

$U_{E/F}(2n+1)$ の L -因子 と Stable Base Change *

—Kim-Krishnamurthy, Cogdel-PS-Shahidi—

石川 佳弘

Apr/2011

概要

このノートでは、奇数サイズの quasi-split ユニタリ群 $U_{E/F}(n, n+1)$ の 不分岐 L -因子の定義の仕方について纏めておく。前半では、不分岐表現 π° に対して、佐武パラメタ $A(\pi^\circ)$ を Weil 群 W_F の作用込みの L -群 ${}^L(G')$ 標準表現で送ることで、直接に定義する方法を見る。後半では、stable Base Change により、 $\text{Res}_{E/F}\text{GL}(2n+1)$ の Standard 局所 L -因子として定義する方法を扱う。

目次

1 ユニタリ群 と その L-群	2
1.1 群の実現	2
1.2 G' の L -群	2
2 不分岐 L-因子	4
2.1 不分岐表現	4
2.2 不分岐 L -因子	5
3 Stable Base Change	6
3.1 L -homomorphism	6
3.2 L -因子 by Base Change	6

このノートは、次のペイパーから 抜き書き 整理したものに、適宜 コメントを付したものである。

- Kim-Krishnamurthy, Stb.BC lift from unitary gps to $\text{GL}(n)$, IMRP (2005).
- Kim-Krishnamurthy, BC lift for odd unitary gps, Aarhus Univ.Various Publ.Ser. (2004).
- Cogdel-PS-Shahidi, Fl'ty for the quasisplit classical gps., Clay Math.Proc.(2011).

*quasi-split 群の L -群の理解と整理の為に

1 ユニタリ群 と その L -群

1.1 群の実現

E/F 上の $2n+1$ 変数 Hermite 形式を 次の反対角行列で実現する。

$$J := \left[\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & +1 \\ & & & & +1 & \ddots \\ & & & & & \ddots \\ & & & 1 & & \\ \hline & & -1 & & & \\ & -1 & \ddots & & & \\ & & & & & \end{array} \right]$$

$$\mathrm{U}_{E/F}(n, n+1) \quad := \quad \{g \in \mathrm{GL}_{2n+1}(E) \mid {}^t \bar{g} J g = J\}$$

1.2 G' の L -群

F の Weil 群 W_F は, $W_F \twoheadrightarrow W_E/W_F \cong \text{Gal}(E/F)$ を通じて, 複素一般線形群 GL_{2n+1} に

$$(1.1) \quad {}^\sigma g \quad := \quad J^{-1}({}^t g^{-1})J$$

$$\sigma: \begin{pmatrix} \circ & - & \circ & - \cdots - & \circ & - & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_{n-1} & & \alpha_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \circ & - & \circ & - \cdots - & \circ & - & \circ \\ \alpha_n & & \alpha_{n-1} & & \alpha_2 & & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

¹ G' にダッシュを付けているのは, §3 で $\text{Res}_{E/F} \text{GL}(2n+1)$ を G とする為である。

<L-群の def.>

今, G' は A_{2n} -型なので, 双対群の型は変わらず

$${}^L(G')^\circ = \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{C})$$

なので, L -群は

$${}^L G' := {}^L(G')^\circ \rtimes W_F = (\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{C}); \times) \rtimes (W_F; \cdot)$$

となる。

Note : 半直積の定義により, $(g, e)(1, \sigma) = (g \times {}^e 1, e \cdot \sigma) = (g, \sigma)$ であるが, $(1, \sigma)(g, e) = (e \times {}^\sigma g, \sigma \cdot e) \neq (g, \sigma)$ となっている事に注意せよ。 ■

<L-群の Std.rep.>

双対群 ${}^L(G')^\circ$ の 1st fundamental representation

$$\rho : {}^L(G')^\circ \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho)$$

は, tautological 表現 $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho) = \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{C})$ である。この (ρ, V_ρ) を使って, L -群の標準表現を

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \text{Std} : {}^L(G')^\circ \rtimes W_F &\longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho \times V_\rho) \\ (g, e) &\mapsto [(v_1, v_2) \mapsto (g \cdot v_1, {}^\sigma g \cdot v_2)] \\ (1, \sigma) &\mapsto [(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)]: \text{入替} \end{aligned}$$

により定める。

$\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho) = \mathrm{GL}_N(\mathbb{C})$ ($N = 2n + 1$ と略記した) により, $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(V_\rho \times V_\rho)$ を $\mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{C})$ と同一視すると,

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \text{Std} : {}^L G' &\longrightarrow \mathrm{GL}_{2N}(\mathbb{C}) \\ (g, e) &\mapsto \left[\begin{array}{c|c} g & \\ \hline & \sigma g \end{array} \right] \\ (1, \sigma) &\mapsto \left[\begin{array}{c|c} & 1_N \\ \hline 1_N & \end{array} \right] \\ (g, \sigma) &\mapsto \left[\begin{array}{c|c} & g \\ \hline \sigma g & \end{array} \right] \end{aligned}$$

と表示できる。

2 不分岐 L -因子

ここでは, G' の不分岐表現 $(\pi')^\circ$ の佐武パラメタを 標準表現 Std で送ることで, 直接的に $(\pi')^\circ$ の L -因子を定める方法を見る。

2.1 不分岐表現

<Torus>

$G' = U_{E/F}(n, n+1)$ の 極大 F -分裂トーラスは,

$$T_d := \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & & \\ & & & 1 & \\ & & & & a_n^{-1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a_i \in F^\times \right\}$$

となるが, その中心化群を

$$T := \left\{ t = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_n & & \\ & & & b & \\ & & & & a_n^{-1} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & a_1^{-1} \end{bmatrix} \mid a_i \in E^\times, b \in E^{(1)} \right\} = Z_G(T_d)$$

と書くと, これは G' の Borel 部分群 B に含まれる。

<Unramified PS>

$E^\times$ の不分岐指標 χ_i と $E^{(1)}$ の不分岐ユニタリ指標 χ_0 により, T の表現を

$$\begin{aligned} \underline{\chi}: T &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ t &\mapsto \chi_1(a_1) \cdots \chi_n(a_n) \times \chi_0(b) \end{aligned}$$

と定め, これを B に自明に伸ばす。そのユニタリ放物誘導 $\text{Ind}_B^{G'}(\underline{\chi} \otimes \delta_B^{1/2})$ を, G の **不分岐主系列表現** と言うのであった。

<佐武 parameter>

$G' = U_{E/F}(n, n+1)$ の任意の不分岐表現 $(\pi')^\circ$ は, 或る不分岐主系列に含まれる;

$$(G')^\wedge_{\text{sphl}} \ni \forall (\pi')^\circ \hookrightarrow \text{Ind}_B^{G'}(\underline{\chi} \otimes \delta_B^{1/2})$$

χ_i 達の入替えを除いて, 表現 $\underline{\chi}$ は $(\pi')^\circ$ から **一意** に定まる。この埋め込みにより $(\pi')^\circ$ の **佐武パラメタ** が

$$A(\pi'^\circ) := \begin{bmatrix} \chi_1(\varpi) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \chi_n(\varpi) & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \in {}^L(G')^\circ / \sim$$

と定まる。

Note : 佐武パラメタに, $E^{(1)}$ のユニタリ指標 χ_0 は, 関与しないことに注意。 ■

2.2 不分岐 L -因子

$G' = \mathrm{U}_{E/F}(n, n+1)$ の不分岐表現 $(\pi')^\circ$ に対して, その L -因子を

$$L(s; \pi'^\circ, \mathrm{Std}) := \det \left(1_{\mathrm{Std}} - \mathrm{Std}(A(\pi'^\circ), \sigma) q^{-s} \right)^{-1}$$

と定める。

Note : 上の定義中の q は F の剰余体位数であり, E のものではない。 ■

ここで, (1.3) により,

$$\mathrm{Std}(A(\pi'^\circ), \sigma) = \left[\begin{array}{c|c} \sigma A & A \\ \hline \sigma A & \end{array} \right] \in \mathrm{GL}_{2(2n+1)}(\mathbb{C})$$

であるが, (1.1) により,

$$\sigma A(\pi'^\circ) := J^{-1}({}^t A(\pi'^\circ)^{-1})J = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & 1 & & \\ & & & & \chi_n(\varpi)^{-1} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \chi_1(\varpi)^{-1} \end{array} \right]$$

となるので, 不分岐 L -因子は,

$$\begin{aligned} L(s; \pi'^\circ, \mathrm{Std}) &= \det \left(1_{\mathrm{Std}} - \left[\begin{array}{c|c} \sigma A & A \\ \hline \sigma A & \end{array} \right] q^{-s} \right)^{-1} \\ &= (1 - \chi_1(\varpi) q^{-2s})^{-1} \cdots (1 - \chi_n(\varpi) q^{-2s})^{-1} \\ &\quad \times (1 - q^{-2s})^{-1} \\ &\quad \times (1 - \chi_n(\varpi)^{-1} q^{-2s})^{-1} \cdots (1 - \chi_1(\varpi)^{-1} q^{-2s})^{-1} \\ (2.1) \quad &= L(2s; \chi_1) \cdots L(2s; \chi_n) \times \zeta_E(s) \times L(2s; \chi_n^{-1}) \cdots L(2s; \chi_1^{-1}) \end{aligned}$$

と計算される。ここで, E/F は不分岐二次拡大なので, q^2 は E の剰余体位数 q_E と見做せるので, 真ん中の因子は E の Dedekind ζ -関数の Euler 因子となる。²

²以上の計算は, $n = 1$ 即ち $G' = \mathrm{U}_{E/F}(1, 2)$ の場合に [Ge-PS] §4.8 で説明されている。

3 Stable Base Change

ここでは、 G' の表現を stable Base Change map で $\text{Res}_{E/F}GL(2n+1)_{\text{adm}}^{\wedge}$ に送ることで、間接的に $(\pi')^{\circ}$ の L -因子を定める方法を見る。

3.1 L -homomorphism

<Weil restriction>

不分岐二次拡大 E/F に関する Weil restriction $\text{Res}_{E/F}GL(2n+1)$ を G とおく。その双対群は

$${}^L G^{\circ} := GL_{2n+1}(\mathbb{C}) \times GL_{2n+1}(\mathbb{C})$$

となる。 ${}^L G^{\circ} = \text{Aut}_{\mathbb{C}}(V_{\rho} \times V_{\rho})$ となっている事に注意すると、ユニタリ群 G' の L -群の標準表現 (1.2) は、

$$(3.1) \quad \text{Std} : {}^L G'^{\circ} \rtimes W_F \longrightarrow {}^L G^{\circ}$$

と E 上の一般線形群 G の双対群への射と見做せる。

< L -群の def.>

Weil 群 W_F は、 $W_F \twoheadrightarrow W_E/W_F \cong \text{Gal}(E/F)$ により、 ${}^L G^{\circ} = GL_{2n+1}(\mathbb{C}) \times GL_{2n+1}(\mathbb{C})$ に

$$\sigma(g_1, g_2) := (g_2, g_1)$$

と入替えにより involutive に作用する。この作用により、 G の L -群を

$${}^L G := (GL_{2n+1}(\mathbb{C}) \times GL_{2n+1}(\mathbb{C})) \rtimes W_F$$

と定める。

<Base Change map>

(3.1) の標準表現 Std を

$$\begin{aligned} \text{stBC} : {}^L G'^{\circ} \rtimes W_F &\longrightarrow {}^L G^{\circ} \rtimes W_F \\ (g, w) &\mapsto [(g, {}^{\sigma}g), w] \end{aligned}$$

と伸ばすと L -準同型になる。この射を stable Base Change map と呼ぶ。

3.2 L -因子 by Base Change

<Base Change lift>

ユニタリ群 $U_{E/F}(n, n+1)$ に対して、局所 Langlands 対応 (LLC) が成り立つと仮定する。即ち、「 L -パラメタ $(\phi' : W_F \rightarrow {}^L G') \in \Phi(G')$ 毎に admissible dual $(G')_{\text{adm}}^{\wedge}$ の有限部

分集合 Π_ϕ が定まり, $(G')_{\text{adm}}^\wedge$ は Π_ϕ 達の disjoint union に分かれる」とする。さすれば, G' の admissible 表現 π' は 或る L -パッケージ Π_ϕ に属するので, L -パラメタ $\phi_{\pi'}$ が定まる。

$$(G')_{\text{adm}}^\wedge \ni \pi' \implies (\phi_{\pi'} : W_F \rightarrow {}^L G') \in \Phi(G')$$

$\phi_{\pi'}$ に stable Base Change map $stBC$ を繋ぐと, L -準同型 ϕ を得るが, これは E 上の一般線形群 G の L -パラメタ $(\phi : W_F \rightarrow {}^L G' \rightarrow {}^L G) \in \Phi(G)$ になっている。一般線形群に対しては (LLC) が成り立つので, ϕ から G の L -パッケージ Π_ϕ を得る。ところが, 一般線形群の L -パッケージは 常に singleton なので, ϕ から G の admissible 表現 π が定まる。

$$G_{\text{adm}}^\wedge \ni \pi \iff (\phi : W_F \rightarrow {}^L G) \in \Phi(G)$$

この場合, π と ϕ は 一対一対応なので, ϕ を ϕ_π と記す。模式的に描けば,

$$\begin{array}{c|c} (\text{Res}_{E/F} \text{GL}_{2n+1})_{\text{adm}}^\wedge \ni \pi & \phi_\pi : W_F \rightarrow {}^L G \\ \uparrow \text{red} & \uparrow stBC \\ (U_{E/F}(n, n+1))_{\text{adm}}^\wedge \ni \pi' & \phi_{\pi'} : W_F \rightarrow {}^L G' \end{array}$$

ということである。この様にして得られる π を π' の **stable Base Change lift** と呼び,

$$\pi = stBC(\pi')$$

と書く。

<Unramified lift>

出発点である admissible 表現 $\pi' \in (G')_{\text{adm}}^\wedge$ が 不分岐であれば, G' の (LLC) は確立されている。実際, $\pi'^\circ \in (G')_{\text{sphl}}^\wedge$ の 佐武パラメタを $A(\pi'^\circ)$, F の Frobenius 元を Fr とすると, π'° の L -パラメタは

$$\begin{aligned} \phi_{\pi'^\circ} : W_F &\rightarrow {}^L G'^\circ \rtimes W_F \\ Fr &\mapsto (A(\pi'^\circ), \sigma) \end{aligned}$$

で与えられる。

$\phi = stBC \cdot \phi_{\pi'^\circ}$ に対応する G の 不分岐表現を $\pi^\circ = stBC(\pi'^\circ)$ と書く。

<佐武 parameter> Base Change map $stBC$ の決め方より,

$$(3.2) \quad G_{\text{sphl}}^\wedge \ni \pi^\circ \hookrightarrow \text{Ind}_{B_{GL}}^{\text{GL}_N(E)}(\chi_1, \dots, \chi_n; \chi_0; \chi_n^{-1}, \dots, \chi_1^{-1}) \otimes \delta_{B_{GL}}^{1/2}$$

と埋まっている。出発点である $\pi' \in (G')_{\text{adm}}^\wedge$ は,

$$(G')_{\text{sphl}}^\wedge \ni \pi'^\circ \hookrightarrow \text{Ind}_B^{G'}(\chi_1, \dots, \chi_n; \chi_0) \otimes \delta_B^{1/2}$$

と埋まっていたのと比較すると, Base Change map の働きが よく解る。

埋め込み (3.2) により, Base Change 像 $\pi^\circ = stBC(\pi'^\circ)$ の 佐武パラメタは,

$$(3.3) \quad A(stBC(\pi'^\circ)) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \chi_1(\varpi_E) \\ \vdots \\ \chi_n(\varpi_E) \end{matrix} & \\ \hline & 1 \end{array} \right] \in {}^L G^\circ / \sim$$

$$\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} \bar{\chi}_n(\varpi_E)^{-1} \\ \vdots \\ \bar{\chi}_1(\varpi_E)^{-1} \end{matrix} \end{array} \right]$$

と判る。

Note: Base Change 像 $\pi^\circ = \text{stBC}(\pi'^\circ)$ は $\text{GL}_{2n+1}(E)_{\text{sphl}}^\wedge$ の元なので, uniformizer は E の ϖ_E で書かれていることに注意。 ■

<Unramified L -factor>

$G = \text{GL}_{2n+1}(E)$ の不分岐表現 π° の L -因子は

$$L(s; \pi^\circ, \text{Std}_{GL}) := \det \left(1_{\text{Std}} - \text{Std}_{GL}(A(\pi^\circ)) q_E^{-s} \right)^{-1}$$

と定義するのであった。

(3.3) により, Base Change 像となっている $\pi^\circ = \text{stBC}(\pi'^\circ)$ の L -因子は,

$$\begin{aligned} L(s; \text{stBC}(\pi^\circ), \text{Std}_{GL}) &= \det \left(1_{\text{Std}} - \text{Std}_{GL}(A(\text{stBC}(\pi'^\circ))) q_E^{-s} \right)^{-1} \\ &= (1 - \chi_1(\pi_E) q_E^{-s})^{-1} \cdots (1 - \chi_n(\pi_E) q_E^{-s})^{-1} \\ &\quad \times (1 - q_E^{-s})^{-1} \\ &\quad \times (1 - \chi_n(\overline{\pi_E})^{-1} q_E^{-s})^{-1} \cdots (1 - \chi_1(\overline{\pi_E})^{-1} q_E^{-s})^{-1} \\ &= L_E(s; \chi_1) \cdots L_E(s; \chi_n) \times \zeta_E(s) \times L_E(s; \overline{\chi_n}^{-1}) \cdots L_E(s; \overline{\chi_1}^{-1}) \end{aligned}$$

と計算される。

Note: 指標 χ_i は, $F^\times$ の不分岐指標なので, $\overline{\chi_i} = \chi_i$ であることに注意。 ■

更に $q_E = q^2$ であることに注意して, $L_E(s; \chi_i)$ を F の L -因子で書き直せば,

$$L(s; \text{stBC}(\pi^\circ), \text{Std}_{GL}) = L(2s; \chi_1) \cdots L(2s; \chi_n) \times \zeta_E(s) \times L(2s; \chi_n^{-1}) \cdots L(2s; \chi_1^{-1})$$

となり, サブセクション 2.2 で得られた L -因子 (2.1) と一致する。³

参考文献

- [Co-PS-Sh] Cogdell, J.; Piatetski-Shapiro, I.; Shahidi, F., Functoriality for the quasisplit classical groups, in *On certain L -functions*, Clay Math.Proc.**13**, (2011), 117–140.
- [Ge-PS] Gelbart, S.; Piatetski-Shapiro, I., Automorphic forms and L -functions for the unitary group, in *Lie group representations II* LNM. **1041** Springer (1984), 141–184.
- [Ki-Kr-1] Kim, H.; Krishnamurthy, M., Stable base change lift from unitary groups to $\text{GL}(n)$, IMRP no.1 (2005), 1–52.
- [Ki-Kr-2] Kim, H.; Krishnamurthy, M., Base change lift for odd unitary groups, in *Functional analysis VIII*, Various Publ.Ser.**47**, Aarhus Univ.(2004), 116–125.

³以上の計算は, $n = 1$ 即ち $G' = U_{E/F}(1, 2)$ の場合に [Ge-PS] §4.9 で説明されている。