theory Related Fields **136** (2006), pp. 157–170.

[15] K. Iwata: *Reversible measures of a $P(\phi)_1$-time evolution*, in "Prob. Meth. in Math. Phys. : Proceedings of Taniguchi symposium" (K. Itô and N. Ikeda eds.), Kinokuniya, (1985), pp. 195–209.

[16] K. Iwata: *An infinite dimensional stochastic differential equation with state space* $C(\mathbb{R})$, Probab. Theory Relat. Fields **74** (1987), pp. 141–159.

[17] H. Kawabi: *Functional inequalities and an application for parabolic stochastic partial differential equations containing rotation*, Bull. Sci. Math., **128** (2004), pp. 687–725.

[18] H. Kawabi: *The parabolic Harnack inequality for the time dependent Ginzburg-Landau type SPDE and its application*, Potential Analysis **22** (2005), pp. 61–84.

[19] H. Kawabi: *A simple proof of the log-Sobolev inequality on the path space with Gibbs measures*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., **9** (2006), pp. 321–329.

[20] H. Kawabi: *Topics on diffusion semigroups on a path space with Gibbs measures*, To appear in Proceedings of RIMS Workshop on Stochastic Analysis and Applications, German-Japanese Symposium, RIMS Kokyuroku Bessatsu.

[21] H. Kawabi: *Riesz transforms for diffusion operators on a path space with Gibbs measures*, In preparation.

[22] H. Kawabi and T. Miyokawa: *The Littlewood-Paley-Stein inequalities for diffusion processes on general metric spaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **14** (2007), pp. 1–30.

[23] H. Kawabi and M. Röckner: *Essential self-adjointness of Dirichlet operators on a path space with Gibbs measures via an SPDE approach*, J. Funct. Anal., **242** (2007), pp. 486–518.

[24] S. Kusuoka: *Dirichlet forms and diffusion processes on Banach space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **29** (1982), pp. 79–95.

[25] V. Liskevich and M. Röckner: *Strong uniqueness for certain infinite-dimensional Dirichlet operators and applications to stochastic quantization*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., Serie IV, **27** (1998), pp. 69–91.

[26] V. Liskevich and Y. Semenov: *Dirichlet operators: A priori estimates and the uniqueness problem*, J. Funct. Anal., **109** (1992), pp. 199–213.

[27] H. Osada and H. Spohn: *Gibbs measures relative to Brownian motion*, Ann. Probab. **27** (1999), pp. 1183–1207.

[28] Y. Otobe: *Invariant measures for SPDEs with reflection*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **11** (2004), pp. 425–446.

[29] E. Priola: *π-semigroups and applications*, Preprint No. 9 of the Scuola Normale Superiore di Pisa, 1998.

[30] E. Priola: *Partial differential equations with infinitely many variables*, Ph.D.-thesis, Universita' di Milano, 1999.
(`http://www2.dm.unito.it/paginepersonali/priola/`)

[31] M. Reed and B. Simon: Methods of modern mathematical physics, Vol. II, IV. New York: Academic Press, 1975, 1978.

[32] M. Röckner and T.S. Zhang: *On uniqueness of generalized Schrödinger operators and applications*, J. Funct. Anal. **105** (1992), pp. 187–231.

[33] M. Röckner and T.S. Zhang: *Uniqueness of generalized Schrodinger operators. II*, J. Funct. Anal. **119** (1994), pp. 455–467.

[34] I. Shigekawa: *An example of regular (r,p)-capacity and essential self-adjointness of a diffusion operator in infinite dimensions*, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), pp. 639–651.

[35] I. Shigekawa: *Littlewood-Paley inequality for a diffusion satisfying the logarithmic Sobolev inequality and for the Brownian motion on a Riemannian manifold with boundary*, Osaka J. Math. **39** (2002), pp. 897–930.

[36] 重川 一郎：半群の交換関係と比較定理, 日本数学会 2002 年度年会統計数学分科会特別講演予稿集, pp. 29–48.

[37] I. Shigekawa: *Defective intertwining property and generator domain*, J. Funct. Anal. **239** (2006), pp. 357–374.

[38] B. Simon: Functional integration and quantum physics. New York: Academic Press, 1979.

[39] M. Takeda: *On the uniqueness of Markov self-adjoint extension of diffusion operators on infinite dimensional spaces*, Osaka J. Math. **22** (1985), pp. 733–742.

[40] N. Wielens: *The essential selfadjointness of generalized Schrodinger operators*, J. Funct. Anal. **61** (1985), pp. 98–115.

[41] N. Yoshida: *The Littlewood-Paley-Stein inequality on an infinite-dimensional manifold*, J. Funct. Anal. **122** (1994), pp. 402–427.