

実 Lie 群 $GL_n(R)$ の Unitary 表現*

—Gelfand-Naimark, Stein, Tadić, Vogan—

石川 佳弘

Mar+Apr, May/2014

概 要

このノートでは、実/複素 Lie 群 $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$ の unitary 表現の分類について纏めておく。前半では、Tadić による Bernstein-Zelevinsky 積による記述を扱う。これは、種となる表現としては一次元 $\det$ 表現, Speh 表現, Stein 補系列を採り、それらの放物誘導で, unitary dual を覆うという方針である。後半では、Vogan による derived functor module による記述を扱う。これは、unipotent 表現として一次元表現 と Stein 補系列を採り、その cohomological 誘導で, unitary 表現を構成するという戦略である。

目 次

1	Tadić classification	2
1.1	Bernstein-Zelevinsky 積	2
1.2	p -adic case	3
1.3	Real case	4
1.4	Complex case	6
2	Vogan classification	7
2.1	Cohomological induction	7
2.2	Stein's complementary series	8
2.3	Almost spherical representations	9
2.4	Levi subgroup and correspondence	10
2.5	Real case	12
3	Comparison of two approaches	14
3.1	Some history	14
3.2	Merits, demerits	15

*SWS 2014 『Structure of $L^2(H \backslash G)$ –local Galois case–』での概説講演の為に + 都築の問題に答えて

このノートを通じて, F は 標数 0 の局所体とする。

1 Tadić classification

ここでは, Tadić による Bernstein-Zelevinsky 積による記述を扱う。これは, 種となる表現としては 一次元 $\det$ 表現, Speh 表現, Stein 補系列を採り, それらの放物誘導で, unitary dual を覆うという方針である。

1.1 Bernstein-Zelevinsky 積

まず, このノートを通じて よく使う記号 $\times$ を思い出しておく。局所体 F 上の古典型簡約群 G の放物部分群 $P = MN$ に対して, その Levi パート M の既約許容表現 σ を考える。 G は古典型なので, Levi 部分群は

$$M \cong \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_d}(F) \times G_0,$$

という形をしている。但し, G_0 は G の Killing-Cartan 型で決まる古典群である。従って, M の表現 σ は,

$$\sigma \cong \sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_d \boxtimes \pi_0$$

という形になる。ここで, σ_i は $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$ の, π_0 は G_0 の既約許容表現である。この時, ユニタリ放物誘導

$$I_P^G(\sigma) := \mathrm{Ind}_P^G(\sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_d \boxtimes \pi_0) \otimes \delta_P^{1/2}$$

は 一般には可約なので, その唯一の既約商を

$$\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_d \times \pi_0 := Q(I_P^G(\sigma))$$

とおき, Bernstein-Zelevinsky 積と呼ぶ。

特に, G が一般線形群 $\mathrm{GL}_n(F)$ の場合には, その Levi 部分群 M は, 行列サイズ n の分割 $\underline{n} = (n_1, \dots, n_d) \vdash n$ に対応して (*i.e.* $M \cong \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_d}(F)$) おり, G_0 は現れない。従って, Bernstein-Zelevinsky 積は $\mathrm{GL}(\ast)$ の許容表現達の”積”と解釈出来る。実際, R_n を $\mathrm{GL}_n(F)$ の許容表現の (F : p -adic)/Harish-Chandra 加群の ($F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) 圏に付随する Grothendieck 群とすると, Bernstein-Zelevinsky 積 $\times$ は, $R := \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ に次数付環の構造を定め, 整係数無限変数多項式環との同型

$$R \cong \mathbb{Z}[\mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{elem}}^\wedge],$$

を与える。但し, $\mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{elem}}^\wedge$ は, $F = p$ -進体, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ に応じて, それぞれ $\bigcup_{n \geq 1} \mathrm{GL}_n(F)_{\mathrm{sc}}^\wedge$, $(\mathbb{R}^\times)^\wedge \cup \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_{\mathrm{ds}}^\wedge$, $(\mathbb{C}^\times)^\wedge$ を表す。

1.2 p -adic case

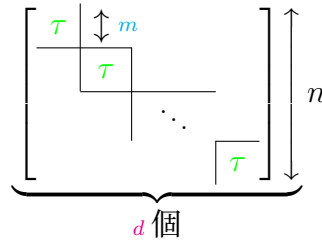
ここでは, 基礎体 F が p -進体 (*i.e.* $F/\mathbb{Q}_p$:fin.) の場合の Tadić 分類を思い出しておく。結果は, Moeglin-Waldspurger による $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の residual 表現の分類と同じ形をしており, 保型表現への応用の観点からは この場合から始めるのが適切であろう。

行列サイズ n の約数 d に対して, その商を m とする。 n の分割として 等分割 $m^d = (m, \dots, m)$ を採り, $\mathrm{GL}_m(F)$ の既約 discrete series 表現 τ により $\sigma = \tau \otimes |\det|^{\frac{1-d}{2}}$ とし, 長さ d , 次数 md の segment

$$\Delta(\tau; d) := [\sigma, \sigma(1), \dots, \sigma(d-1)]$$

を作る。 $\Delta(\tau; d)$ からのユニタリ放物誘導¹

$$\begin{aligned} I_P^G(\Delta) &:= \mathrm{Ind}_{P_{m^d}}^{\mathrm{GL}_n(F)} (\sigma \boxtimes \dots \boxtimes \sigma(d-1)) \otimes \delta_{m^d}^{1/2} \\ &= \mathrm{Ind}_{P_{(m, \dots, m)}}^{\mathrm{GL}_n(F)} \left(\tau \left| \det \right|^{\frac{d-1}{2}} \boxtimes \dots \boxtimes \tau \left| \det \right|^{\frac{1-d}{2}} \right) \otimes \delta_{m^d}^{1/2} \end{aligned}$$



は, 可約性判定定理により 可約である。そこで, その唯一の既約商を

$$u(\tau; d) := Q\left(I_P^G(\Delta(\tau; d))\right) =: \tau \left| \det \right|^{\frac{d-1}{2}} \times \dots \times \tau \left| \det \right|^{\frac{1-d}{2}}$$

とおき, 一般化 Speth 表現と呼ぶ。また, 実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ を使って, $u(\tau; d)$ から $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の補系列表現を

$$uc(\tau; d, \alpha) := \mathrm{Ind}_{P_{(md, md)}}^{\mathrm{GL}_{2n}(F)} \left(u(\tau; d) \left| \det \right|^\alpha \boxtimes u(\tau; d) \left| \det \right|^{-\alpha} \right) \otimes \delta_{(n, n)}^{1/2}$$

と決める。すると

Proposition 1.1 (二つの基本 unitary 表現: [Tad-86] Thm.A.8 , Thm.4.2) .
 n の任意の約数 d , 任意の離散系列表現 $\tau \in \mathrm{GL}_m(F)_{\mathrm{ds}}^\wedge$ ($m := n/d$), 任意の実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ に対して,

$$u(\tau; d), \quad uc(\tau; d, \alpha)$$

は, $\mathrm{GL}_n(F)$ の $\mathrm{GL}_{2n}(F)$ の既約 unitary 表現になる。 □

Tadić 分類の主張は, 「これらが $\mathrm{GL}_n(F)$ のユニタリ双対の基をなしている」という次の定理である。

¹モジュラス指標は, $\delta_{m^d} = \left| \det \right|^{(d-1)m} \boxtimes \left| \det \right|^{(d-3)m} \boxtimes \dots \boxtimes \left| \det \right|^{(1-d)m}$ である。cf. [Go-Hu-11] p.91

Theorem 1.2 (Unitary dual $\mathrm{GL}_n(F)^\wedge$ の記述 ; [Tad-93]) .

(1) n の分割 $(n_1, \dots, n_\ell) \vdash n$ に対して, 既約離散系列表現 $\pi_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(F)_{\mathrm{ds}}^\wedge$ を

$$\pi_i \cong u(\tau; d) \text{ or } uc(\tau'; d', \alpha)$$

但し, $d|n_i$, $\tau \in \mathrm{GL}(\frac{n_i}{d})_{\mathrm{ds}}^\wedge$, $d'|\frac{n_i}{2}$, $\tau' \in \mathrm{GL}(\frac{n_i}{2d'})_{\mathrm{ds}}^\wedge$ の形に採る。この時, 放物誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P_n}^{\mathrm{GL}_n(F)}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_\ell) \otimes \delta_n^{1/2}$$

は, 既約 unitary 表現になる。これを, $\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell$ と記す。

(2) (1) で与えられた $\mathrm{GL}_n(F)$ の unitary 表現は, π_i の順を除き一意である ;

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell \cong \pi'_1 \times \cdots \times \pi'_r \implies \ell = r \text{ and } \pi'_i \cong \pi_{\sigma(i)} \text{ with } \sigma \in \mathfrak{S}_\ell$$

(3) 任意の既約 unitary 表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(F)^\wedge$ は, 必ず (1) で与えられたものの 何れかと同型になる。 $\square$

1.3 Real case

基礎体の実数体 $\mathbb{R}$ の場合に, 前サブセクションに現れた 基本 unitary 表現の構成をなぞってみる。

行列サイズ n が偶数 $2d$ の時, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の既約 discrete series 表現 D から $\mathrm{GL}_{2d}(\mathbb{R})$ へのユニタリ放物誘導

$$\mathrm{Ind}_{P_{(2, \dots, 2)}}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \left(D \left| \det \right|^{\frac{d-1}{2}} \boxtimes \cdots \boxtimes D \left| \det \right|^{\frac{1-d}{2}} \right) \otimes \delta_{2d}^{1/2}$$

d 個

を考える。これは可約であり, 唯一の既約商

$$u(D; d) := D \left| \det \right|^{\frac{d-1}{2}} \times \cdots \times D \left| \det \right|^{\frac{1-d}{2}}$$

を Speh 表現と呼ぶ (cf.[Spe-83]) のであった。

ここで, 実線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ が 離散系列表現を持つのは, 行列サイズ n が 1 または 2 の時に限る ;

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})_{\mathrm{ds}}^\wedge \neq \emptyset \iff n = 1, 2$$

ことに注意すれば, $GL_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times$ のユニタリ指標 χ から $GL_{1n}(\mathbb{R})$ へのユニタリ放物誘導

$$\text{Ind}_{P_{(1,\dots,1)}}^{GL_n(\mathbb{R})} \left(\chi \left| \det \right|^{\frac{n-1}{2}} \boxtimes \cdots \boxtimes \chi \left| \det \right|^{\frac{1-n}{2}} \right) \otimes \delta_B^{1/2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \chi & & & \\ & \chi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \chi \end{bmatrix}}_{n \text{ 個}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix}$$

の唯一の既約商である一次元表現 $\chi_n := \chi(\det)$ を

$$u(\chi; n) := \chi \left| \det \right|^{\frac{n-1}{2}} \times \cdots \times \chi \left| \det \right|^{\frac{1-n}{2}}$$

と置くのは自然であろう。

これらから, 実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ を使って, $GL_{2n}(\mathbb{R})$ の補系列表現を

$$uc(D; d, \alpha) := \text{Ind}_{P_{(2d, 2d)}}^{GL_{2n}(\mathbb{R})} \left(u(D; d) \left| \det \right|^\alpha \boxtimes u(D; d) \left| \det \right|^{-\alpha} \right) \otimes \delta_{(2d, 2d)}^{1/2}$$

$$uc(\chi; n, \alpha) := \text{Ind}_{P_{(1n, 1n)}}^{GL_{2n}(\mathbb{R})} \left(u(\chi; n) \left| \det \right|^\alpha \boxtimes u(\chi; n) \left| \det \right|^{-\alpha} \right) \otimes \delta_{(n, n)}^{1/2}$$

と決める。すると, 幸運なことに p -進体上での結果は, そのまま実数体 $\mathbb{R}$ 上でも成り立つ;

Proposition 1.3 (四つの基本 unitary 表現: [Tad-85], [Spe-83]) .

(1) $\mathbb{R}^\times$ の任意のユニタリ指標 $\chi \in GL_1(\mathbb{R})^\wedge$, 任意の実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ に対して,

$$u(\chi; n), \quad uc(\chi; n, \alpha)$$

は, $GL_n(\mathbb{R})$ の $GL_{2n}(\mathbb{R})$ の既約 unitary 表現になる。

(2) n が偶数 $2d$ の時, 任意の離散系列表現 $D \in GL_2(\mathbb{R})_{\text{ds}}^\wedge$, 任意の実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ に対して,

$$u(D; d), \quad uc(D; d, \alpha)$$

は, $GL_n(\mathbb{R})$ の $GL_{2n}(\mathbb{R})$ の既約 unitary 表現になる。 □

そして, p -進一般線形群 $GL_n(F)$ (with $F/\mathbb{Q}_p$:fin.) の場合と同様に, 「これら四つのユニタリ表現が, $GL_n(\mathbb{R})$ のユニタリ双対の基を成す」という 次の定理が, Tadić により示されている。

Theorem 1.4 (Unitary dual $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^\wedge$ の記述 ; [Tad-93]) .

(1) n の分割 $(n_1, \dots, n_\ell) \vdash n$ に対して, 既約離散系列表現 $\pi_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{R})_{\mathrm{ds}}^\wedge$ を

$$\pi_i \cong u(\chi; n_i) \text{ or } uc(\chi; \frac{n_i}{2}, \alpha) \text{ or } u(D; \frac{n_i}{2}) \text{ or } uc(D; \frac{n_i}{4}, \alpha)$$

の形に採る。この時, 放物誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P_n}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}(\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_\ell) \otimes \delta_n^{1/2}$$

は, 既約 unitary 表現になる。これを, $\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell$ と記す。

(2) (1) で与えられた $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の unitary 表現は, π_i の順を除き一意である ;

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell \cong \pi'_1 \times \cdots \times \pi'_r \implies \ell = r \text{ and } \pi'_i \cong \pi_{\sigma(i)} \text{ with } \sigma \in \mathfrak{S}_\ell$$

(3) 任意の既約 unitary 表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^\wedge$ は, 必ず (1) で与えられたものの 何れかと同型になる。 $\square$

1.4 Complex case

複素線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は, 行列サイズ n が 1 の時にしか 離散系列表現を持たない ;

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{ds}}^\wedge \neq \emptyset \iff n = 1$$

ので, 基礎体が複素数体 $\mathbb{C}$ の場合には 物事は更に単純になる。即ち, unitary dual の building blocks としては, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$ のユニタリ指標 χ から $\mathrm{GL}_{1n}(\mathbb{C})$ へのユニタリ放物誘導

$$\mathrm{Ind}_{P_{(1, \dots, 1)}}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} \left(\chi \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^{\frac{n-1}{2}} \boxtimes \cdots \boxtimes \chi \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^{\frac{1-n}{2}} \right) \otimes \delta_B^{1/2}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \chi & & & \\ & \chi & & \\ & & \ddots & \\ & & & \chi \end{bmatrix}}_{n \text{ 個}} \begin{matrix} \uparrow \\ n \\ \downarrow \end{matrix}$$

の唯一の既約商である一次元表現 $\chi_n := \chi(\det)$ 即ち, Bernstein-Zelevinsky 積

$$u(\chi; n) := \chi \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^{\frac{n-1}{2}} \times \cdots \times \chi \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^{\frac{1-n}{2}} = \chi \nu^{\frac{n-1}{2}} \times \cdots \times \chi \nu^{\frac{1-n}{2}}$$

と, これから 実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ を使って作った, $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ の Stein 補系列表現²

$$\begin{aligned} uc(\chi; n, \alpha) &:= \chi_n \nu^\alpha \times \chi_n \nu^{-\alpha} \\ &= \mathrm{Ind}_{P_{(1n, 1n)}}^{\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})} \left(u(\chi; n) \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^\alpha \boxtimes u(\chi; n) \left| \det \right|_{\mathbb{C}}^{-\alpha} \right) \otimes \delta_{(n, n)}^{1/2} \end{aligned}$$

²サブセクション 2.2 で, 詳述する。

で事足りるのである。但し, $|\cdot|_{\mathbb{C}} := |\cdot|^2$, $\nu := |\det|_{\mathbb{C}}$ とした。即ち, これらが

Proposition 1.5 (二つの基本 unitary 表現 : [Tad-85]) .

$\mathbb{C}^\times$ の任意のユニタリ指標 $\chi \in \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})^\wedge$, 任意の実パラメタ $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ に対して,

$$u(\chi; n), \quad uc(\chi; n, \alpha)$$

は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ の既約 unitary 表現になる。 □

となり, 「 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のユニタリ双対の基を成す」という次の定理が成り立つのである。

Theorem 1.6 (Unitary dual $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\wedge$ の記述 ; [Tad-93]) .

(1) n の分割 $(n_1, \dots, n_\ell) \vdash n$ に対して, 既約離散系列表現 $\pi_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(\mathbb{C})_{\mathrm{ds}}^\wedge$ を

$$\pi_i \cong u(\chi; n_i) \text{ or } uc(\chi; \frac{n_i}{2}, \alpha)$$

の形に採る。この時, 放物誘導表現

$$\mathrm{Ind}_{P_n}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})} (\pi_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \pi_\ell) \otimes \delta_n^{1/2}$$

は, 既約 unitary 表現になる。これを, $\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell$ と記す。

(2) (1) で与えられた $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の unitary 表現は, π_i の順を除き一意である ;

$$\pi_1 \times \cdots \times \pi_\ell \cong \pi'_1 \times \cdots \times \pi'_r \implies \ell = r \text{ and } \pi'_i \cong \pi_{\sigma(i)} \text{ with } \sigma \in \mathfrak{S}_\ell$$

(3) 任意の既約 unitary 表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\wedge$ は, 必ず (1) で与えられたものの何れかと同型になる。 □

2 Vogan classification

ここでは, Vogan による derived functor module による記述を扱う。これは, unipotent 表現として 一次元表現 と Stein 補系列を採り, その cohomological 誘導で, unitary 表現を構成するという戦略である。Galois case distinction への応用を動機としているので, 基礎体が $F = \mathbb{C}$ の場合を主に扱い, $F = \mathbb{R}$ の場合は 最後のサブセクションで修正部分を補う形で述べる。

2.1 Cohomological induction

このサブセクションでは, 簡約群 G に対し, Zuckerman による cohomological 誘導の基本を思い出しておく。

G の複素化 Lie 環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \text{Lie } G \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の Cartan 対合 θ に対し, θ -stable parabolic $\mathfrak{q}$ を一つ採る。その Levi 分解を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ とする時,

$$S := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} / (\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{l})$$

$$R := \dim_{\mathbb{C}} (\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{u})$$

と書く。この時, S -th derived functor of Zuckerman を

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^S(*) := \Gamma^S \cdot \text{ind}_{(\mathfrak{q}, L \cap K)}^{(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)} \cdot (* \otimes_{\mathbb{C}} \wedge^{\text{top}} \mathfrak{u})$$

と定める。また, 無限小指標が $\lambda + \rho_{\mathfrak{u}}$ なる 一次元 $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ -加群 $\mathbb{C}_{\lambda + \rho_{\mathfrak{u}}}$ に対し, その S -th derived functor 加群を

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) := \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^S(\mathbb{C}_{\lambda + \rho_{\mathfrak{u}}})$$

と記す。この時

Proposition 2.1 ([?] Thm.?????) .

無限小指標が λ なる 有限次元 $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$ -加群を E_{λ} と書く時,

$$H^j(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K; A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} E_{\lambda}^{\vee}) = \begin{cases} 0 & j > R, \\ \mathbb{C}^? & j = R \end{cases}$$

が成り立つ。但し, $E_{\lambda}^{\vee}$ は反傾表現を表す。 □

が成り立つ。更に, 重要な事実は 次のユニタリ双対との関係である。

Theorem 2.2 (Wallach ; [Wal-84]) .

実 Lie 群 G の任意の cohomological ユニタリ化可能表現 π は, 或る $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に無限小同値である ;

$$\forall \pi \in G_{\text{coh}}^{\wedge} \cap G^{\wedge}, \quad \pi_K^{\infty} \cong \exists A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$$

但し, π_K^{∞} は π の underlying Harish-Chandra 加群を表す。 □

2.2 Stein's complementary series

ここでは, 偶数サイズの複素一般線形群 $GL_{2\ell}(\mathbb{C})$ に対して, Stein が構成したユニタリ表現について 思い出しておく。

行列サイズ 2ℓ の分割 $(\ell, \ell) \vdash 2\ell$ に付随する放物部分群 $P_{(\ell, \ell)}$ の Levi パートは, $GL_{\ell}(\mathbb{C}) \times GL_{\ell}(\mathbb{C})$ に同型である。 $GL_{\ell}(\mathbb{C})$ のユニタリ表現として, 一次元表現

$$\begin{aligned} u(\chi_1; \ell) = \chi_{\ell} : GL_{\ell}(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}^{(1)} \\ g &\mapsto \chi_1(\det g) \end{aligned}$$

を考える。但し, χ_1 はユニタリ指標 $\chi_1 : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}^{(1)}$ である。これを複素パラメタ $\alpha \in \mathbb{C}$ でツイストして, ユニタリ放物誘導をとったものを

$$\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; \alpha) := \text{Ind}_{P_{(\ell, \ell)}}^{GL_{2\ell}(\mathbb{C})} \left(\chi_{\ell} | \det |_C^{\alpha} \boxtimes \chi_{\ell} | \det |_C^{-\alpha} \right)$$

と書く。但し, $|\cdot|_{\mathbb{C}} := |\cdot|^2$ である。この時, 次が知られている。

Proposition 2.3 ([Ste-67], cf.[Vog-86] Lem.2.4) .

- (1) *disutribution* 指標は, 関係式 $\Theta(\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; \alpha)) = \Theta(\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; -\alpha))$ を満たす。
- (2) 複素パラメタ α が純虚数; $\alpha \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$ の時, $\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; \alpha)$ は $\mathrm{GL}_{2\ell}(\mathbb{C})$ の既約ユニタリ表現になる。
- (3) 複素パラメタ α が $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ の時, $\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; \alpha)$ は $\mathrm{GL}_{2\ell}(\mathbb{C})$ の既約表現で, 或るユニタリ表現に無限小同値である。
- (4) 複素パラメタ α が $1/2$ の時には, $\sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; 1/2)$ は 可約で, その *Jordan-Hölder* 成分に $\mathrm{Ind}_{P_{(\ell+1, \ell-1)}}^{\mathrm{GL}_{2\ell}(\mathbb{C})}$ (ユニタリ指標) を含む。 $\square$

上 Proposition の (3) に現れる, 既約ユニタリ化可能表現を **Stein 補系列** と呼び,

$$uc(\chi_1; \ell, \alpha) := \sigma_{2\ell}(\chi_{\ell}; \alpha) = \chi_{\ell} \nu^{\alpha} \times \chi_{\ell} \nu^{-\alpha}, \quad \text{with } \alpha \in (0, \frac{1}{2})$$

と書く。

2.3 Almost spherical representations

ここでは, Vogan 分類の核となる almost spherical 表現 と almost spherical なユニタリ表現の分類を思い出しておく。

左上に埋め込むことで, $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ を $\mathrm{GL}_{m+1}(\mathbb{C})$ の部分群と見做す。この時, $\chi_m|_{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} = \chi_k$ for $\forall k \leq m$ を満たす $\mathrm{GL}_*(\mathbb{C})$ の一次元表現の族 $\underline{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots)$, 即ち

$$\chi_m := \chi_1 \circ \det_{\mathrm{GL}(m)}, \quad \text{with } \chi_1 : \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \ni re^{i\theta} \mapsto e^{i\theta\lambda} \in \mathbb{C}^{\times}$$

(i.e. hst.wt.of $\chi_m = (\lambda, \dots, \lambda) = \lambda^m$) に³対し, 極大コンパクト部分群 $U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)$ の指標の族を

$$\underline{\mu} := (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots), \quad \text{with } \mu_m := \chi_m|_{U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)}$$

と定める。成分 μ_m を $U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)$ の **special 一次元表現** と呼ぶ。この時, $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の既約とは限らない許容表現 σ が, **almost spherical of type $\underline{\mu}$** であるとは,

$$\sigma|_{U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)} \supset \mu_m$$

となることと定める。その同値類集合を

$$\mathrm{GL}(m)_{a-sphl}^{\wedge}(\underline{\mu}) := \{\sigma : \mathrm{GL}_m(\mathbb{C}) \text{ の許容表現} \mid \sigma : \text{almost spherical of type } \underline{\mu}\} / \cong$$

と記す。更に, $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ の type $\underline{\mu}$ almost spherical 表現 $\sigma \in \mathrm{GL}(m)_{a-sphl}^{\wedge}(\underline{\mu})$ が **basic** であるとは,

$$\sigma \cong \mathrm{Ind}_{P_m}^{\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})}(\rho_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \rho_s) \otimes \delta_m^{1/2}, \quad = \rho_1 \times \cdots \times \rho_s,$$

³例えば, $1 = |\det|^0 \longleftrightarrow (0, \dots, 0)$, $\wedge^m = \det \longleftrightarrow (1, \dots, 1)$ など。

$\underline{m} = (m_1, \dots, m_s) \vdash m$ の形をしていることである。但し, Levi パートの各成分 $GL_{m_j}(\mathbb{C})$ の type $\underline{\mu}$ almost spherical ユニタリ表現 $\rho_j \in GL_{m_j}(\mathbb{C})^\wedge$ は, ユニタリ指標 又は Stein 補系列に採る;

$$\rho_j \cong \begin{cases} u(\chi_1 \nu^{\sqrt{-1}t}; m_j) = \chi_{m_j} \nu^{\sqrt{-1}t}, & t \in \mathbb{R} \\ uc\left(\chi_1 \nu^{\sqrt{-1}t}; \frac{m_j}{2}, \alpha\right), & \alpha \in (0, \frac{1}{2}), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

但し, $\nu := |\det|_{\mathbb{C}} = |\det|^2$ と略記した。

Note : Basic な σ は, 同一のユニタリ指標 χ_1 から 構成されていることに注意せよ。 ■

Proposition 2.4 (Basic 性 と Unitary 性 ; [Vog-86] Thm.3.8) .

$GL_m(\mathbb{C})$ の *almost spherical* 表現 $\sigma \in GL(m)_{a-sphl}^\wedge(\underline{\mu})$ に対して, 次が成り立つ。

(1) σ は *basic* なら, 既約 *unitary* である。

(2) σ は *unitary* なら, *basic* である。 □

Rmk : 上の Proposition 2.4 は, Sahi, Tadić により, 基礎体が p -進体の場合にも 成り立つ (cf. Propositions 1.1, 1.5) ことが示されている。 ■

Note : 上の Proposition 2.4 は, 次セクションで後述する Tadić Hyp.(U0) の特別な場合を解決している。(cf. [Ba-Re-10] p.1144) ■

2.4 Levi subgroup and correspondence

<Strategy of Vogan>

一般の簡約実 Lie 群 G に対して, そのユニタリ双対 $G^\wedge$ を知るには, 次の二つのステップを踏めば良い。

1) G の θ -stable parabolic $\mathfrak{q}$ の Levi 部分群の 実形 L に対して, その **unipotent 表現**

$\pi_0 \in L_{unip}^\wedge \cap L^\wedge$ を記述する。

2) G のユニタリ表現 $\pi \in G^\wedge$ を, $\mathfrak{q}$ からの derived functor 加群 $\mathcal{L}_\mathfrak{q}^S(\pi_0)$ として構成し, exhaustion を示す。

上の戦略を実行するにあたり, Vogan は G のユニタリ双対 $G^\wedge$ を K の既約表現を使って切り分けた;

$$G^\wedge = \bigcup_{\tau \in K^\wedge} G^\wedge(\tau)$$

ここで, K は G の極大コンパクト部分群, $G^\wedge(\tau) := \{\pi \in G^\wedge \mid \text{minimal } K\text{-type} = \tau\}$ である。この切り分けを Levi L に対しても行い, type τ_L の almost spherical 表現の分類により, L の unipotent 表現 π_0 を記述することが出来る。

模式的に描けば,

$$\begin{array}{ccc} G^\wedge(\tau) \ni \pi & \xleftrightarrow{H.C.} & \pi_K^\infty \\ & & \uparrow \mathcal{L}_q^S(*) \\ L_{a-sphl}^\wedge(\tau_L) \ni \pi_0 & \longleftrightarrow & (\pi_0)_{(K \cap L)}^\infty \end{array}$$

ということである。 □

Fact : $G = \mathrm{GL}_n(A)$, $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ の場合には, 次の著しい性質 :

任意の既約表現 $\forall \pi \in G_{\mathrm{adm}}^\wedge$ の mini'l K -type は, 唯一つであり, 重複度 1である

が成り立つ。 ■

従って, これらの群 G に対しては, $G^\wedge = \coprod_{\tau \in K^\wedge} G^\wedge(\tau)$ となり, ユニタリ双対を分割して調べる事が出来る。

< $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ case >

簡約群 G が, 複素一般線形群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の場合, Levi 部分群 L の表現 π_0 としては ユニタリ指標 $\chi \otimes \nu^{it}$ 又は Stein 補系列 $uc(\chi; \ell, \alpha)$ を採れば 十分である というのが, 下の Vogan の定理である。

この時” L はどう採るのか”が問題となるが, 今 簡約 Lie 群 G は一般線形群なので, Levi 部分群 L は 行列サイズの分割 $\underline{n} = (n_1, \dots, n_\ell) \vdash n$ のみで 決まる。この分割 $\underline{n}$ としては, unitary 表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^\wedge$ の minimal K -type を $\tau \in \mathrm{U}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)^\wedge$ とする時, そのパラメタ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の成分が一定値となる 最も粗い分割 $\underline{n}_\lambda$ と定め, 付随する Levi 部分群を L_λ と記す。この時, $L_\lambda \cap K$ の表現 τ_L としては

$$\tau_L := \det_{\mathrm{GL}(n_1)}^{\lambda_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \det_{\mathrm{GL}(n_\ell)}^{\lambda_\ell}$$

を考える。

Example. : $n = 6$ とする。パラメタが $\lambda = (4 = 4 = 4 > 2 = 2 > -3)$ なら, これから決まる分割は $\underline{n}_\lambda = (3, 2, 1) \vdash 6 = n$ であり,

$$\begin{aligned} L_\lambda &\cong \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) \\ \tau_\lambda &= (\det_{\mathrm{GL}(3)})^4 \boxtimes (\det_{\mathrm{GL}(2)})^2 \boxtimes (\det_{\mathrm{GL}(1)})^{-3} \end{aligned}$$

となる。 ■

Theorem 2.5 (Unitary dual $GL_n(\mathbb{C})^\wedge$ の記述 ; [Vog-86] Thm.6.18) .

$U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)$ の既約表現 τ 毎に, 対応 $\mathcal{I}_{\mathbb{C}}(*) := \mathcal{L}_q^S(*)$

$$\begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{C})^\wedge(\tau) & \ni & X \\ & \uparrow \mathcal{I}_{\mathbb{C}}(*) & \\ L_{a-sphl}^\wedge(\tau_L) & \ni & Y \end{array}$$

は, *bijection* になり, 特に次を満たす。

- (1) $Y \in L_{a-sphl}^\wedge(\tau_L)$ が *basic* であれば, その像 $X = \mathcal{L}_q^S(Y)$ は 既約ユニタリになる。
- (2) 任意の $X \in GL_n(\mathbb{C})^\wedge(\tau)$ に対して, $X = (\mathcal{L}_q^S(Y)$ の既約商) となる $Y \in L_{a-sphl}^\wedge(\tau_L)$ が存在する。 $\square$

上 Theorem 中で, 群のユニタリ表現 π と その Harish-Chandra 加群 $\pi_K^\infty = X$ は, 同一視している。また, $L = L_\lambda \cong GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{n_\ell}(\mathbb{C})$ なので, $Y = (\sigma_1)_{U(n_1)}^\infty \boxtimes \cdots \boxtimes (\sigma_\ell)_{U(n_\ell)}^\infty$ となっている事に注意する。この時, Y が *basic* であるとは, 各成分 σ_i が *basic* であると理解する。

Note : Tadić 分類 Theorem 1.6 でも, Vogan 分類 Theorem 2.5 でも, building blocks は ユニタリ指標 $u(\chi; n)$ と Stein 補系列 $uc(\chi; m, \alpha)$ である ことに注意せよ。 $\blacksquare$

以上 基礎体が複素数体; $F = \mathbb{C}$ の場合を見てきたが, $F = \mathbb{R}$ の場合には 少々面倒な修正が必要になる。

2.5 Real case

$F = \mathbb{C}$ の場合に, 一次元表現 $u(\chi; *) = \chi(\det)$ と Stein 補系列 $uc(\chi; *, \alpha)$ が building block として現れる根拠となっていた almost spherical 表現の分類 (cf. サブセクション 2.3) には, 修正が必要となる。その理由は, $GL_m(\mathbb{C})$ の極大コンパクト群は $U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(m)$ であり, special 一次元表現 μ_m のパラメータは $\lambda^m = (\lambda, \dots, \lambda)$ であった。このことが, $\pi_K^\infty \cong A_q(\lambda)$ の minimal K -type τ のパラメータ $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の成分が一定値となる分割 $\underline{n}_\lambda \vdash n$ により Levi 部分群 L_λ を定める根拠となっていた。然るに, $GL_m(\mathbb{R})$ の極大コンパクト群 $O(m)$ は 非連結であり, その既約表現は 自明指標 triv , 符号指標 sgn の二つのみ。従って, $GL_m(\mathbb{R})$ の almost spherical 表現 σ の type は, triv , sgn の二つのみである。

そこで, Levi 部分群 L の $GL(*; \mathbb{R})$ パートを σ の type triv , sgn に応じ 二種類に分けて,

$$\begin{aligned} L \cong & \left\{ \prod GL(m_j; \mathbb{C}) \times \prod GL(m'_j; \mathbb{C}) \right\} \\ & \times \left\{ \prod GL(k_j; \mathbb{R}) \times \prod GL(k'_j; \mathbb{R}) \right\} \times \left\{ \prod GL(\ell_j; \mathbb{R}) \times \prod GL(\ell'_j; \mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

とする。各成分 $GL(*; F)$ の表現としては、一次元 $\det$ 表現 と Stein 補系列のテンソル積

$$\left\{ \bigotimes u(\chi_j; m_j) \boxtimes \bigotimes uc(\chi_j; \frac{m'_j}{2}, \alpha) \right\} \\ \boxtimes \left\{ \bigotimes u(\chi_j; k_j) \boxtimes \bigotimes uc(\chi_j; \frac{k'_j}{2}, \alpha) \right\} \boxtimes \left\{ \bigotimes u(\chi_j; \ell_j) \boxtimes \bigotimes uc(\chi_j; \frac{\ell'_j}{2}, \alpha) \right\}$$

を考える。一行目 $\{ \prod GL(m_j; \mathbb{C}) \times \prod GL(m'_j; \mathbb{C}) \}$ の表現を $\rho_{\mathbb{C}}$, 二行目前半 $\{ * \}$ 中の表現を $\rho_{\mathbb{R}}(\text{triv})$ そして 二行目後半 $\{ * \}$ 中の表現を $\rho_{\mathbb{R}}(\text{sgn})$ と書く時

$$\pi_{0, \mathbb{R}} := \text{Ind}_{P_{\underline{k}+\underline{\ell}}}^{\text{GL}_{\underline{k}+\underline{\ell}}(\mathbb{R})} \left(\rho_{\mathbb{R}}(\text{triv}) \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{sgn}) \right) \otimes \delta_{\underline{k}+\underline{\ell}}^{1/2}$$

と放物誘導を採る。ここで, $\underline{k} = (k_1, \dots, k_t) \vdash k$ (即ち, $k_1 + \dots + k_t = k$), $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_u) \vdash \ell$ とした。サブセクション 2.3 の言葉では, この $\pi_{0, \mathbb{R}}$ は basic almost spherical 表現 of type $\text{triv} + \text{sgn}$ である。

放物誘導を採るという操作で, Levi 部分群 L 上の表現

$$\rho_{\mathbb{C}} \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{triv}) \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{sgn}) \quad \text{on } L \quad \text{は,} \quad \rho_{\mathbb{C}} \boxtimes \pi_{0, \mathbb{R}} \quad \text{on } L_{\theta}$$

に拡張された。但し, L_{θ} は $GL_n(\mathbb{R})$ の新しい Levi 部分群

$$L_{\theta} \cong \left\{ \prod GL(m_j; \mathbb{C}) \times \prod GL(m'_j; \mathbb{C}) \right\} \times GL_{\underline{k}+\underline{\ell}}(\mathbb{R})$$

である。従って, Main Theorem 2.5 の対応は,

$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\rho_{\mathbb{C}} \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{triv}) \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{sgn})) := \mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^S \left(\rho_{\mathbb{C}} \boxtimes \text{Ind}_{P_{\underline{k}+\underline{\ell}}}^{\text{GL}_{\underline{k}+\underline{\ell}}(\mathbb{R})} (\rho_{\mathbb{R}}(\text{triv}) \boxtimes \rho_{\mathbb{R}}(\text{sgn})) \otimes \delta_{\underline{k}+\underline{\ell}}^{1/2} \right)$$

という 2-step の誘導に置き換えなくてはならない。

しかし この修正を施せば, Theorem 2.5 は, $GL_n(\mathbb{R})$ に対しても成り立つ。即ち, $F = \mathbb{R}$ の場合にも Vogan 分類では, building blocks は ユニタリ指標 $u(\chi; n)$ と Stein 補系列 $uc(\chi; m, \alpha)$ になる。

<Tadić 分類との関係>

ここで, 素朴な疑問が浮かび上がる。 $F = \mathbb{C}$ の場合には, Tadić 分類でも Vogan 分類でも building blocks は 同じであった。が, $F = \mathbb{R}$ では, Tadić 分類の building blocks の半分: Speh 表現 $u(D; m)$, 補系列表現 $uc(\chi; \frac{m}{2}, \alpha)$ が Vogan 分類には関わっていない様に見える。しかし, これは表示の仕方の問題であり, 次の

Fact: (Independence of polarization : [Vog-86] Thm.17.6, Thm.17.9, [Kn-Vo-95] Chap.11) cohomological 誘導 $\mathcal{L}_{\mathfrak{q}}^S$ と 放物誘導 Ind_P^{GL} は, 順序を入替えて良い。 ■

を使うと得心させられる。実際, cohomological 誘導により,

$$\text{一次元表現 } u(\chi_j; m_j) \text{ on } GL(m_j; \mathbb{C}) \text{ から, Speh 表現 } u(D_j; m_j) \text{ on } GL(2m_j; \mathbb{R})$$

$$\text{Stein 補系列 } uc(\chi_j; \frac{m'_j}{2}, \alpha) \text{ on } GL(m'_j; \mathbb{C}) \text{ から, 補系列表現 } uc(D_j; m'_j) \text{ on } GL(2m'_j; \mathbb{R})$$

を得るので, 二つの分類の compatibility が 了解される訳である。

3 Comparison of two approaches

3.1 Some history

実/複素一般線形群のユニタリ双対は, Tadić [Tad-85] と Vogan [Vog-86] により, ほぼ同時期に決定されている。にも関わらず, Vogan による分類ばかりが有名であり, Tadić による分類は 長らく日の目を見ない状態にあった。これは, [Tad-85] が出版されなかったことよりも, 当時置かれていた 五つの仮説が Tadić 本人により徐々に解決されていく中, 最後に残った $\mathrm{Hyp.}(U0)$ が難しく, Tadić 分類は”不完全なもの”というムードによると考えられる。

ここでは, Tadić の置いた五つの仮説を思い出して⁴おく。局所体 F 上の可除環 A に対して, 全てのサイズの A 成分一般線形群のユニタリ双対の合併⁵を

$$\mathrm{GL}(\infty)^\wedge := \bigcup_{n \geq 1} \mathrm{GL}_n(A)^\wedge$$

とおく。この時,

- (U0) $\sigma, \tau \in \mathrm{GL}(\infty)^\wedge \implies \sigma \times \tau \in \mathrm{GL}(\infty)^\wedge$
- (U1) $\tau \in \mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{ds}}^\wedge \implies u(\tau; d) \in \mathrm{GL}(\infty)^\wedge$
- (U2) $\tau \in \mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{ds}}^\wedge \implies u(\tau; d, \alpha) \in \mathrm{GL}(\infty)^\wedge$
- (U3) $\tau \in \mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{eds}}^\wedge \implies u(\tau; d)$ is prime in R
- (U4) $\tau_i, \tau'_j \in \mathrm{GL}(\infty)_{\mathrm{eds}}^\wedge \implies Q(\tau_1 \times \cdots \times \tau_n) \times Q(\tau'_1 \times \cdots \times \tau'_m)$ は $Q(\tau_1 \times \cdots \times \tau_n + \tau'_1 \times \cdots \times \tau'_m)$ を 部分商として含む

但し, 上の (Un) では, Bernstein-Zelevinsky 積 $\times$ は, 既約商を取る前の 可約かも知れない ユニタリ放物誘導表現を指すと理解する。また, R は サブセクション 1.1 で Grothendieck 群の直和に $\times$ で積構造を入れた次数付き環である。

Hypothesis (U4) は, Langlands 分類の簡単な帰結として, Tadić 自身により示されている (For p -adic A : [Tad-06], For $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$: [Tad-09])。

Hypothesis (U2) は, Hypotheses (U0) と (U1) から 簡単に導かれる ([Tad-09])。

Hypothesis (U3) は, p -adic $\mathrm{div. alg.} A$ については [Tad-86] で, $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ については [Tad-09] で示されていた。残る $A = \mathbb{H}$ の場合は, [Ba-Re-10] に於いて解決された。

Hypothesis (U1) は, p -adic $\mathrm{fd.} F$ については [Tad-86] で示されていた。 p -adic $\mathrm{div. alg.} A$ については, [Bad-07] に於いて Global Method により 示されていた $u(\tau; d)$ に密接に関係する表現のユニタリ性を用いて, [Ba-Re-04] で解決された。複素数体 $F = \mathbb{C}$ 上では, $u(\tau; d)$ はユニタリ指標に過ぎないので, 自明である。実数体 $F = \mathbb{R}$ 上では, Global Method によ

⁴この部分は, [Ba-Re-10], p.1130-1131 に依る。

⁵これは, 通常 Irr^u と記されるものである。

り [Spe-83] で示されていた。また [Ba-Re-10] では [Vog-86] をリゾートする方法で別証を与えている。残る $A = \mathbb{H}$ の場合は, [Vog-86] と [Ba-Re-04] を併わせることで [Ba-Re-10] により示されている。

Hypothesis ($U0$) は, 最後まで残った難所であったが, p -adic $\text{fd.}F$ については Bernstein により早くから ([Ber-84]), mirabolic 部分群への reduction により示されていた。 $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ の場合にも, 或る技術的な予想を仮定すれば, Bernstein の議論は通用する。しかし, この予想は Kirillov 予想 ([Kir-62]) と呼ばれ, Baruch により解決される ([Bar-03]) まで 長い間 Distribution に関する難しい問題として, 知られていた。 p -adic $\text{div.alg.}A$ については, Barbasch-Moy の Hecke 環表現のユニタリ性と Sécherre の $\text{GL}_n(A)$ に対する 深い type 理論により, [Sec-09] で解決された。残る $A = \mathbb{H}$ の場合は, 書かれた文献は存在しないが, [Vog-86] から 導出できることは知られていた。また, 標数 p の場合 即ち関数体 F 上でも ($U0$), ..., ($U4$) は成り立つ ([B-H-L-S-10])。

$(Un) \backslash A$	p -adic F	$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	p -adic A	$\mathbb{H}$
($U0$)	<i>Bernstein</i> , 84	<i>Baruch</i> , 03	<i>Secherre</i> , 09	(<i>Vogan</i>)
($U1$)	<i>Tadic</i> , 86	<i>Speh</i> , 83, 自明	<i>Badulescu, Renard</i> , 04	<i>Badulescu, Renard</i> , 10
($U2$)	<i>Tadic</i> , 09	同左	同左	同左
($U3$)	<i>Tadic</i> , 86	<i>Tadic</i> , 09	<i>Tadic</i> , 86	<i>Badulescu, Renard</i> , 10
($U4$)	<i>Tadic</i> , 06	<i>Tadic</i> , 09	<i>Tadic</i> , 06	?????

3.2 Merits, demerits

ここでは, Vogan による分類と Tadić による分類のメリット/デメリットに着目して, 二つのアプローチの比較を記しておく。

Tadić's 分類

< Difficulties >

(1) Hyp. ($U0$) の証明: Killirov, Baruch

< Merits >

- (1) 保型留数表現の分類とパラレルな形: Glob. 問題への応用に有利
- (2) $/p$ -adic F とパラレルな形: p -adic で既知の証明が移植しやすい
- (3) Langlands 分類の観点から, L -因子の形が見やすい
- (4) generic unitary 表現のサブクラスが, 一目瞭然に判る

Vogan's 分類

< Difficulties >

- (1) almost sph'l なユニタリ表現のリストの Exhaustion
- (2) Stein 補系列からの cohom'l 誘導のパラメタが判らない

< Merits >

- (1) LLC, 特に Arthur パラメタの観点からは, unipotent 表現からの誘導は自然である
- (2) LLC の観点からの, L -因子が見やすい
- (2) Distinction: Functorial Lift の観点からは, パラメタの対応が容易に出来る

参考文献

- [Bad-07] Badulescu, A. I., Jacquet-Langlands et unitarisabilité, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), 349–379.
- [B-H-L-S-10] Badulescu, A. I.; Henniart, G.; Lemaire, B.; Sécherre, V., Sur le dual unitaire de $GL_r(D)$, Amer. J. Math. **132** (2010), 1365–1396.
- [Ba-Re-04] Badulescu, A. I.; Renard, D., Sur une conjecture de Tadić, Glas. Mat. **39(59)** (2004), 49–54.
- [Ba-Re-10] Badulescu, A. I.; Renard, D., Unitary dual of $GL(n)$ at Archimedean places and global Jacquet-Langlands correspondence, Compos. Math. **146** (2010), 1115–1164.
- [Ba-Mo-89] Barbasch, D.; Moy, A., A unitarity criterion for p -adic groups, Inv. Math. **98** (1989), 19–37.
- [Bar-03] Baruch, E.M., A proof of Kirillov’s conjecture, Ann. of Math. **158** (2003), 207–252.
- [Ber-84] Bernstein, J. N., P -invariant distributions on $GL(N)$ and the classification of unitary representations of GLN (non-Archimedean case), *Lie group representations II*, Lecture Notes in Math. **1041** (1984), 50–102.
- [Go-Hu-11] Goldfeld, D.; Hundley, J., *Automorphic representations and L -functions for the general linear group, Vol.II*, Cambridge Studies in Adv.Math. **130**, Cambridge Univ.Press (2011).
- [Ge-Na-83] Gelfand, I. M.; Neumark, M. A., *Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen*, Akademie-Verlag, (1957).
- [Kn-Vo-95] Knapp, A.W.; Vogan D.Jr., *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Univ. Press, (1995).
- [Kir-62] Kirillov, A.A., Infinite-dimensional representations of the complete matrix group, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), 37–39.
- [Sec-09] Sécherre, V., Proof of the tadic conjecture U0 on the unitary dual of $GL(m, D)$, J. Reine Angew. Math. **626** (2009), 187–204.

- [Spe-83] Speh, B., Unitary representations of $GL(n, \mathbb{R})$ with nontrivial (g, K) -cohomology, *Inv.Math.* **71** (1983), 443–465.
- [Ste-67] Stein, E. M., Analysis in matrix spaces and some new representations of $SL(N, \mathbb{C})$, *Ann.of Math.* **86** (1967), 461–490.
- [Tad-85] Tadić, M., Unitary representations of general linear group over real and complex field, preprint MPI/SFB **85-22** (1985).
- [Tad-86] Tadić, M., Classification of unitary representations in irreducible representations of general linear group (non-Archimedean case), *Ann.Sci.E.N.S.* **19** (1986), 335–382.
- [Tad-93] Tadić, M., An external approach to unitary representations, *Bull. A.M.S.* **28** (1993), 215–252.
- [Tad-06] Tadić, M., Representation theory of $GL(n)$ over a p -adic division algebra and unitarity in the Jacquet-Langlands correspondence, *Pacific J. Math.* **223** (2006), 167–200.
- [Tad-09] Tadić, M., $GL(n, \mathbb{C})^\wedge$ and $GL(n, \mathbb{R})^\wedge$, *Automorphic forms and L-functions II, Local aspects*, *Contemp.Math.* **489**, A.M.S. (2009), 285–313.
- [Vog-86] Vogan, D. Jr., The unitary dual of $GL(n)$ over an Archimedean field, *Inv.Math.* **83** (1986), 449–505.
- [Wal-84] Wallach, N.R., On the constant term of a square integrable automorphic form, *Operator algebras and group representations*, Vol. II, Pitman (1984), 227–237.