$\mathrm{GL}_n(E)$ の H-distinguished 表現*

—dist'dness, ft'l lift and L-value/pole—

石川 佳弘

Feb+Aug/2011 + Nov/2013

概 要

このノートでは, $\mathrm{GL}_n(E)$ の H-distinguished 表現 について纏めておく。前半では, $H = \mathrm{GL}_n(F)$ の場合に, unitary Base Change と $\mathrm{GL}_n(F)$-dist'd 性, 浅井 L-dichotomy について, Sp, SO からの函手リフトと対比しながら, 既知の事実を記録しておく。後半では, $H = \mathrm{U}_{E/F}(n)$ の場合に, 二次 Base Change と $\mathrm{U}_{E/F}(n)$-dist'd 性 の関係について概観する。

目 次

.

このノートは, 主に 次のペイパーたちを参考に H-distinguished 表現について, 思想的背景 知られている結果などを 整理したものである。

- J.Getz, Automorphic Representations, §13–18, Lec. Note on Math 726 at McGill (2010).
- O.Offen, Unitary periods, slide at Goa Conf.(2010).
- E.Lapid, Unitary periods and distinction; rep'n-theoretic aspects, Oberwolfach report, March (2011).
- 宇沢 達, Functoriality for dist'd rep's and the rel. tr. formula, SS 3 (1995)

*等質空間 G/H 上の保型表現論に関する Jacquet's Philosophy の 雛形として

1 H-distinguished 表現 と Jacquet's Philosophy

ここでは 一般的状況設定の後に, G/H 上の保型表現論に関する Jacquet's Philosophy を述べ, 続くセクションで採り上げる 典型的な例を概観する。

E を p-進体, $\underline{G}$ を E 上定義された連結簡約代数群とする。Zariski 閉部分群 $\underline{H} \subset \underline{G}$ としては, $\underline{G}$ の involution ι による固定点 $\underline{H} := \underline{G}^{\iota}$ を採る。E-valued points $\underline{G}(E)$ を G と略記する。この時

Definition 1.1 .
G の 既約 smooth 表現 π が H-distinguished であるとは, V_π 上に H-不変線型形式が存在する：

$$\mathrm{Hom}_H(\pi|_H, 1) \;\neq\; \{0\}$$

ことである。 ■

等質空間 G/H 上の調和解析に於いて, H-distinguished 表現が 基本的対象であることは明らかであろう。実際, 上の概念は (G, H) が Gelfand ペア[1]でない時にも $L^2(G/H)$ に現れる G-表現 π を捉えようとしている。

この概念には, 大域的設定で 次の様な対応物が在る。

E を代数体, $\underline{G}$ を E 上定義された連結簡約代数群, $\underline{H}$ は 上と同様に $\underline{H} := \underline{G}^{\iota}$ とする。$G(E)$, $H(E)$ は E-valued points, $G(\mathbb{A})$, $H(\mathbb{A})$ は アデール群とする。

Definition 1.2 .
$G(\mathbb{A})$ の 既約カスプ保型表現 π が H-distinguished であるとは, V_π 上で H-period

$$\mathcal{P}_H(\varphi) \;:=\; \int_{H(E)\backslash H(\mathbb{A})} \varphi|_H(h)\, \mathrm{d}h$$

が 非自明である (i.e. $\mathcal{P}_H(\varphi) \neq 0$ なる $\varphi \in V_\pi$ が存在する) ことである。 ■

Note：Jacquet 達による Relative Trace Formula の研究から, "大域 H-distinguished 性をコントロールする H-period は, 局所積分の Euler 積 の L-特殊値倍 に分解し, 各局所積分が $\mathrm{Hom}_H(\pi|_H, 1)$ の元を与えるであろう" と期待されている。$G = \mathrm{GL}(n)$, $H = \mathrm{U}_{E/F}(n)$ の場合には, [Fe-La-Of-11] により 完全に解決された。

H-distinguished 表現は, 単なる G/H 上の調和解析的興味を越えて, 保型表現論に於いて 重要な研究対象と目されている。次の Jacquet's Philosophy は, その思想的裏付けとなっている。

[1]群 G とその部分群 H のペア (G, H) が Gelfand であるとは, 任意の既約許容表現 π に対して, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_H(\pi|_H, 1) \leq 1$ が成り立つことである。後述の Typical cases のうち, Case(1), Case(2), Case(5) は, Gelfand ペアになっている ([Hak-91],[Ja-Ra-96],[He-Ra-90]) ことが知られている。$F = \mathbb{R}$ の場合にも, Aizenbud, Gourevitch, Sayag により, これらのペアが Gelfand であることが示されている。

Conjecture 1.3 (Jacquet's Philosophy on H-distinction) .
π が G の（又は $G(\mathbb{A})$ の）*H-distinguished* 表現であれば, H と (ι と) 関連する $G^\vee$ の部分群 $(G')^\vee$ が存在して, π は G' からの（又は $G'(\mathbb{A})$ からの）適切な *Functorial Lift* 像になっているであろう。 □

模式的に描いてみると

代数群		表現の移送		双対群の関係
G	$\supset H$	π/G	: H-dist'd	$G^\vee$
$\uparrow$		$\uparrow$		$\cup$
G'		$\exists\,\tau/G'$	: Lift to π	$(G')^\vee$

ということ[2]である。

<**Two approaches**>
この問題には, 大きく分けて 二つのアプローチがある。其々の長所と併せて記しておく。

(A) Rel.Tr.Formula (Glob) : H-period と L-values を結び付ける主たる手段

(B) L-ft'n. Method (Glob/Loc) :
(B-1) Rankin-Selberg 法 : H-period と H-dist'd 性 との橋渡しに適している
(B-2) Langlands-Shahidi 法 : L-poles と Ft'l Lift との橋渡しに有効である

<**Coincidence of L-factors**>
Mathod(B) から派生する問題 :「Rankin-Selberg 積分で定義される L-因子 と Shahidi により定義された L-因子は, 一致しているのか？」即ち, G の既約分岐表現 π に対し,

$$L^{RS}(s;\,\pi,\rho)\ \text{"}=\text{"}\ L^{Sha}(s;\,\pi,\rho)$$

を確立することは, 重要な研究課題である。勿論, 局所 Langlands 対応を通じて, L-パラメタ $\phi_\pi : W_F \to {}^L G$ で定める cannonical Langlands L-因子

$$L^{Gal}(s;\,\rho\cdot\phi_\pi)$$

と 上 二つの L との一致を示すことは, 数論的 L-関数の特殊値と Motif の period 研究の観点から, 数論に於ける最重要課題の一つである。

Jacquet's Philosophy に於ける 一方の主役である Functorial Lift をコントロールする $L^{**}(s;\pi,\rho)$ については, 広いクラスの π に対して, 三つの L の一致が確かめられている。特に, 三つの Asai L-関数の一致 (*i.e.* $\rho=$ Asai の場合) は, §2 で扱う Case(2) に於いて 重要な理論的役割を占めている[3]。

---

[2]部分群 H が invl'n fixed パート G^ι でない場合, 上の picture は どこまで成り立つのであろうか？ また如何なる修正を要するのであろうか？ *cf.* 球等質空間 $X=G/H$ に付随する双対群 $G^\vee_X$ [Sa-Ve-12]。

[3]注意 : 以下の Thm 達は, Dec/2005 ノート「三つの局所 L-/ε-因子の一致」からの抜き出し＋その後の進展の加筆である。

Theorem 1.4 (GL(n) **の局所 Langlands 対応；**[Ha-Ta-01], [Hen-00]) .
$G=\mathrm{GL}_n(E)$ の既約許容表現 π に対して,
(0) $\rho=\mathrm{Std}$ のとき,

$$\begin{aligned} L^{RS}(s;\ \pi,\mathrm{Std}) &= L^{Gal}(s;\ \phi_\pi) \\ \varepsilon^{RS}(s;\ \pi,\psi) &= \varepsilon^{Gal}(s;\ \phi_\pi,\psi) \end{aligned}$$

が成り立つ。
(0′) $\rho=\mathrm{Std}_n\boxtimes\mathrm{Std}_m$ のとき,

$$\begin{aligned} L^{RS}(s;\ \pi\times\pi') &= L^{Gal}(s;\ \phi_\pi\otimes\phi_{\pi'}) \\ \varepsilon^{RS}(s;\ \pi\times\pi',\psi) &= \varepsilon^{Gal}(s;\ \phi_\pi\otimes\phi_{\pi'},\psi) \end{aligned}$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.5 (GL(n) × GL(m) **の convolution L-因子；**[Sha-84] **Thm.5.1)**
$\mathrm{GL}_n(E)$, $\mathrm{GL}_m(E)$ の 既約 *generic* 表現 π,π' に対して,

$$\omega_{\pi'}(-1)^n\times\gamma^{RS}(s;\ \pi\times\pi',\psi) = C_\psi^{Sha}(s;\ \pi\otimes\pi'^\vee)$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.6 (馴分岐/無限 Shahidi L-因子；[Sha-90] **Thm.3.5(1))** .
準分裂連結群 G の 既約 *generic* 馴分岐表現 π (E が p-進体), または 任意の既約 *generic* 表現 π (E が *Archimedearn*) に対し,

$$\gamma^{Sha}(s;\ \pi,r_i,\psi,\widetilde{w}) = \gamma^{Gal}(s;\ r_{\widetilde{w}i}\cdot\phi_\pi,\psi)$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.7 (SO($2n+1$) × GL(m) **の twisted L-因子；**[Sou-00]) .
$\mathrm{GL}_m(E)$ の 既約 *generic* 表現 π と $\mathrm{SO}_{2n+1}(E)$ の 既約 *generic* 表現 τ に対して,

$$\gamma^{RS}(s;\ \pi\times\tau,\psi) = \gamma^{Sha}(s;\ \pi\times\tau,\psi)$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.8 (GL(2) **の triple L-因子；**[Ram-00]) .
$G=\mathrm{GL}_2(E)$ の 任意の既約許容表現の三つ組 π_i ($i=1,2,3$) に対して,

$$L^{RS}(s;\ \pi_1\times\pi_2\times\pi_3) = L^{Sha}(s;\ \pi_1\times\pi_2\times\pi_3) = L^{Gal}(s;\ \phi_{\pi_1}\otimes\phi_{\pi_2}\otimes\phi_{\pi_3})$$

が成り立つ。 □

Theorem 1.9 (Exterior/Symmetric square, Asai L-因子) .
$G = \mathrm{GL}_n(E)$ の *generic* な 既約許容表現 π に対して,
(1) $\rho = \wedge^2$, *Sym*, Asai に対して, 1 の或る冪根 α_ρ が在り,

$$\begin{aligned} L^{Sha}(s;\,\pi,\rho) &= L^{Gal}(s;\,\rho\cdot\phi_\pi) \\ \varepsilon^{Sha}(s;\,\pi,\rho,\psi) &= \alpha_\rho\cdot\varepsilon^{Gal}(s;\,\rho\cdot\phi_\pi,\psi) \end{aligned}$$

が成り立つ (**[Hen-03]**, ε *for DS* π **[Raj-04]**) 。
(2) $\rho =$ Asai のとき, *generic* 表現 π が<u>離散系列であれば</u>

$$\begin{aligned} L^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai}) &= L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai}) \\ \varepsilon^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai},\psi) &= \alpha_{As}\cdot\varepsilon^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai},\psi) \end{aligned}$$

が成り立つ (**[An-Ra-05] Thm.1.6, Rmk.3.5**)。
(3) $\rho =$ Asai のとき, <u>任意の</u>*generic* 表現 π に対して,

$$L^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai}) = L^{Gal}(s;\,\mathrm{Asai}\cdot\phi_\pi)$$

が成り立つ (**[Mat-11] Thm.5.3**)。 □

<**Symmetry of the ι-twist $\pi\cdot\iota$**>
π の性質としての

- distinguished by H (Dis)
- Image of a Ft'l Lift from G' (Lif)

が 関連する筈だ というのが, Jacquet's Philosophy であるが, Jacquet は 具体的な involution ι (即ち H) に対して, 三番目の性質

- ι-twist symmetry : $\pi\cdot\iota \ \cong\ \pi^\vee$ (Sym)

により, 上二つが特徴付け可能であろう という予想を提出している。以上まとめると,

G の表現 π に対し, π に関する上記三条件が同値となり,
それらは 適切な L-関数/L-因子により コントロールされるであろう

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccc} \pi\iota \cong \pi^\vee & \Longleftrightarrow & \pi/G : H\text{-}dist'd & \Longleftrightarrow & L^{RS}(s;\,\pi,\rho)|_{s=0}: \text{極} \\ \uparrow & & & & \| \\ \exists\,\tau/G' & & & \Longleftrightarrow & L^{Sha}(s;\,\pi,\rho)|_{s=0}: \text{極} \end{array}$$

という picture が描ける。

<**Typical cases**> (*cf.* **[Ha-Mu-02-2]** §4 p.228)
以下 このノートの終わりまで, $G = \mathrm{GL}_n(E)$ とする。G の表現 π を distinguish する H と

π に Lift する τ が住んでいる筈の G' を リストにする。但し, リスト中の σ は 二次拡大 E/F の Galois 群 の生成元である。

Case	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
H	$\mathrm{GL}_{n/2}(E)^2$	$\mathrm{GL}_n(F)$	$\mathrm{U}_{E/F}(n)$	$\mathrm{O}_n(E)$	$\mathrm{Sp}_n(E)$
symmetry of π/G	$\pi \cong \pi^\vee$	${}^\sigma\pi \cong \pi^\vee$	${}^\sigma\pi \cong \pi$	$---$	???
G'	$\mathrm{Sp}(n)$ or $\mathrm{O}(n)$	$\mathrm{U}_{E/F}(n)$	$\mathrm{GL}_n(F)$	$\widetilde{\mathrm{GL}}_n^{(2)}(F)$	$\mathrm{GL}_{n/2}(E)$
Ft'l Lift from τ	$CKPS$	unit'y BC	quad.BC	$KazPat$	放物誘導
dom'g L-ft'n	Sym^2 or $\wedge^2$ L	Asai L	??	??	??

上リスト三段目は, 性質 (Sym)を書き換えた条件である。六段目には, π が H-dist'd/Ft'l Lift 像 であることをコントロールする筈の L-関数を記してある。
Case(5) については, Offen "Research Statement", 宇沢達 SS 3 p.163 を見よ。

<**Case**(1)**:Prototype**> (*cf.* **[Ha-Mu-02-2]** Thm.11.2, Thm.11.1:for tame s/c π)
Case(1) が 最もよく研究されており, 上の picture が完全な形で 実現されている。即ち, self-dual (self-contragredient) な $\mathrm{GL}_n(E)$ 上のカスプ保型表現/既約許容表現 π は,
n が偶数 $2m$ なら $\mathrm{GL}_m(E)\times\mathrm{GL}_m(E)$-dist'd であり, $\mathrm{SO}_{2m+1}(E)/\mathrm{SO}_{2m}(E)$ からの Ft'l Lift に なっている ([CKPS-04], [Ji-Ni-Qi-10])。B_m/D_m-型直交群 どちらからの Lift に なっているかは, π の Exterior/Symmetric square L-関数の「どちらが $s=1$ に於いて単極を持っているか」によりコントロールされる。この "L-ft'n dichotomy"は, self-duality $\pi^\vee\cong\pi$ と convolution L の分解[4]

$$L(s;\pi\times\pi) \;=\; L(s;\pi,\wedge^2)\times L(s;\pi,\mathrm{Sym}^2) \tag{1.2}$$

と, 右辺の Ext/Sym square L-関数が $s=1$ で零点を持たない ことに依っている。
n が奇数 $2m+1$ の場合には, self-dual な π は 必ず Sp_{2m} からの Lift になっている。

<**Case**(2)**:Galois case**> (1.2) の Galois twisted 版として, L-関数 の分解[5]

$$L(s;\pi\times{}^\sigma\pi) \;=\; L(s;\pi,\mathrm{Asai})\times L(s;\pi\times\eta,\mathrm{Asai})$$

から出発して パラレルな問題を考察するのは自然であろう。実際 Jacquet は, "分解の右辺に現れる Asai L-関数による dichotomy によって, Stable/Unstable unitary Base Change が コントロールされ, その Lift 像は $\mathrm{GL}_n(F)$-dist'd であろう" という研究方針を提出した。これが Case(2) であり, セクション 2 で 詳しく見る。

<**Case**(3)**:Unitary distinction**> Case(2) の H と G' の役割を 入れ替えると, "二次 Base Change が コントロールされるであろう"とも, Jacquet は予想している。この Case(3) は この十年来 Jacquet を中心として精力的な研究が成されており, ほぼ完成に近

[4]Local equality は, $L^{Sha}(s;\pi,*)$ については, [Sha-92] Lem.3.6 for ユニタリ supercuspidal π
[5]Local equality は, $L^{Sha}(s;\pi,*)$ については, [Gol-94] Cor.5.5, 5.7 for 任意の既約許容表現 π, $L^{RS}(s;\pi,*)$ については, [Kab-04] Thm.6 for 離散系列 π に於いて 確立されている。

付きつつある。セクション3ではその状況を概観する。

<**Case**$(1')$**：Anisotropic distinction**> Case(1) の始まり[6]は, Jacquet の RTF による, Waldspurger の (Theta Lift による) 結果

Theorem 1.10 (Waldspurger [Wal-85] Thm.2, Jacquet [Jac-86] Prop.§10)
$n=2$ として, $\pi\in\mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)\big)$ を 中心指標が自明 (*i.e.* $\omega_\pi=1$) な カスプ保型表現とする。A を GL(2) の *split torus* とする時, 次は同値である。
(1) $\mathcal{P}_{A,\eta}(\varphi)=L(1/2;\pi\otimes\eta)\neq 0,\quad \eta$：二次指標
(2) π は 志村対応の像になっている；$\pi=\mathrm{Shm}(\tau),\ \tau\in\mathcal{A}_0\big(\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_E)}\big)$：genuine

の再証明であった。上の定理を,

$$G\ =\ \mathrm{PGL}(2),\quad H\ =\ \mathrm{GL}(1)\cong A,\qquad G'\ =\ \widetilde{\mathrm{SL}_2}$$

という状況[7]だと解釈することで, Guo は $\mathrm{GL}(n)$ の form への拡張：

$$G\ =\ D^\times,\ \mathrm{GL}_m(D),\qquad H\ =\ \mathrm{GL}_{n/2}(L)$$

(但し, L/E は二次拡大) を 上の方向で試みた ([Guo-96]) が, 未完に終わっている。

また, η が 二次拡大 L/E の CFT 指標 $\omega_{L/E}$ の時,

$$L(s;\pi\otimes 1)\times L(s;\pi\otimes\eta)\ =\ L(s;\mathrm{BC}_{L/E}(\pi))$$

と, dichotomy「$\mathcal{P}_{A,\eta}(\varphi)$ と $\mathcal{P}_A(\varphi)=L(1/2;\pi)$ は, 同時に0になることはない」(*cf.* [Ha-La-Ra-86]) に注意すると, Case(3) の状況に継がっていく。

2 $\mathrm{GL}_n(F)$-distinguished 表現 と unitary Base Change

このセクションでは, 二次拡大 E/F に対し, $G=\mathrm{ResGL}(n)$, $H=\mathrm{GL}(n)_{/F}$ の場合, 即ち Case(2) を扱う。

<**事の始まり：Harder-Langlands-Rapoport**>
平方因子を持たない $d\in\mathbb{Z}_>$ に対して, 実二次拡大を $E=\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ とし, $G=\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}(2)$, $H=\mathrm{GL}(2)_{/\mathbb{Q}}$ と採る。カスプ保型表現 $\pi\in\mathcal{A}_0\big(G(\mathbb{A})\big)$ が H-dist'd ならば, カスプ形式 $\varphi\in V_\pi$ を適切に採れば, φ を Hilbert modular surf. $S_{\mathfrak{n}}:=G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_\infty K_{\mathfrak{n}}$ 上の微分形式と見做して, $S_{\mathfrak{n}}$ 上の divisor である modular cv. $X_N:=H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{A})/K_\infty K_{\mathfrak{n}}\cap H(\mathcal{O}_F)$ に沿ったperiod 積分が消えない；

$$\int_{X_N}\varphi\big|_{X_N}(x)\,\mathrm{d}x\ \neq\ 0$$

[6]何か うまく フィットしてないぞ…$\mathrm{GL}_{2/2}(L)$ は, $\mathrm{GL}(1)\cong A$ じゃないし…
[7]$G=\mathrm{PGL}(2)\cong\mathrm{SO}(2,1)$ なので $G^\vee=\mathrm{Sp}_1(\mathbb{C})$, 一方 $G'=\widetilde{\mathrm{SL}_2}=\widetilde{\mathrm{Sp}_1}$ は 二重被覆なので $(G')^\vee=\mathrm{Sp}_1(\mathbb{C})$ となる (*cf* [Wei-09])。従って, この場合 双対群の包含関係は 自明写像である。

様に出来る。この観察を基に Harder-Langlands-Rapoport は, Hilbert mod.surf. S_n の非自明サイクルの研究, 特に $\mathbb{Q}$ 上の Abel 拡大に対する Tate 予想の解決を成し得た [Ha-La-Ra-86] (*cf.* [Oda-82])。そこで Key となったのが,「H-dist'd 性 から従う σ-twisted self-contragredient 性 $\boxed{{}^{\sigma}\pi \cong \pi^{\vee}}$ は, 逆に H-dist'd 性 を導くだろう」という同値予想であった。この Galois invl'n σ による特徴付けは, Asai L-関数の言葉で翻訳すると

$$L(s;\pi,\mathrm{Asai})\big|_{s=1} \ : \ \text{pole}$$

となる。これが, picture (1.1)（の一段目）が世に現れた 初めての例である。

Tate 予想など Arithmetic apprication サイドでは, 上の様な<u>Global setting</u> が本質であるが, 使用された 保型表現のサイドでは, <u>分岐 Local counterpart</u> が重要となる。

2.1 大域問題

次の結果が RTF アプローチにより知られていた。

Theorem 2.1 (Ye [Ye-89]) .
中心指標 ω_π が<u>自明な</u>カスプ保型表現 $\pi \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次の同値が成り立つ。

$$\pi{=}\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\big) \iff \pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\text{-}\mathit{dist'd}$$

ただし, τ の中心指標は *CFT* 指標 $\omega_{E/F}$ である。

注意： 上の Thm.3.1 に於いて, 中心指標の仮定により, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)$ は $\mathrm{U}_{E/F}(2)(\mathbb{A})$ と見做せる事に注意せよ。実際

Theorem 2.2 (Flicker [Fli-91] Thm.1) .
(1) カスプ保型表現 $\pi \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次が成り立つ。

$$\pi{=}us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) \Longleftarrow \pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\text{-}\mathit{dist'd}$$

(2) 逆向きについては,

$$\pi{=}us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) \Longrightarrow \begin{cases} \pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\text{-}\mathit{dist'd}\ \text{カスプ保型表現} \\ \pi = \text{主系列表現}\ I(\mu_1,\mu_2) \end{cases}$$

但し, μ_1, μ_2 は, 相異なる $\mathbb{A}_F^\times F^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times$ の *unitary* 指標。

を 基に, Flicker は 次の予想を 向かうべき目標として提出する。
但し, 大域 H-dist'd 性を定義する H-period は,

$$\mathcal{P}_{\mathrm{GL}(2)}(\varphi) \ := \ \int_{Z(\mathbb{A})\mathrm{GL}_2(E)\backslash\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})} \varphi|_{\mathrm{GL}_2}(h)\ dh$$

と修正しておく。

Conjecture 2.3 (Flicker [Fli-91] p.143, Rallis) .
既約保型表現 $\pi \in \mathcal{A}\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合, π がカスプ表現なら,

$$\pi = st\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) \iff \pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\text{-}dist'd$$

(2) 行列サイズ n が 偶数の場合, τ を パケット $[\tau]$ 内の唯一の *generic* メンバーとして,

$$\pi = us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists[\tau] \subset \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) \iff \pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\text{-}dist'd$$

但し, $st\mathrm{BC}_{E/F}$, $us\mathrm{BC}_{E/F}$ は, $\mathrm{U}_{E/F}(n)$ から $\mathrm{GL}_n(E)$ への *Stable*, *un-Stable Base Change* を表す。

さて, 上の Conj.2.3 の左辺：性質 (Lif)は 然るべき L-関数で統制される筈 (picture (1.1) の下段) であるが, どの L-関数を見るべきであろうか？ これについては, 次が信じられている。

Conjecture 2.4 (????) .
generic な既約カスプ表現 $\pi \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に対し, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合,

$$\begin{aligned} \pi = st\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) &\iff L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極} \\ &\iff L^{Sha}(s;\,\pi\otimes\eta,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極} \end{aligned}$$

但し, η は *CFT* 指標 $\omega_{E/F}$ の $\mathbb{A}_E^\times$ への延長である。
(2) 行列サイズ n が 偶数の場合,

$$\pi = us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{U}_{E/F}(n)(\mathbb{A})\big) \iff L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極}$$

この characterization については, 次の結果が強い傍証となっている。

Conjecture 2.5 (Kim-Krishnamurthy [Ki-Kr-1], Clozel-Labesse [Cl-La]) .
(1) n が偶数の場合, τ が *generic* であれば, *Conj.2.4* は正しい。
(2) 任意の n に対し, $\tau_v \cong St_\chi$ となる v が二つ以上あれば, *Conj.2.4* は成り立つ。

Conj.2.4 によれば, Conj.2.3 の右辺：性質 (Dis)を統制する L-関数は, Asai L-関数になる筈 (picture (1.1) の上段) である。これについては, 次の結果がある。

Theorem 2.6 (Flicker [Fli-88] Thm.(1) in §4) .
F の全ての無限素点が E で *split* するなら, 既約 *unitary* カスプ表現 $\pi \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に対し,

$$\pi : \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\text{-}dist'd \iff L^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=1}\text{: 極}$$

2.2 局所問題

<Jacquet 予想 と Rankin-Selberg Asai L>

Jacquet は, この picture に沿って 行列サイズを一般の n に拡張して, 性質 (Sym) と 性質 (Dis) の間に 次の同値性が成り立つだろうという予想[8] を提出した。

Conjecture 2.7 (Jacquet, *cf.* [Pra-01] p.67) .
その中心指標 ω_π が $F^\times$ 上自明な既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{adm}$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合,

$$^\sigma\pi \cong \pi^\vee \iff \pi : \mathrm{GL}_n(F)\text{-}dist'd$$

(2) 行列サイズ n が 偶数の場合,

$$^\sigma\pi \cong \pi^\vee \iff \pi \ or\ \pi\eta : \mathrm{GL}_n(F)\text{-}dist'd$$

但し, η は E/F の CFT 指標 $\omega_{E/F}$ の $E^\times$ への延長である。 □

この予想には, 様々なテクニックを用いた 色々なアプローチがあるが, ここでは 結果だけを簡潔に記録しておく。

Type 理論に基づく approach

[Fli-91] Prop.12, [Hak-91] Thm.2.1 : ($\Longleftarrow$) パートの確立

[Pra-01] Thm.4 : E/F が不分岐拡大, $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{sc}$ が supercuspidal の場合 同値成立

[Ha-Mu-02-2] Thm.11.1 : π が 馴分岐 supercuspidal の場合に ($\Longrightarrow$) の成立条件

積分表示に基づく approach

[Kab-04] Thm.7 : π が 離散系列表現 の場合 同値成立

[Mat-09] Cor.3.5 : π が 主系列表現の場合に 反例の存在

以上は, picture (1.1) の一段目 左半分の同値性に関する結果であった。それでは, 右半分の同値性 ;

Conjecture 2.8 (????) *generic* な 既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{adm}$ に対して,

$$\pi : \mathrm{GL}_n(F)\text{-}dist'd \iff L^{RS}(s;\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0} : \text{極}$$

に付いては どうであろうか? こちら側も, 「離散系列の外では 修正が必要になる」ことが 分かっている。

[Kab-04] Thm.4 : π が 離散系列表現 の場合に ($\Longleftarrow$) 成立

[An-Ka-Ta-04] Cor.1.5 : π が 離散系列表現 の場合 同値成立

π が tempered 表現 の場合に ($\Longrightarrow$) 成立

[8] この予想には 大域版が在り, ($\Longrightarrow$) パートは [?] Thm.???

[Mat-10] Thm.3.1：$L^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0}$：例外極 of [Co-PS] とすれば同値成立

<Flicker, Rallis 予想 と Shahidi's Asai L>
これで, picture (1.1) の一段目については, ほぼ完全な解決を得たのではあるが, 二段目との関係はどうであろうか? これについては, 性質 (Lif) と 性質 (Dis)を結び付ける Functorial Lift としては, unitary 群からの Base Change を採れば良かろうという 次の予想がある。

Conjecture 2.9 (Flicker [Fli-91] p.143, Rallis) .
既約許容表現 $\pi\in\mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{adm}$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合,

$$\pi{=}st\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau\in\mathrm{U}_{E/F}(n)^\wedge\ \iff\ \pi：\mathrm{GL}_n(F)\text{-}dist'd$$

(2) 行列サイズ n が 偶数の場合,

$$\pi{=}us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau\in\mathrm{U}_{E/F}(n)^\wedge\ \iff\ \pi：\mathrm{GL}_n(F)\text{-}dist'd$$

但し, $st\mathrm{BC}_{E/F}$, $us\mathrm{BC}_{E/F}$ は, $\mathrm{U}_{E/F}(n)$ から $\mathrm{GL}_n(E)$ への *Stable*, *un-Stable Base Change* を表す。 □

この予想は, n が小さい場合にしか その成立は知られていない。
$n=1$：Hilbert の Satz 90 に他ならない。
$n=2$：[Fli-91] Thm.7
$n=3$：[An-Ra-05] Thm.1.2：$\pi\in\mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{sc}$ が supercuspidal 表現の場合

Conjecture 2.10 (????) .
generic な 既約許容表現 $\pi\in\mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{adm}$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合,

$$\begin{aligned}\pi{=}st\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau\in\mathrm{U}_{E/F}(n)^\wedge\ &\iff\ L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極}\\ &\iff\ L^{Sha}(s;\,\pi\otimes\eta,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極}\end{aligned}$$

但し, η は *CFT* 指標 $\omega_{E/F}$ の $E^\times$ への延長である。
(2) 行列サイズ n が 偶数の場合,

$$\pi{=}us\mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau\in\mathrm{U}_{E/F}(n)^\wedge\ \iff\ L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})|_{s=0}\text{: 極}$$

この予想には, 次の definitive な結果が知られている。

[Gol-94] Cor.4.6 ($n=3$), Thm.6.5：π が ユニタリ supercuspidal 表現の場合 同値成立

Asai L については, $L^{RS}=L^{Sha}$ が generic DS に対して確立されている (Thm.1.9 (2)) ので, この場合には picture (1.1) の輪が閉じる。

Rmk：上の Goldberg の結果 (Thm.6.5) は, 「supercuspidal π が 性質 (Sym)：${}^\sigma\pi\cong\pi^\vee$

を満たす」との仮定の下で 述べられている。しかし, $(\Longleftarrow)$ については, [An-Ra-05] により, $L^{RS}(s;\,\pi,\mathrm{Asai}) = L^{Sha}(s;\,\pi,\mathrm{Asai})$ が 知られているので, Conj.2.8 [An-Ka-Ta-04] の結果から, π は $\mathrm{GL}_n(F)$-dist'd, よって Conj.2.7 [Kab-04] から 性質 (Sym)は従う。

逆方向 $(\Longrightarrow)$ については, 少々 restrictive である。$n=3$ の場合, supercuspidal が $\pi = st\mathrm{BC}_{E/F}(\tau)$ なら, [Rog-90] の結果 (*cf.* [Gol-94] Thm.4.5(2)) により, シングルトン $\{\tau\}$ は $\mathrm{U}_{E/F}(3)$ の 離散系列パケットを成し, 更に Stable Base Change 像の特徴付け

$$\left\{\Pi \in \Pi_{DS}(\mathrm{U}_{E/F}(3)) \;\middle|\; \#\Pi = 1\right\} \overset{st\mathrm{BC}}{\longleftrightarrow} \left\{\pi \in \mathrm{GL}_3(E)^{\wedge}_{sc} : \text{unit.} \;\middle|\; {}^{\sigma}\pi \cong \pi^{\vee}, \omega_\pi|_{F^\times} = 1\right\}$$

から, この場合も 性質 (Sym)が従う。

一般の n の場合には, Base Change の完全な特徴付けが 未だ得られていないので, definitive に述べる事が出来ないのだが, 「軌道積分の和が適切な行列成分上で消えない」事までは言える。それには, 次の Shahidi の結果に多く依っている。

Theorem 2.11 (Shahidi; [Sha-90] Cor.7.6) .
G の Levi M の supercuspidal 表現 $\Pi \in M^{\wedge}_{sc}$ が ユニタリ なら, 次の同値が成り立つ。
(1) *intertwiner* $A(s;\Pi,w)$ が, $s=0$ で *pole* をもつ
(2) L-因子 $L(s;\Pi,r_i)$ $(i=1,2)$ のうち, どちらか一方のみが $s=0$ で *pole* をもつ
(3) *Siegel* 退化主系列 $I(s;\Pi)$ が $s=0$ に於いて既約 かつ $w.\Pi \cong \pi$

今 $G = \mathrm{U}_{E/F}(n,n+1)$ とすると, $M \cong \mathrm{GL}_n(E)\times \mathrm{U}_{E/F}(1)$ なので, $\Pi \in M^{\wedge}_{adm}$ は $\Pi(g,a) = \pi(g)\times\xi(a\det g^t\bar{g}^{-1})$, $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^{\wedge}_{adm}$, $\xi \in \mathrm{U}_{E/F}(1)^{\wedge}$ と書ける。${}^LG$ の Levi 作用を具体的に書いてみると
Fact ([Gol-94] Lem.6.1)： $i=1$ の L-因子は, Std L になる ; $L(s;\Pi,r_1) = L(s;\pi,\mathrm{Std})$
Fact ([Sha-90] p.297)： $i=2$ の L-因子は, Asai L になる ; $L(s;\Pi,r_2) = L(s;\pi\otimes\eta,\mathrm{Asai})$
と判るので, 上の Shahidi の定理の (2) は,
(2) Asai L-因子 $L^{Sha}(s;\pi\otimes\eta,\mathrm{Asai})$ が $s=0$ で pole をもつ
となる。

< **退化主系列の可約性 と 性質 (Sym)**>

Proposition 2.12 (Goldberg [Gol-94] Thm.2.9) .
既約ユニタリ *supercuspidal* 表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^\wedge_{sc}$ に対して, $\mathrm{U}_{E/F}(n,n)$ の退化主系列を $I(s;\pi) := \mathrm{Ind}_{P_S}^{\mathrm{U}_{E/F}(n,n)}(\pi \otimes |\det|_E^{s/2})$ と記すとき, 次の同値が成り立つ。
(1) 行列サイズ n が 奇数の場合,

$$I(s;\pi)：可約 \iff {}^\sigma\pi \cong \pi^\vee \text{ かつ } \Phi_\varepsilon^{\mathrm{St}}(\delta;\forall\varphi_\pi) = 0$$

(2) 行列サイズ n が 偶数の場合,

$$I(s;\pi)：可約 \iff {}^\sigma\pi \cong \pi^\vee \text{ かつ } \Phi_\varepsilon^{\kappa}(\delta;\forall\varphi_\pi) = 0$$

但し, φ_π は π の行列要素であり, Φ_ε は φ_π の ε-*twisted* 軌道積分, $\Phi_\varepsilon^{\mathrm{St}}$ 及び $\Phi_\varepsilon^{\kappa}$ は 各々Φ_ε の *Stable* 和, κ-*twisted* 和 を表す。勿論, $\varepsilon(g) = {}^\sigma\overline{g}^{-1}$ であり, 指標は $\kappa : F/\mathrm{N}_{E/F}E \to \{\pm 1\}$ である。 □

3 $\mathrm{U}_{E/F}(n)$-distinguished 表現 と 二次 Base Change

このセクションでは, Φ が 二次拡大 E/F の n-次エルミート行列の時, $G = \mathrm{ResGL}(n)$, $H = \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$, 即ち Case(3) を扱う。

< **事の始まり：新谷-齋藤, Langlands, cyc.BC for** GL(2)>
L/F を 代数体 F の m 次巡回拡大とするとき, GL(2) 上の既約保型表現の Base Change に関して,

$$\pi = \mathrm{BC}_{L/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\big) \iff {}^\sigma\pi \cong \pi, \ \ 但し\ \langle\sigma\rangle = \mathrm{Gal}(L/F)$$

が成り立つことは, 今や古典的事実である。この 性質 (Lif) と性質 (Sym) の関係 (特に, $\Longleftarrow$) は, $m = 2$ 即ち L/F が二次拡大の場合に 新谷によって観察され, 跡公式による証明が 齋藤により与えられた。これを見た Langlands により, $m = p$:素数の場合にまでは即座に ([Lan-80]) 拡張された。しかし, 一般の m への拡張は Arthur trace formula 等 その後の技術的発展を待たねばならなかった ([La-Ro-98])。

3.1 大域問題

二次 Base Change/GL(2) の /GL(n) への拡張として, ８０年代半ばには三つの性質 (Lif), (Sym), (Dis) の関係は, 次の形でに知られていた。

Fact： $\pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\tau) \iff {}^\sigma\pi \cong \pi$ (Arthur-Clozel [Ar-Cl-89])
${}^\sigma\pi \cong \pi \Longleftarrow \pi : \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$ -dist'd, w/$\exists\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$ ([Ha-La-Ra-86]) ■

従って, Case(3) に於いて 残る問題は, 性質 (Lif) と性質 (Dis) を繋ぐことであった。
$n=2$ の場合である, 次の結果が RTF アプローチの先鞭となった。

Theorem 3.1 (Ye [Ye-89]) .
中心指標 ω_π が自明なカスプ保型表現 $\pi \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次の同値が成り立つ。

$$\pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\big) \iff \pi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_F)\text{-}\mathit{dist'd}$$

ただし, τ の中心指標は *CFT* 指標 $\omega_{E/F}$ である。

この後, 上の結果を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)$ のカスプ保型表現へ拡張する努力が なされる (*cf.* [Ja-Ye-90], [Ja-Ye-96]) のだが, その過程で「$\mathrm{GL}(n)$ の Arthur-Clozel Base Change の像を コントロールする H は, $\mathrm{GL}_n(F)$ ではなく, $\mathrm{U}_{E/F}(n)$ である」と認識されるに到る。即ち, 次の Jacquet による予想の解決が, Case(3) に於ける中心課題となった。

Conjecture 3.2 (Jacquet [Ja-Ye-90], [Jac-97] p.450) .
既約保型表現 $\pi \in \mathcal{A}\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 任意の行列サイズ n で,

$$\pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\big) \iff \pi : \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)\text{-}\mathit{dist'd}\ \ \mathit{for}\ \exists\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$$

(2) 更に, ユニタリ群 $\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$ は, 唯一の F-*qs-split form* $\mathrm{U}_{E/F}(n)$ に採れる。 □

長大な RTF 研究の帰結として, Jacquet は cuspidal π に対し 肯定的に解決する。
$n=2$: [Ja-Ye-90]
$n=3$: [Ja-Ye-96] Thm.1.1 : F の ∞-素点が全て split する場合に ($\Longrightarrow$) パートの確立
n 一般 : [Jac-05] Thm.4 : F の実素点が全て split する場合に 同値成立

Theorem 3.3 (Jacquet [Jac-10]) .
π が *cuspidal* なら, 上の *Conj.* は 正しい。

その後の RTF の精緻な研究により, Jacquet の予想は次の形で解決されるに到った。

Theorem 3.4 (Feigon-Lapid-Offen [Fe-La-Of-11]) .
各 エルミート行列 $\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$ を採る毎に, 既約カスプ保型表現 $\pi \in \mathcal{A}\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に対して, 次の同値が成り立つ

$$\begin{array}{l}\pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\tau),\ \ \exists\tau \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)\big)\\ w(\pi_v) \le \mathrm{Witt}(\Phi_{n,v})\ \ \mathit{whenever}\ \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)_v \mathit{non\ qs\text{-}split}\end{array} \iff \pi : \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)\text{-}\mathit{dist'd}$$

3.2 局所問題

上の定理により, 大域問題は 完全解決を見た。では, 局所体上のアナロジーは どうなっているであろうか？局所体上でも 性質 (Lif) と 性質 (Sym) の関係は確立されていた。

Fact： temp'd 表現 π に対しては, $\pi = \mathrm{BC}_{E/F}(\tau) \iff {}^{\sigma}\pi \cong \pi$ ([Cl-87] Prop.2.2) ■

しかし, (Sym) と (Dis) の関係は 長らく予想のままであり, 今だ決着を見ていない。

Conjecture 3.5 (Jacquet ???? *cf.* [Pra-01] p.68) .
既約許容表現 $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^{\wedge}_{adm}$ に対して, 次の同値が成り立つであろう。
(1) 任意の行列サイズ n で,

$$\left(\pi = \mathrm{BC}(\tau) \iff {}^{\sigma}\pi \cong \pi \right) \iff \pi : \mathrm{U}_{E/F}(\Phi)\text{-}dist'd \ \ for\ \exists\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$$

(2) 更に, ユニタリ群 $\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$ は, 唯一の F-*qs-split form* $\mathrm{U}_{E/F}(n)$ に採れる。 □

[?]Jacquet π：supercuspidal の場合に (1) の $\Longleftarrow$ パート

Type 理論に基づく approach：π を $H(\mathbb{A})$-dist'd $\otimes_v \pi_v \in \mathcal{A}_0\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_E)\big)$ に埋め込んで, GL(n) の mult.1 を使う。

[Pra-01] Thm.5：E/F が不分岐拡大の場合, 任意の $\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^{\wedge}_{sc}$ に対し, (2) を仮定して (1) の同値性

[Ha-Mu-02-3] Thm.4.4：$\pi \in \mathrm{GL}_n(E)^{\wedge}_{sc}$ が 馴分岐 supercuspidal の場合に (1) の同値性, E/F は分岐拡大でも良い

Bel-Zel Geom.Lem. に基づく approach

[Fe-La-Of-11] ${}^{\sigma}\pi \cong \pi \Longleftarrow \pi$: $\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$ -dist'd, w/$\exists\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$

[Ai-La-??] $E = \mathbb{C}$, (1) の $\Longleftarrow$ パート, generic π に対しては $\Longrightarrow$ パートも示している。

[?] π が L^2 かつ ${}^{\sigma}\pi \cong \pi \Longrightarrow \pi$: $\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$-dist'd, w/$\exists\Phi \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$
（上３つは Offen のスライドより）

Theorem 3.6 (Feigon-Lapid-Offen [Fe-La-Of-11]) .
$\#\mathrm{BC}^{-1}_{E/F}(\pi) = 1$ ならば, $\Phi^{qs} \in \mathrm{Herm}_n(E/F)$ を *qs-split fm.* として, 次が成り立つ。

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)}\big(\pi|_{\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)}, 1\big) \begin{cases} = 1 & \iff \pi : \mathrm{U}_{E/F}(\Phi^{qs})\text{-}dist'd, \\ = 0 & \iff o/w \end{cases}$$

.

＜ **足りないもの：** ＞
Conj.2.3. に当たる L^{RS}-pole criterion
Conj.2.4. に当たる $\mathrm{U}_{E/F}(\Phi)$-dist'd $\iff \pi = qBC(\tau)$:Conj.3.1 の Loc. 版
Conj.2.5. に当たる $\pi = qBC(\tau)$ の L^{Sha} criterion

参考文献

[**For Section 1：**]

[Hak-91] Hakim, J., Distinguished p-adic representations, Duke Math. J. **62** (1991), 1–22.

[Ja-Ra-96] Jacquet, H.; Rallis, S., Uniqueness of linear periods, Comp. Math. **102** (1996), 65–123.

[He-Ra-90] Heumos, M.J.; Rallis, S., Symplectic-Whittaker models for Gl_n, Pacific J. Math. **146** (1990), 247–279.

[Sa-Ve-12] Sakellaridis, Y.; Venkatesh, A., Periods and harmonic analysis on spherical varieties, preprint (2012).

[Ha-Ta-01] Harris, M.; Taylor, R., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton Univ. Press (2001).

[Hen-00] Henniart, G., Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique , Inv. Math. **139** (2000), 439–455.

[Sha-84] Shahidi, F., Fourier transforms of intertwining operators and Plancherel measures for $\mathrm{GL}(n)$, Ame. J. Math. **106** (1984), 67–111.

[Sha-90] Shahidi, F., A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups, Ann. of Math. **132** (1990), 273–330.

[Sou-00] , Soudry, D., Full multiplicativity of gamma factors for $\mathrm{SO}_{2l+1} \times \mathrm{GL}_n$, Israel J. Math. **120** (2000), 511–561.

[Ram-00] Ramakrishnan, D., Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for SL(2), Ann. of Math. **152** (2000), 45–111.

[Hen-03] Henniart, G., Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique, IMRN no.4 (2010), 633–673.

[Raj-04] Rajan, C.S., On Langlands functoriality–reduction to the semistable case, *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst.Fund.Res. (2004), 199–219

[An-Ra-05] Anandavardhanan, U.K.; Rajan, C.S., Distinguished representations, base change, and reducibility for unitary groups, IMRN no.14 (2005), 841–854.

[Mat-11] Matringe, N., Distinguished generic representations of $\mathrm{GL}(n)$ over a pp-adic fields, IMRN no.1 (2011). 74–95.

[Ha-Mu-02-2] Hakim, J.; Murnaghan, F., Two types of distinguished supercuspidal representations, IMRN no.35 (2002), 1857–1889.

[CKPS-04] Cogdell, J.; Kim, H.; Piatetski-Shapiro, I.; Shahidi, F., Functoriality for the classical groups, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **99** (2004), 163–233.

[Ji-Ni-Qi-10] Jiang, D.; Nien, C.; Qin, Y., Symplectic supercuspidal representations of $\mathrm{GL}(2n)$ over p-adic fields, Pacific J. Math. **245** (2010), 273–313.

[Sha-92] Shahidi, F., Twisted endoscopy and reducibility of induced representations for p-adic groups. Duke Math. J. **66** (1992), 1–41.

[Gol-94] Goldberg, D., Some results on reducibility for unitary groups and local Asai L-functions, J. Reine Angew. Math. **448** (1994), 65–95.

[Wal-85] Waldspurger, J.L, Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie, Comp. Math. **54** (1985), 173–242.

[Jac-86] Jacquet, H., Sur un résultat de Waldspurger, Ann. Sci. ENS. **19** (1986), 185–229.

[Guo-96] Guo, J., On a generalization of a result of Waldspurger, Can. J. Math. **48** (1996), 105–142.

[Wei-09] Weissman, M., Metaplectic tori over local fields, Pacific J. Math. **241** (2009), 169–200.

[**For Section 2 :**]

[Ha-La-Ra-86] Harder, G.; Langlands, R.P.; Rapoport, M., Algebraische Zyklen auf Hilbert-Blumenthal-Flächen, J. Reine Angew. Math. **366** (1986), 53–120.

[Oda-82] Oda, T., *Periods of Hilbert modular surfaces*, Progress in Mathematics **19**, Birkhäuser (1982)

[Ye-89] Ye, Y., Kloosterman integrals and base change for GL(2), J. Reine Angew. Math. **400** (1989), 57–121.

[Fli-91] Flicker, Y.Z., On distinguished representations, J. Reine Angew. Math. **418** (1991), 139–172.

[Ja-Ye-96] Jacquet, H.; Ye, Y., Distinguished representations and quadratic base change for GL(3), Trans. AMS. **348** (1996), no. 3, 913–939.

[Ki-Kr-1] Kim, H.; Krishnamurthy, M., Stable base change lift from unitary groups to $\mathrm{GL}(n)$, IMRP no.1 (2005), 1–52.

[Ki-Kr-2] Kim, H.; Krishnamurthy, M., Base change lift for odd unitary groups, in *Functional analysis* VIII, Various Publ.Ser.**47**, Aarhus Univ.(2004), 116–125.

[Cl-La] Clozel, L.; Labesse, J.-P., Changement de base pour les représentations cohomologiques de certains groups unitaires, in *Cohomologie, stabilisation et changement de base*, Astérisque **257**, (1999).

[Fli-88] Flicker, Y.Z., Twisted tensors and Euler products, Bull. SMF. **116** (1988), 295–313.

[Pra-01] Prasad, D., On a conjecture of Jacquet about distinguished representations of GL(n), Duke Math. J. **109** (2001), 67–78.

[Ha-Mu-02-2] Hakim, J.; Murnaghan, F., Two types of distinguished supercuspidal representations, IMRN no.35 (2002), 1857–1889.

[An-Ra-05] Anandavardhanan, U. K.; Rajan, C. S., Distinguished representations, base change, and reducibility for unitary groups, IMRN no. 14 (2005), 841–854.

[Kab-04] Kable, A. C., Asai L-functions and Jacquet's conjecture, Amer. J. Math. **126** (2004), 789–820.

[Mat-09] Matringe, N., Distinguished principal series representations of GL(n) over a p-adic field, Pacific J. Math. **239** (2009), 53–63.

[An-Ka-Ta-04] Anandavardhanan, U. K.; Kable, A. C.; Tandon, R., Distinguished representations and poles of twisted tensor L-functions. Proc. AMS. **132** (2004), 2875–2883.

[Mat-10] Matringe, N., Distinguished representations and exceptional poles of the Asai-L-function, Manu. Math. **131** (2010), 415–426.

[Co-PS] Cogdell, J.W.; Piatetski-Shapiro, I.I., Derivatives and L-functions for GL(n) ., *The Heritage of B. Moishezon*, IMCP. To appear.

[Rog-90] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Ann. of Math. Studies **123**, Princeton Univ. Press (1990).

[**For Section 3 :**]

[Lan-80] Langlands, R., *Base change for* GL(2), Ann. of Math. Studies **96**, Princeton Univ. Press (1980).

[La-Ro-98] Lapid, E.; Rogawski, J., On twists of cuspidal representations of GL(2), Forum Math. **10** (1998), 175–197.

[Ja-Ye-90] Jacquet, H.; Ye, Y., Une remarque sur le changement de base quadratique, C.R. Acad. Sci. Paris **311** (1990), 671–676.

[Jac-97] Jacquet, H., Automorphic spectrum of symmetric spaces, *Representation theory and automorphic forms* Proc.Symp.Pure Math. **61** (1997), 443–455.

[Ar-Cl-89] Arthur, J.; Clozel, L., *Simple algebras, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Ann. of Math. Studies **120**, Princeton Univ. Press (1989).

[Ja-Ye-96] Jacquet, H.; Ye, Y., Distinguished representations and quadratic base change for GL(3), Trans. AMS. **348** (1996), 913–939.

[Jac-05] Jacquet, H., Kloosterman identities over a quadratic extension II, Ann.Sci.École Norm.Sup.**38** (2005), 609–669.

[Jac-10] Jacquet, H., Distinction by the quasi-split unitary group, Israel J. Math. **178** (2010), 269–324.

[Cl-87] Clozel, L., Base change for GL(n), Proc. of the ICM (Berkeley 1986) (1987), 791–797,

[Ha-Mu-02-3] Hakim, J.; Murnaghan, F., Tame supercuspidal representations of GL(n) distinguished by a unitary group, Comp. Math. **133** (2002), 199–244.

[Fe-La-Of-11] Feigon, B.; Offen,O.; Lapid, E., On representations distinguished by unitary groups, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **115** (2012), 185–323.

[Ai-La-??]