Unitary 表現 of 実簡約群 の 幾何実現*

—Borel-Weil-Bott, Narasimhan-岡本, Vogan-Wong—

石川 佳弘

Feb+Aug/2014

概 要

このノートでは，実簡約群の unitary 表現の幾何実現について 纏めておく。先ず, Vogan による 幾何学的量子化の哲学を思い出し, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の様に誘導する種となる L-加群 σ が有限次元の場合には, 定理となっていることを見る。次に, 軌道の哲学に基づき, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に付随する 楕円軌道を思い出す。その幾何学的不変量として, non-vanishing degreee S が解釈できることを見る。最後に, Narasimhan-岡本による 離散系列表現の幾何実現が, 特別な場合として復元されることを見る。

目 次

1 Vogan's conjecture on Geometric Quantization 2

2 Structure of Elliptic orbits 4

3 Discrete series case and Penrose transform 5

*SWS 2014『Structure of $L^2(H\backslash G)$ –local Galois case–』での概説講演の為に

このノートを通じて, G は $\mathbb{R}$ 上の簡約 Lie 群, K はその極大 compact 部分群とする。G の Lie 環 $\mathfrak{g}_0$ の複素化 $\mathfrak{g}$ の purely complex な (*i.e.* $\mathfrak{l} := \mathfrak{q} \cap \bar{\mathfrak{q}}$ が $\mathfrak{q}$ の Levi となる) 放物部分環 $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ に対して, $L := \mathrm{Stb}_{\mathrm{Ad}G}(\mathfrak{q})$ とする。

1 Vogan's conjecture on Geometric Quantization

<Algebraic Construction>

ユニタリ化可能な $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-加群 X に対して, 次の操作を施す。

Step 1. Extension by zero

$\mathfrak{l}$ を Levi パートとして含む θ-stable な放物部分環を $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ とすると, $\mathfrak{u}$-action を zero として延ばすことで,

$$X \ : \ (\mathfrak{q}, L \cap K)\text{-加群}$$

にする。

Step 2. Algebraic production

プロダクション函手 $\mathrm{pro}^{(\mathfrak{g}, L\cap K)}_{(\mathfrak{q}, L\cap K)}(*)$ により, $(\mathfrak{q}, L \cap K)$-加群 X から

$$Y_{\mathfrak{q}} \ := \ \mathrm{Hom}_{\mathfrak{q}}\big(U(\mathfrak{g}), X\big)_{(L\cap K)\text{-fin}} \ \cong \ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\big(U(\bar{\mathfrak{u}}), X\big)_{(L\cap K)\text{-fin}}$$

という $(\mathfrak{g}, L \cap K)$-加群を作る。

Step 3. Derived functor

Zuckerman の導来函手 $\big(\Gamma^{(\mathfrak{g}, K)}_{(\mathfrak{g}, L\cap K)}\big)^i(*)$ により, $(\mathfrak{g}, L \cap K)$-加群 $Y_{\mathfrak{q}}$ から

$$\mathcal{R}^i_{\mathfrak{q}} X \ := \ \big(\Gamma^{(\mathfrak{g}, K)}_{(\mathfrak{g}, L\cap K)}\big)^i(Y_{\mathfrak{q}})$$

と, $(\mathfrak{g}, K)$-加群を作る。

Note：X が 一次元加群 $\mathbb{C}_{\lambda+\rho_{\mathfrak{u}}}$ の場合が, 所謂 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$-加群である；

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \ := \ \mathcal{R}^{\dim_{\mathbb{C}}(\mathfrak{u}\cap\mathfrak{p}_{\mathbb{C}})}_{\mathfrak{q}}\big(\mathbb{C}_{\lambda+\rho_{\mathfrak{u}}}\big)$$

この $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$-加群の重要性は, 志村 variety の数論の礎となる

Theorem 1.1 ([Wall-84]) 任意の *cohomological* ユニタリ化可能表現は, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$-加群の *globalization* である；

$$\forall \pi \in G^{\wedge}_{\mathrm{coh}} \cap G^{\wedge}, \qquad \pi^{\infty}_K \ \cong \ A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$$

に留まらず, Ft'l.lift を制御する H-dist'd 表現達のメインパートを占めている；

Theorem 1.2 ([Oh-Ma-84], [HMSW-87]) *Symmetric pair* (G, H) に対して, $H\backslash G$ の 任意の離散系列表現は, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$-加群の *globalization* である；

$$\forall \pi \subset L^2_{\mathrm{disc}}(H\backslash G), \qquad \pi^{\infty}_K \ \cong \ A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$$

<**Geometric Construction**>

L の ユニタリ表現 (σ, V_σ) に対して, 次の操作を施す。

Step 1. Borel embedding

(σ, V_σ) から, elliptic 軌道 $\mathcal{O}_\lambda^*$ 上に G-同変 Hilbert bdl. を

$$\begin{array}{ll} \mathcal{V}_\sigma & := G \times_L V_\sigma \\ \downarrow & \\ \mathcal{O}_\lambda^* & := G/L \end{array}$$

と構成する。一般化 Borel 埋込み $G/L \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/Q$ により, flag var. $G_{\mathbb{C}}/Q$ の複素構造を引き戻して

$$\begin{array}{ll} \mathcal{V}_\sigma & : \text{正則 bdl.} \\ \downarrow & \\ \mathcal{O}_\lambda^* & \end{array}$$

を得る。但し, $\dim_{\mathbb{C}} V_\sigma = \infty$ の時には, $\mathcal{V}_\sigma$ に 正則な局所自明化が存るかどうかは判らない事に注意せよ。

Step 2. Formal power section

正則 bdl. $\mathcal{V}_\sigma$ の $(L \cap K)$-fin. な formal power sr. 正則切断を採ると

$$Y_{\mathfrak{q}} \;\cong\; \Gamma_{\mathrm{fml}}\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{V}_\sigma\big)_{(L\cap K)\text{-fin}} \;\subset\; H^0\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{V}_\sigma\big)$$

と 大域正則切断の空間に alg. proj'n. $Y_{\mathfrak{q}}$ が実現できる。

Step 3. Derived functor

elliptic 軌道 $\mathcal{O}_\lambda^*$ の base spc.$K/(L \cap K)$ は Stein なので, 次の injection

$$H^0\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{V}_\sigma\big)_{K\text{-fin}} \;\hookrightarrow\; \big(\Gamma_{(\mathfrak{g}, L\cap K)}^{(\mathfrak{g}, K)}\big)^0(Y_{\mathfrak{q}})$$

は 同型を与えるであろう。そこで, 両辺の i 次導来を採って

Conjecture 1.3 ([Vog-93], Conj.2.13) .

$$H^i\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{V}_\sigma\big)_{K\text{-fin}} \;\cong\; \mathcal{R}_{\mathfrak{q}}^i X$$

が成り立つだろう と信じられている。実際, fibre が有限次元の場合には正しい。

Theorem 1.4 (Vogan, [Wong-95]) .

finite length な $(\mathfrak{l}, L \cap K)$-加群 X が, 有限次元ならば, 上の *Conj.* は成り立つ。

特に, X が 一次元加群 $\mathbb{C}_{\lambda+\rho_{\mathfrak{u}}}$ の時, 付随する G-同変 *bdl.* を 直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ と書くと

$$H_{\bar\partial}^{0,S}\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{L}_\lambda\big)_K^\infty \;\cong\; A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \tag{1.1}$$

となり, *Dolbeaut cohom.* $H_{\bar\partial}^{0,S}\big(\mathcal{O}_\lambda^*, \mathcal{L}_\lambda\big)$ は $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ の *maximal global'zn.* を与える。 □

但し, S については 次のセクションで説明する。

2 Structure of Elliptic orbits

今, G は簡約 Lie 群としているので, Killing form $B(X_\lambda, Y) := \lambda(Y)$ により, Lie 環 と その双対は同一視できる；

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}^* & \cong & \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}G \\ \lambda & \mapsto & X_\lambda \end{array}$$

この両辺に, G は adjoint/co-adjoint 作用している。各々の軌道は,

$$\mathcal{O}^*_\lambda := \mathrm{Ad}^*(G).\lambda \ \cong \ G/L_\lambda, \qquad \mathcal{O}_{X_\lambda} := \mathrm{Ad}(G).X_\lambda \ \cong \ G/L_{x_\lambda}$$

と, $L_{X_\lambda} := \mathrm{Stb}_{\mathrm{Ad}G}(X_\lambda)$ を用いて 対称空間と見做せる。

言葉： $X_{\sqrt{-1}\lambda} \in \mathfrak{g}$ が elliptic 即ち,

$$\mathrm{ad}(X_{\sqrt{-1}\lambda}) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ の } \forall \text{ 固有値} \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$$

となる時, $\sqrt{-1}\lambda \in \mathfrak{g}$ ：は elliptic であるといい, $\mathcal{O}^*_\lambda$ を elliptic 軌道と呼ぶ。 ■

elliptic 軌道 $\mathcal{O}^*_\lambda$ は, その決め方により,

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{l}) & \hookrightarrow & \mathcal{O}^*_\lambda = G.(eQ) & \hookrightarrow & G_{\mathbb{C}}/Q \ \text{：複素 fl.var.} \\ & & \downarrow & & \\ & & K/(L \cap K) & \cong & K_{\mathbb{C}}/P_{K_{\mathbb{C}}} \end{array}$$

という vector bdl. 構造を持つ。

前セクション最後の Theorem 中に現れる S は, elliptic 軌道 $\mathcal{O}^*_\lambda$ の fibre の次元である。また, base spc. の次元を R と書くことが慣例である;

$$\begin{array}{rcl} S & := & \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{l}), \\ R & := & \dim_{\mathbb{C}} K/(L \cap K) \end{array}$$

ここで, $\mathcal{O}^*_\lambda = G.(eQ) \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/Q$ は, 一般化 Borel 埋込みであるが, 全て の elliptic 軌道 は 複素 fl.var. の G-軌道として得られることに注意せよ；

Proposition 2.1 任意の複素 *flag variety* $G_{\mathbb{C}}/P$ に対し, $G_{\mathbb{C}}$ の実型 G に依る左作用による軌道分解を

$$G \backslash \left(G_{\mathbb{C}}/P_{G_{\mathbb{C}}}\right) \ = \ \mathcal{O}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{O}_k$$

とする時, k は有限で *open* 軌道 $\mathcal{O}_i$ は 必ず *elliptic* 軌道になる。 □

Example： $G_{\mathbb{C}}$ として $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $P_{G_{\mathbb{C}}}$ として その Borel $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}$, 実型 G として sprit form $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を採ると,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{球面} & = & \text{上半球} & \cup & \text{赤道} & \cup & \text{下半球} \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} & & D^2 & & S^1 & & \\ \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\left[\begin{smallmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{smallmatrix}\right]\} & & \mathrm{SU}(1,1)/K & & \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/B & & \end{array}$$

3 Discrete series case and Penrose transform

このセクションでは, G は離散系列表現 D_Λ を持つとする。即ち, Harish-Chandra criterion により, rank$G$ = rank$K$ とする。この時,

Fact： $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ が 離散系列 D_Λ の Harish-Chandra 加群になるのは, θ-stb.parabolic $\mathfrak{q}$ が Borel になる時, またその時に限る；$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \cong (D_\Lambda)_K^\infty \iff \mathfrak{q} \cong \mathfrak{b}$ ■

が知られている。$\mathfrak{q} \cong \mathfrak{b}$ なので, L は 極大 sprit torus T になり, elliptic 軌道 $\mathcal{O}_\lambda^*$ は G/T となる。今 $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ を考えているので, $\mathcal{O}_\lambda^*$ 上には line bdl. $\mathcal{L}_\lambda$ が立っている。また, non-vanishing degree $S = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}/(\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{t})$ は ??? と分かる。

従って, Vogan-Wong の幾何実現 (1.1) は この場合

$$H_{\bar\partial}^{0,??}\big(G/T, \mathcal{L}_\lambda\big) \ \cong\ D_\Lambda$$

となり, Narasimhan-岡本 [Na-Ok-70] を復元する。

T の表現 $\mathbb{C}_{\lambda+\rho}$ のパラメタ λ と D_Λ の Harish-Chandra パラメタ Λ の関係 ???

$<$ **松木 duality**$>$

Example： $G_{\mathbb{C}}$ として $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $P_{G_{\mathbb{C}}}$ として その Borel $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{R}_>^\times\}$, 実型 G として sprit form $\mathrm{SU}(1,1) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ を採ると, $K_{\mathbb{C}}$ は $\{\mathrm{diag}(a, a^{-1}) \mid a \in \mathbb{R}_>^\times\}$ となり, $G_{\mathbb{C}}/P_{G_{\mathbb{C}}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ は 球面 X となり, G-作用分解 と $K_{\mathbb{C}}$-作用分解は,

$$\begin{array}{ccccccc} G\backslash X & = & \text{上半球} & \cup & \text{赤道} & \cup & \text{下半球} \\ & & | & & | & & | \\ K_{\mathbb{C}}\backslash X & = & \text{北極点} & \cup & \text{dense} & \cup & \text{南極点} \end{array}$$

と対応している。

参考文献

[HMSW-87] Hecht, H.; Miličić, D.; Schmid, W.; Wolf, J., Localization and standard modules for real semisimple Lie groups I, The duality theorem, Inv.Math. **90** (1987), 297–332.

[Kn-Vo-95] Knapp, A.W.; Vogan D.Jr., *Cohomological induction and unitary representations*, Princeton Univ. Press, (1995).

[Na-Ok-70] Narasimhan, M. S.; Okamoto, K., An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type, Ann.of Math.**91** (1970) 486–511.

[Oh-Ma-84] Oshima, T.; Matsuki, T., A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, *Group representations and systems of differential equations* (Tokyo, 1982), 331 〓 390, Adv.Stud.Pure Math. **4** (1984), 331–390.

[Vog-86] Vogan, D. Jr., The unitary dual of GL(n) over an Archimedean field, Inv.Math. **83** (1986), 449–505.

[Vog-93] Vogan, D. Jr., Unipotent representations and cohomological induction, *The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory* Contemp. Math. **154** (1993), 47–70.

[Wall-84] Wallach, N.R., On the constant term of a square integrable automorphic form, *Operator algebras and group representations* Vol.II Pitman (1984), 227–237.

[Wong-95] Wong, Hon-Wai, Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations, J. Funct. Anal. **129** (1995), 428–454.