

確率解析学特論 レポート問題 (2009年6月)

担当者：河備 浩司 (A-309号室, kawabi@math.okayama-u.ac.jp)

- 2009年7月23日(木)までに数学事務室に提出してください。
- A4サイズのレポート用紙で提出してください。特に1ページ目に科目名(確率解析学特論), 学籍番号, 名前を明記してください。
- 1 は必修問題です。一題正解の場合は60点、二題正解の場合は70点、三題正解の場合は80点、四題正解の場合は90点、五題以上正解の場合は100点とします。
- まわりの人と相談して問題に取り組んでも構いませんが、自分の言葉で丁寧な答案をなるべく文章を混ぜて作成してください。自分で再度読んでみて全く意味が分からないような(例えば数式の単なる羅列) 答案はもってのほかです。一字一句全く同じ答案が見つかった場合は、写した人だけでなく写させた人の答案も0点にします。

1 Rough path 理論における control 関数 $\omega = \omega(s, t), (s, t) \in \Delta_T$ の定義を述べよ。また $[s, t]$ を $[0, T]$ 内のある閉区間とし、 $D = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ を $[s, t]$ の分割としたとき、

$$\omega(t_{i-1}, t_{i+1}) \leq \frac{2}{N-1} \omega(s, t)$$

となるような番号 $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ が存在することを示せ。

2 $C : x = x_t, y = y_t (0 \leq t \leq T)$ を \mathbb{R}^2 内の滑らかな曲線とする。このとき

$$A(s, t) := \frac{1}{2} \left(\int_s^t (x_u - x_s) dy_u - \int_s^t (y_u - y_s) dx_u \right), (s, t) \in \Delta_T$$

が曲線 C および $A(x_s, y_s), B(x_t, y_t)$ を結ぶ線分で囲まれた領域の(符号付き)面積となることを Green の公式を用いて示せ。

3 $n \in \mathbb{N}$ とし、 \mathbb{R}^2 内の曲線 $X(n) = (\frac{1}{n} \cos(n^2 t), \frac{1}{n} \sin(n^2 t))_{0 \leq t \leq 2\pi}$ を考える。このとき p 次変動ノルム $\|X(n)\|_{p, 2\pi}$ を計算し、 $p > 2$ の場合に $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X(n)\|_{p, 2\pi} = 0$ を示せ。

4 新古典不等式 (Neo-classical inequality) と二項定理の関係を述べ、講義では省略する(した)証明の中での偏微分に関する計算を補え。

5 講義内で証明を省略したところを自力で埋めた部分があればそれを明記し、証明を述べよ。

6 この講義の感想、セミナーで勉強していること、大学院で数学を学ぶ意義について論ぜよ。