

Gelfand Pairs *

—Gelfand, Kazhdan, Rallis-Schiffmann, Aizenbud-Gourevitch—

石川 佳弘

Mar+Sep/2011

概要

このノートでは, Gelfand ペア について纏めておく。前半では, コンパクト群の組 (G, H) に対して, 既知の事実を記録しておく。後半では, 非コンパクト群の場合に, 知られている結果について概観する。

目次

1	Compact Case	2
1.1	Definitions in several view pt's.	2
1.2	Gelfand trick	2
1.3	Known results	3
1.4	Classical applications	3
2	Non-compact Case	4
2.1	Definitions and modification	4
2.2	Gelfand-Kazhdan's dist'n criterion	4
2.3	Known results	5
3	Rel. with Sym.pairs in Sphl.pairs	5
3.1	Spherical pairs	5
3.2	Symmetric pairs	6
3.3	Regular pairs	7
3.4	Open questions	8

このノートは, 主に 次のペーパーたちを参考に Gelfand ペア について, 整理したものである。

- B.Gross, Some applications of Gelfand pairs to number theory, Bull.AMS.(1991).
- A.Aizenbud, D.Gourvitch, Invariant Distributions and Gelfand Pairs, Slides for talks (2008, 2009, 2010).
- E.Lapid, Unitary periods and distinction; rep-the aspect, Oberwolfach, March (2011).

*”局所 period” としての distinguished 模型 $\mathrm{Hom}_H(\pi|_H, 1)$ 研究 (但し $\pi \in G_{adm}^\wedge$) の 前置きとして

1 Compact Case

先ず, コンパクト群の場合を 思い出しておこう。(cf. [Gro] §1, [Bum] Chap.47)

1.1 Definitions in several view pt's.

Definition 1.1 .

コンパクト位相群の組 (G, H) ($G \supset H$) が **Gelfand ペア** であるとは, 次の 同値な 条件を満たすことである ;

- (1) $L^2(G/H)$ が 重複度一で G -既約分解する : $L^2(G/H) \cong \bigoplus_{\pi \in G^\wedge} V_\pi$
- (2) $\forall \pi \in G^\wedge$ に対し, H -不変部分が 一次元以下 : $\dim_{\mathbb{C}} V_\pi^H \leq 1$
- (3) $\forall \pi \in G^\wedge$ に対し, **H -dist'd 模型** が 一次元以下 : $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, 1) \leq 1$
- (4) H -Hecke 環 $L^1(H \backslash G/H)$ が 可換

但し, (4) の L^1 は $\text{vol}(G; dx) = 1$ となる Haar 測度 dx に関する可測関数全体. ■

Proof for 同値性.

(1) $\iff$ (3) は, Frobenius reciprocity $\text{Hom}_G(V_\pi, L^2(G/H)) \cong \text{Hom}_H(\pi|_H, 1)$.

(1) $\iff$ (4) は, 単射埋め込み $\iota : L^1(H \backslash G/H) \xrightarrow{\text{End}}_G (L^2(G/H))$ から従う。実際, その像 $\text{Im} \iota$ は 有限ランクの G -end'm. を全て含むので, Hecke 環 $L^1(H \backslash G/H)$ の可換性から $\text{End}_G(L^2(G/H))$ の可換性が導かれる。

(3) $\iff$ (2) は, $\dim_{\mathbb{C}} V_\pi \leq \infty$ より, V_π は常にセミシンプルなので OK ■

Definition 1.2 .

コンパクト位相群の組 (G, H) ($G \supset H$) が **強 Gelfand ペア** であるとは, 次の 同値な 条件を満たすことである ;

- (1) $(G \times H, \Delta H)$ が Gelfand ペア
- (3') $\forall \pi \in G^\wedge, \forall \tau \in H^\wedge$ に対し, **H -新谷模型** が 一次元以下 : $\dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, \tau) \leq 1$
- (4') $\text{Ad}(H)$ -不変な可測関数環 $L^1(G//H)$ が 可換

■

1.2 Gelfand trick

表現 (π, V_π) が具体的に与えられれば, Def.1.1 の条件 (2) が 最も簡単にチェック出来るのだが, 条件 (4) は ペア (G, H) の内的構造のみに依拠している点で興味深い。

Proposition 1.3 (Gelfand) .

σ を G の反対合的自己同型 (*anti-inv'ln*), H をその固定点の成す部分群とする時,

$$\forall f \in L^1(H \backslash G/H) : \sigma\text{-inv} \implies (G, H) : \text{Gelfand ペア}$$

が成り立つ。 □

Proof. See [Lang] p.53. ■

Proposition 1.4 (Gelfand) .

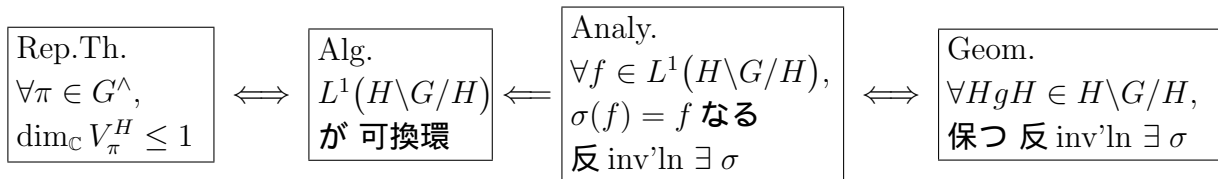
同上の設定の下,

$$\forall f \in L^1(G//H): \sigma\text{-inv} \implies (G, H): \text{強 Gelfand ペア}$$

が成り立つ。

□

これらは, 次の様に模式的に 纏められる ;

**1.3 Known results**

ペア (G, H) が Gelfand になる典型例を, 以下の表に纏める ;

pair (G, H)	反 inv'ln σ
cpt.Gp.Case $(G \times G, \Delta G)$	$(g, h) \mapsto (h^{-1}, g^{-1})$
$(O(n+m), O(n) \times O(m))$	$g \mapsto g^{-1}$
$(U_{E/F}(n+m), U_{E/F}(n) \times U_{E/F}(m))$	同上
$(GL_n(\mathbb{R}), O(n))$	$g \mapsto {}^t g$
$(U_{E/F}(n), O(n))$	同上
$(G, G^\tau), G: \text{Lie 群}, \tau: \text{inv'n}, G^\tau: \text{cpt}$	$g \mapsto \tau(g^{-1})$
$(G, K), G: \text{簡約群}, K: \text{maxl.cpt}$	Cartan 反 inv'ln

1.4 Classical applications

ペア (G, H) の (強)Gelfand 性は, G/H 上の調和解析以外に, 群 G 自体の表現, 表現のクラスの構造 etc. の理解にも 応用されてきた。いくつか例を挙げる。

(1) $(SO(3), SO(2))$ は, Gelfand ペアである。
 $\rightarrow L^2(G/H) \cong L^2(S^2)$ の既約分解 ; 球面調和解析

(2) $(\mathcal{S}_n, \mathcal{S}_{n-1}), (O(n), O(n-1)), (U_{E/F}(n), U_{E/F}(n-1))$ は, 強 Gelfand である。
 $\rightarrow$ 既約表現 $\rho \in G^\wedge$ の Gelfand-Zetlin 基底

(3) $(GL_n(\mathbb{R}), O(n)), (GL_n(\mathbb{C}), U_{E/F}(n))$ は, Gelfand ペアである。
 $\rightarrow$ spherical G -表現の分類 : $\pi \in GL_n(E)_{sphl}^\wedge \longleftrightarrow \text{chr.of } L^1(H \backslash G/H)$

2 Non-compact Case

2.1 Definitions and modification

F を 局所体, $\mathbb{G}$ をその上で定義された 簡約代数群とする。以下, $\text{ch } F \neq 2$ と仮定¹する。
 $G := \mathbb{G}(F)$, H を G の閉部分群 とする。この状況では, G, H の既約表現が 有限次元とは限らないので, 既約許容表現のみ扱うことにする。

Definition 2.1 .

簡約位相群の組 (G, H) が *Gelfand ペア* であるとは, 次を満たすことである ;

$$(3'') \quad \forall \pi \in G_{\text{adm}}^{\wedge} \text{ に対し, } \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, 1) \times \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi^{\vee}|_H, 1) \leq 1$$

多くの場合に, $(3'') \implies (3)$,

$$(3) \quad \forall \pi \in G_{\text{adm}}^{\wedge} \text{ に対し, } H\text{-dist'd 模型が 一次元以下 : } \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, 1) \leq 1 \quad \blacksquare$$

2.2 Gelfand-Kazhdan's dist'n criterion

Theorem 2.2 (Gelfand-Kazhdan) .

σ を G の反対合的自己同型 (*anti-inv'ln*), H は σ -安定とする時,

$$\forall \xi \in \mathcal{D}(H \backslash G / H) : \sigma\text{-inv} \implies (G, H) : \text{Gelfand ペア}$$

が成り立つ。 □

但し, $\mathcal{D}(G)$ は G 上の distribution の集合 $C_c^{\infty}(G)^*$, $\mathcal{D}(H \backslash G / H)$ は その両側 H -不変部分 $\mathcal{D}(G)^{H \times H}$ である。

Proof. See [Pra] Lem.4.2. ■

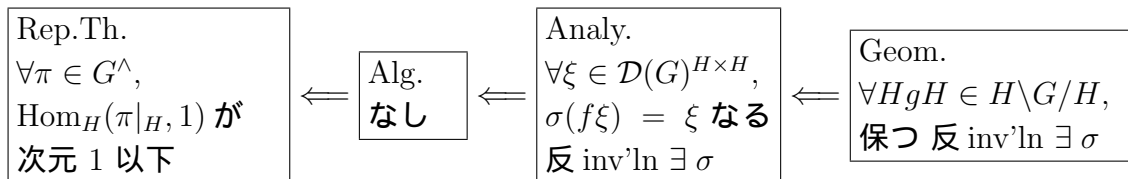
Proposition 2.3 (cf. [Gro] Prop.4.4.) .

H が *cpt.* かつ G の中で *open* とすると

$$C_c^{\infty}(H \backslash G / H) : \text{可換} \iff (G, H) : \text{Gelfand ペア}$$

が成り立つ。 □

Non-cpt. Case では, 相互関係は弱くなる ;



¹ $\text{ch } F = 2$ では, symmetric ペアの $H := G^u$ が簡約群とは限らなくなり, 不都合であるから。

2.3 Known results

ペア (G, H) が Gelfand になる例を, 以下の表に纏める ;

pair (G, H)	$F : p\text{-adic}$	$F : \text{Archi.}$
$(\text{GL}_n(E), \text{GL}_n(F)), E/F:\text{二次}$	[?]	[?]
$(\text{GL}_{n+m}, \text{GL}_n \times \text{GL}_m)$	[Ja-Ra-96]	同上
$(\text{O}(n+m), \text{O}(n) \times \text{O}(m))_{/\mathbb{C}}$	--	同上
$(\text{GL}_n, \text{O}(n))_{/\mathbb{C}}$	--	同上
$(\text{GL}_{2n}, \text{Sp}(2n))$	[He-Ra-90]	[?]
$(\text{GL}_{2n}, S, \psi_S)$	[Ja-Ra-96]	[Ai-Go-Ja-09]

但し, 最下段の S は **Shalika 部分群** $\left\{ \begin{bmatrix} g & u \\ & g \end{bmatrix} \mid g \in \text{GL}_n \right\}$, ψ_S は S の指標 $\psi(\text{tr } u)$ である。

以下の表は, ペア (G, H) が 強 Gelfand になる例である。

pair (G, H)	$F : p\text{-adic}$	$F : \text{Archi.}$
$(\text{GL}_{n+1}, \text{GL}_n)$	[Ai-Go-Ra-Sc]	[Ai-Go-09-1], [?]
$(\text{O}(V \oplus F), \text{O}(V))$	同上	[?]
$(\text{U}_{E/F}(V \oplus E), \text{U}_{E/F}(V))$	同上	同上

3 Rel. with Sym.pairs in Sphl.pairs

3.1 Spherical pairs

Definition 3.1 .

簡約群の組 (G, H) が **spherical ペア** であるとは, 次の条件を満たすことである ;

$$B \circ G/H \text{ が有限個の orbits 持つ}$$

但し, B は G の *Borel* 部分群である。 ■

Proposition 3.2 . 任意の体 F 上で, 次の関係が成り立つ。

$$(G, H) : \text{Gelfand ペア} \implies (G, H) : \text{spherical ペア}$$

Prrof. (G, H) が Gelfand であることから,

$$B \backslash G \circ H \text{ は有限個の orbits 持つ}$$

従って, (G, H) は spherical となる。 ■

Proposition 3.3 ([Kim-Vin] Cor.2, cf.[Gro] p.282) .

G が *cpt.* 連結半単純 実 Lie 群の時, 次の同値が成り立つ ;

$$(G, H) : \text{Gelfand ペア} \iff (G_{\mathbb{C}}, H_{\mathbb{C}}) : \text{spherical ペア}$$

Prroof. [Kim-Vin] Thm.2 に 松島の定理を併せる。 ■

3.2 Symmetric pairs

Definition 3.4 .

簡約群の組 (G, H, ι) が *symmetric ペア* であるとは, 次の条件を満たすことである ;

$$\text{閉部分群 } H \text{ は } G \text{ の } \iota\text{-fixed pt's. である : } H = G^{\iota}$$

但し, ι は G の *inv'ln* である。 ■

Proposition 3.5 任意の体 F 上で, 次の関係が成り立つ。

$$(G, H) : \text{symmetric ペア} \implies (G, H) : \text{spherical ペア}$$

Prroof. XXXXXXXXXXXXXXXX ■

実数体 $\mathbb{R}$ 上では, もっと強く

Proposition 3.6 ([Kra], cf.[Gro] p.282) .

G が *cpt.* 連結 単純 実 Lie 群の時, 次の同値が成り立つ ;

$$(G, H) : \text{symmetric ペア} \implies (G, H) : \text{spherical ペア}$$

Note : spherical 実等質空間 G/H が コンパクト の時, spherical ペア (G, H) は 分類されている。cf. [Kra],[Bri].

Definition 3.7 .

symmetric ペア (G, H, ι) が

- (1) *連結 である*とは, G/H が *Zariski 連結* であること。
 - (2) *good である*とは, $\forall$ 閉 $\text{coset} \in H \backslash G/H$ が σ -stable であること。
- 但し, 反 *inv'ln* を $\sigma(g) := \iota(g^{-1})$ と定めている。 ■

Fact : 複素数体 $\mathbb{C}$ 上では, 次が成り立つ。

$$\text{symmetric ペア } (G, H, \iota) : \text{連結} \implies (G, H, \iota) : \text{good}$$

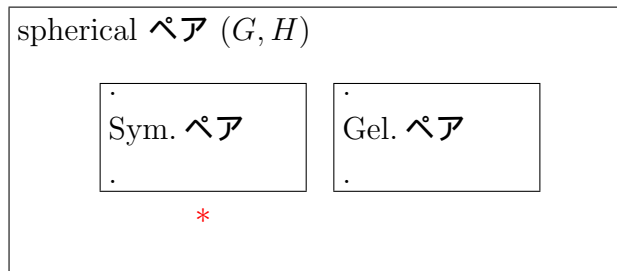
Conjecture 3.8 任意の体 F 上で,

$$\text{symmetric ペア } (G, H, \iota) : \text{good} \implies (G, G') : \text{Gelfand}$$

が 成り立つであろう。 □

Fact : F が p -進体の場合には, 上の Conj. は成り立つ。 ■

以上の事から, 次の包含関係を得る : (Sym. ペア と Gelfand ペア には 重なりがある)



Note : θ -lift 像 (その Poincaré 双対である special cyc.) では, 全ての保型形式 (全ての cyc.) を 覆い尽くせないので, symmetric でない spherical ペアの研究が 今後 重要となるであろう。

3.3 Regular pairs

Definition 3.9 .

$\text{symmetric ペア } (G, H)$ が **regular である**とは, 次の条件を満たすことである ;

G^σ 上の H -不変 $\text{dist}'n \forall \xi \in \mathcal{D}(G)^H$ が σ -不変である

■

「 $(G, H) : \text{Sym. ペア} \implies (G, H) : \text{Gel. ペア}$ 」を示すには, 次の Steps を踏む。

Step 1 : Sym. ペア (G, H) の good 性を示す。

Step 2 : (G, H) の reg. 性を, nilp't cone の外では 成立すると前提して 示す。

Step 3 : (G, H) の 全ての descendants を捜して, そいつらに対して Step 2 を行う。
ところが,

Conjecture 3.10 任意の体 F 上で,

任意の $\text{symmetric ペア } (G, H)$ は *regular*

であろう。 □

と 信じられているので, 上の Conjecture 3.8 が導かれる。

次は, reg. 性が確かめられている symmetric ペア のリストである。

pair (G, H)	$F : p\text{-adic}$	$F : \text{Archi.}$
cpt.Gp.Case $(G \times G, \Delta G)$	$\square$	$\square$
$(\text{GL}_n(E), \text{GL}_n(F))$, E/F :二次	[?]	[?]
$(\text{GL}_{n+m}, \text{GL}_n \times \text{GL}_m)$	[Ja-Ra-96]	同上
$(\text{O}(n+m), \text{O}(n) \times \text{O}(m))$	--	同上
$(\text{GL}_n, \text{O}(n))$	--	同上
$(\text{GL}_{2n}, \text{Sp}(2n))$	[He-Ra-90]	[?]
$(\text{Sp}(2n), \text{GL}(n))$	$\square$	[?]
$(E_6, \text{Sp}(8))$	[?]	[?]
$(E_6, \text{SL}_6 \times \text{SL}_2)$	同上	同上
(E_7, SL_8)	同上	同上
$(E_8, \text{SO}(10))$	同上	同上
$(F_4, \text{Sp}(6) \times \text{SL}_2)$	同上	同上
$(G_2, \text{SL}_2 \times \text{SL}_2)$	同上	同上

3.4 Open questions

(G, H) は sphel. ペア とする。 $d_H(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, 1)$ とする。

Q 1 : 任意の $\pi \in G_{adm}^\wedge$ に対して, $d_H(\pi) < \infty$ か?

Proposition 3.11 (Delorme, Sakellaridis-Venkatesh) .

多くの spherical ペア (G, H) で Q 1 は 肯定的。

Q 2 : π の関数として, $d_H(\pi)$ は 有界か?

Proposition 3.12 (Aizenbud-Gourevitch) .

任意の K に対して, $d_H(\pi)$ は $\mathcal{M}_K(G)$ 上で有界。

Q 3 : どんな sphl. ペアが Gelfand ペアになるのか?

Conjecture 3.13

$$(G, H) : \text{Gelfand ペア} \iff \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_H(\pi|_H, \tau) \leq 1, \quad \forall \pi : \text{P.S.}$$

参考文献

- [Bum] Bump, D., *Lie Groups*, GTM **225** (2004), Springer.
- [Gro] Gross, B., Some applications of Gelfand pairs to number theory. Bull. AMS. **24** (1991), 277–301.
- [Lang] Lang, S., $SL_2(\mathbb{R})$, GTM **105** (1985), Springer.
- [Pra] Prasad, D., Trilinear forms for representations of $GL(2)$ and local ε -factors, Comp. Math. **75** (1990), 1–46.
- [Ja-Ra-96] Jacquet, H.; Rallis, S., Uniqueness of linear periods, Comp. Math. **102** (1996), 65–123.
- [He-Ra-90] Heumos, M.; Rallis, S., Symplectic-Whittaker models for $GL(n)$, Pacific J. Math. **146** (1990), 247–279.
- [Ai-Go-Sa-09] Aizenbud, A.; Gourevitch, D.; Sayag, E., $(O(V \oplus F), O(V))$ is a Gelfand pair for any quadratic space V over a local field F , Math. Z. **261** (2009), 239–244.
- [Ai-Go-Sa-08] Aizenbud, A.; Gourevitch, D.; Sayag, E., $(GL_{n+1}(F), GL_n(F))$ is a Gelfand pair for any local field F , Comp. Math. **144** (2008), 1504–1524.
- [Ai-Go-09-1] Aizenbud, A.; Gourevitch, D., Multiplicity one theorem for $(GL_{n+1}(\mathbb{R}), GL_n(\mathbb{R}))$, Selecta Math. **15** (2009), 271–294.
- [Ai-Go-09-2] Aizenbud, A.; Gourevitch, D., Generalized Harish-Chandra descent, Gelfand pairs, and an Archimedean analog of Jacquet-Rallis’s theorem. With an appendix by the authors and Eitan Sayag, Duke Math. J. **149** (2009), 509–567.
- [Ai-Go-Ja-09] Aizenbud, A.; Gourevitch, D.; Jacquet, H., Uniqueness of Shalika functionals: the Archimedean case, Pacific J. Math. **243** (2009), 201–212.
- [Ai-Go-10] Aizenbud, A.; Gourevitch, D., Some regular symmetric pairs, Trans. AMS. **362** (2010), 3757–3777.
- [Ai-Go-Ra-Sc] Aizenbud, A.; Gourevitch, D.; Rallis, S.; Schiffmann, G., Multiplicity one theorems, Ann. of Math. **172** (2010), 1407–1434.
- [Kim-Vin] Vinberg, E.; Kimelfeld, B., Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subsets of semisimple Lie groups, Fnt’l. Anal. Appl. **12** (1978), 168–174.
- [Kra] Krämer, M., Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen, Comp. Math. **38** (1979), 129–153.
- [Bri] Brion, M., Classification des espaces homogènes sphériques, Comp. Math. **63** (1987), 189–208.