J. Weyman: Cohomology of Vector Bundles and Syzygies, Cambridge Tracts in Mathematics, 149, Cambridge University Press, 2003. xiv+371 pp.

橋本 光靖

k は体, m, n, t は自然数で $t \leq m \leq n$ とする．変数を成分とする $m \times n$ 行列 (x_{ij}) を考え, mn 変数多項式環 $S = k[x_{ij}]$ を考える．(x_{ij}) の t 次の小行列式全体で生成されるイデアルを I_t で表し, 行列式イデアルという．S/I_t の S 加群としてのシジジないしは極小自由分解を求めることは, 古くから可換環論における懸案事項だったが, $t = 1$ の場合 (変数 x_{ij} についての Koszul 複体), $t = m$ の場合 (Eagon–Northcott 複体 [5]), $t + 1 = m = n$ の場合 (Gulliksen–Negård 複体 [8]) など特別な場合に極小自由分解が具体的に構成されているだけで一般の場合は長年謎であった．ところが 1970 年代, Kempf [12] は等質ベクトル束の縮約 (collapsing) の概念を提出し, $\operatorname{Spec} S/I_t$ が標数 0 で高々有理特異点を持つことを示すとともに, S/I_t を縮約として眺めることが, そのシジジを求めるのにも有効であることを示唆した．Lascoux [14] は Kempf によって困難とされたこのプログラムを実行して見せ, 標数 0 において $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)$ 加群 $\mathrm{Tor}_i^S(S/I_t, S/I_1)$ をすべての i に対して決定してしまった．言い替えると, 標数 0 で S/I_t の極小自由分解を, 境界写像 (boundary map) が具体的に分からない (候補はあるのだが, 証明は出来ていなかった．[20] の序文参照) ことを除いて決定してしまった (後に Pragacz–Weyman [20] が境界写像も含めて決定している)．証明のアイデアの核心は, Kempf のアイデアによってシジジの複雑さが, 等質ベクトル束のコホモロジーの複雑さに置き換えられのだが, 一方で問題の等質ベクトル束のコホモロジーは Borel–Weil–Bott の定理によって組合せ論的に計算できてしまう点である．可換環論の長年の難問が表現論によってあっけなく解かれた大変印象的な仕事である．

Lascoux の成功のあと, この本が書かれるまでの３０年近くの間に, ベクトル束のコホモロジーの計算によってシジジを計算するという手法は著者の Weyman 氏らを中心に数々の成果を挙げてきた．その成果の集大成が本書であると言えよう．本書はベクトル束のコホモロジーの計算によってシジジを計算するというテクニックとその応用について書かれた本である．どちらかというと, 本書は応用の方に重点が置かれていて, 応用がなされるそれぞれの例, 即ち, 行列式多様体, ランク多様体, 巾零軌道の閉包, 終結式, 判別式と超行列式への入門書だと捉えた方が正しいかも知れない．著者の Weyman 氏は「自分は常に具体的な問題を扱うことにしている」とその信条を話していたことがあったが, その態度はここでも貫かれている．Kempf の示した一般論と, Lascoux の結果との間にはっきりとした距離があったように, それぞれの応用にはそれぞれの難しさがあることが見て取れ, そこに本書の面白さがあると感じる．表現論と可換代数が交錯する境界分野を具体例を通して語った良書であり, 特に可換代数と代数幾何の入門書を一通り読んだところ, という若い人たちにこの本

を奨めたい.

本書は大きく分けて３つの部分からなる. １から４章は準備である. 準備部分が長いが, 本書は代数幾何学についての [10] 程度の知識は仮定するが, 表現論に関しては一応何の知識も無しに読みはじめられるように工夫されている為である. これはこの本のひとつの特長として歓迎できる. 入門的準備にしては文献の紹介が少ない気もするが, 話題の選択も解説の丁寧さも丁度であり, 良く書かれている. １章は雑多な事項の準備である. 外積代数, 対称代数, divided power algebra などの多重線型代数, skew partition とタブローに関する組合せ論, Cohen–Macaulay 環, Gorenstein 環, 極小自由分解, Buchsbaum–Eisenbud の非輪状性判定法, 正規性判定アルゴリズムなどの可換代数, 捻じれ逆像, 固有射の双対性, 正準層と Grauert–Riemenschneider 消滅などの代数幾何と多岐にわたる. 多重線型代数については [18], 可換代数一般については [17], [3], 固有射の双対性については [9] 等でより詳しく学ぶことが出来るが, 慣れない事項が多いという方は, そんなものだと思って, 細部に拘らずにどんどん読み進んで当面は支障ないと思う. 必要に応じて他の文献も参照するなどして詳しく勉強すれば良い. これは以後の章についても言える. ２章は Schur 関手と Schur 複体に関する準備である. 一般線型群の (双対) Weyl 加群へのアプローチは色々可能だと思うが, 本書を読み進むためには, この章でなされている, 多重線型代数的な方法を知って置くことが大変重要である. 表現を基底を通して具体的に捉え, 表現の間の写像を多重線型代数的な手法で具体的に構成する必要があることがひとつの理由であり, もうひとつの理由は関手的に構成することで, 加群に対する構成をベクトル束に対する構成に容易に一般化できる点と, Schur 複体への一般化が必要な事である. Schur 関手, Schur 複体は標数 0 だと Young 対称子を使った定義も可能でずっと易しいのだが, ６章で正標数を扱いたいために苦労をしている. 著者のこだわりを感じる. Schur 関手と Schur 複体の構成と基本性質については Akin–Buchsbaum–Weyman の論文 [2] が読みやすいので参考になる. 彼らは Lascoux の成功を受け, 標数一般でも一般線型群の表現論が行列式イデアルの極小自由分解の構成に役に立つと考え, このような表現の構成を考えたのだと思う. 標数 0 の表現の同型に関するいくつかの公式は [15] の１章を参照すると良いと思う. ３章はグラスマン多様体, 旗多様体とその上の等質ベクトル束についてである. 一般線型群の作用を上手に利用して初歩的なことから解説してくれている. 章末の演習問題では等方グラスマン多様体についても扱っている. ４章は標数 0 での Bott の定理 (Borel–Weil–Bott の定理) について解説している. 一般線型群の場合について述べ, あとで一般の簡約群についても述べている. ２度手間のようだが, 本書で一般線型群の占めるウエートが大きいことと, 代数群についての色々な用語を知らない読者も想定されることから, 妥当な選択だと思う. 一部 Kempf の消滅定理など, 標数一般の事項も述べられている. 本章については [11] でより詳しいことが学べる.

５章は, 以後のすべての章で使われる一般論が展開される本書の理論的な面での中心部である. K は体, X は N 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^N_K$, V は m 次元射影多様体, $q : X \times V \to X$ は第１成分への射影, Z は V 上の自明なベクトル束としての $X \times V$ の部分束, $Y = q(Z)$, $q' : Z \to Y$ は q の制限とする. $\mathcal{O}_Z$ の $\mathcal{O}_{X\times V}$ 加群としての局所自由分解として Koszul 複体がとれるが, これを「q で X に押し出して」 $\mathcal{O}_X$ 加群の極小な複体 $F_\bullet$ を得, q' が双有理同値でかつうまいコホモロジーの消滅があるときには $F_\bullet$ が $\mathcal{O}_Y$ の自由分解となってくれ, おまけに Y が (標数 0 では) 有理特異点を持つことまでいえるというのが大体のアイデアである. この複体 $F_\bullet$ の各項は, $\bigwedge^\bullet((X \times V)/Z)^*$ のコホモロジーを使って表される. Kempf の論文 [12] では K は標数 0, V は G/P の形の等質空間, X は

G の線型表現であったが, 著者らによる改良を経て, [21] で提示された形で述べられている. この章の演習問題に見るとおり, 一般化されたこの設定はかなり一般的な状況をも含んでいる. そのほか, ８章で使う Gorenstein 性の証明のための一般的定理もこの章で用意されている.

６章から９章では, ５章のテクニックが応用される様々な例が解説されている. ただ, ６章から９章は５章の一般論を理解するためだけの単なる例の羅列ではない. それぞれの例はそれぞれの豊富な世界を持っていて, この本はそれらへの良い入門になっている.

６章は行列式多様体 (determinantal variety) を扱っている. 冒頭で述べたように, Kempf が開発した５章のテクニックが最初に応用された例である. もっとも分かりやすく, もっとも重要な例を扱った章といえる. 極小自由分解が具体的に組合せ論的に表示されるのが気持ちいい. 行列式多様体といえば, Bruns–Vetter による本 [4] が可換代数だけを仮定して行列式環 (determinantal ring) の様々な性質について論じた名著として思い浮かぶが, [4] で解説されなかった Lascoux の仕事を解説している点, 有理特異点になることや Gorenstein になるための条件を違ったアプローチで解説している点などを考えると, この章の内容は [4] と相互に補完し合う関係にあるといえる. また, この章では正標数で起こる現象についても調べられている. 等質ベクトル束のコホモロジーを Borel–Weil–Bott の定理によって調べる事によってシジジを調べるのが基本テクニックだった以上, 正標数で困難に遭遇するのは容易に想像できることだが, この章では Eagon–Northcott 複体を標数一般で正確に描き出し, また, Betti 数が標数に依存する (従って $\mathbb{Z}$ 上で極小自由分解が構成できない) 例についても著者らの流儀で見事に解説している. ただ, 標数一般, あるいは正標数での行列式イデアルの極小自由分解については, 小行列式のサイズが比較的大きな場合についての肯定的な結果 [1], [22], 第一シジジに関する蔵野の研究 [13] 等, 本書で扱っていない話題も結構ある. また, この章では著者等によって研究された様々なバリエーションについても詳しく述べてある. 対称行列の行列式多様体, 交代行列のパフィアン多様体がそれである. ７章ではランク多様体について扱っている. ６章で扱われた対称行列の行列式多様体と交代行列のパフィアン多様体はランク多様体の特別な場合なので, ランク多様体は行列式多様体のバリエーションのひとつだといえる. ランク多様体はグラスマン多様体の Plücker 埋め込みによるアフィン錐を特別な場合として含んでいるので, その高次のシジジを求める問題は１９世紀に Study によって調べられて以来の懸案といえる. ランク多様体に５章のテクニックが適用可能であることを用いてこれを最初に調べたのは Porras [19] である. 極小自由分解を克明に記述することまでは難しいが, 定義イデアルの記述, 標数 0 で有理特異点を持つことの証明, Gorenstein になる条件を与える等がなされている. また, 正標数で正規にならない例が与えられている.

８章は巾零軌道の閉包が扱われている. 行列式多様体に対しても見劣りしない面白い対象であると思う. 最初の２つの節では, 一般線型群についての巾零軌道の閉包を扱っていて, 取っつきが良いと感じた. 巾零軌道の閉包について, ５章の構成がここでも可能であることを示し, その応用として, 標数 0 で有理特異点を持ち, Gorenstein であるという Kraft–Procesi の定理の短い証明を与え, さらに定義イデアルの生成元についても調べている. これらは著者の仕事である. 元論文となっている著者の論文 [21] ではもう少し一般の「ランク多様体」についても扱っている (ここでの「ランク多様体」とは, Eisenbud–Saltman [6] で定義されたもので, ７章で扱われた対象と名前は同じだが別物である). やはりここでも極小自由分解を完全に描き出すことは困難すぎる. ３節以降では, 古典型を中心に, 一般の単純代数群のリー環への随伴作用による巾零軌道の閉包を扱っており, 正規化が有

理特異点を持ち Gorenstein になるという Hinich–Panyushev の定理や, 正規でない巾零軌道の閉包の例が扱われている.

９章では (一般化された) 終結式, 判別式, 超行列式 (hyperdeterminant) を扱っている. これらの対象は [7] で徹底して扱われている. 超行列式は Caylay によって調べられた由緒ある対象である. ここでは, これらの多項式がいつ行列式表示を持つかが特に問題にされている. 本書によると, この問題も Sylvester や Bezout が扱っており, 古典的だそうだ. ６〜９章では, 特に具体的な計算ということが大事にされているという印象を持った.

１章を除く各章の末尾には演習問題がついている. 教育的な計算練習の問題もあるが, 本文への補遺としての性格が強い問題も多い. 本文の理解に直接どうしても必要というわけではないが, 関連する重要な事項や追加的な例の紹介を証明なしで並べていて, 参考になる. 解く際の難易度にはあまり配慮がされていないのではないかと感じる.

本書には間違いが多い. １〜４章で特に目立つので注意したい. ミスプリントの類いが殆んどであるが, 重大な間違いもいくつかある. １ページの外積の定義が間違っている (標数 2 でおかしくなる). ３ページで $\Delta : \bigwedge^\bullet(E) \to \bigwedge^\bullet(E) \otimes \bigwedge^\bullet(E)$ が代数の準同型であると主張しているが, $\bigwedge^\bullet(E) \otimes \bigwedge^\bullet(E)$ の代数構造が skew tensor product であることに言及すべきであろう. ４ページ下から５行目 $\Sigma_{b_1} \times \Sigma_{b_s}$ は $\Sigma_{b_1} \times \cdots \times \Sigma_{b_s}$ の誤り. また, この式の左辺には i_s までしか登場しないのに右辺に i_r が登場しているのは何かがおかしい. ６ページ下から４行目 $u^{(p)}v^{(p)}$ は $u^p v^{(p)}$ の間違い. ６ページ下から３行目 $p^q!$ は $(p!)^q$ の間違い ... 重大な誤りを 2, 3 挙げると, ２４ページ (1.2.25) の $\omega_X = \mathcal{O}_X$ は誤り. ２１ページの 'ω_X is defined up to tensoring with an invertible sheaf' という記述もおかしい. １２３ページ (4.3.1) の直前の３行の主張は誤り. １２４ページ (4.3.3)(b) の $\Lambda = \mathbb{Z}^n$ は $\rho \in \Lambda$ に反して誤り. また, 標数 0 の仮定をつけ忘れている箇所がある. 例えば１０６ページの問題 5 は標数 0 の体上ならば正しいが一般には正しくない. １５７ページの問題３の前, $X = (S_d E)^*$ を d 次斉次多項式全体と見るには, 標数 0 の体を含むという仮定が必要. このような感じだが, この本の価値を大きく損ねるほどの誤りは見つけていない. Web page 上での正誤表の公開など, 著者の今後の対応に期待したい.

尚, この書評を書くに当って, Manivel による本書の featured review [16] を参考にした.

参考文献

[1] K. Akin, D. Buchsbaum, and J. Weyman, Resolutions of determinantal ideals: the submaximal minors, *Adv. Math.* **39** (1981), 1–30.

[2] K. Akin, D. Buchsbaum, and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. Math.* **44** (1982), 207–278.

[3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, first paperback edition, Cambridge (1998).

[4] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal rings*, *Lecture Notes in Mathematics* **1327**, Springer-Verlag (1988).

[5] J. A. Eagon and D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **269** (1962), 188–204.

[6] D. Eisenbud and D. Saltman, Rank varieties of matrices, *Commutative Algebra* (Berkeley, CA, 1987), 173–212, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **15**, Springer (1989).

[7] I. M. Gel'fand, M. M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Birkhäuser, Boston (1994).

[8] T. H. Gulliksen and O. G. Negård, Un complexe résolvant pour certains idéaux déterminantiels, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B* **274** (1972), A16–A18.

[9] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, *Lecture Notes in Mathematics* **20**, Springer-Verlag (1966).

[10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, *Graduate Texts in Math.* **52**, Springer-Verlag (1977).

[11] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Academic Press (1987).

[12] G. R. Kempf, On the collapsing of homogeneous bundles, *Invent. Math.* **37** (1976), 229–239.

[13] K. Kurano, The first syzygies of determinantal ideals, *J. Algebra* **124** (1989), 414–436.

[14] A. Lascoux, Syzygies des variétés déterminantales, *Adv. Math.* **30** (1978), 202–237.

[15] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford University Press (1995).

[16] L. Manivel, MR1988690 (2004d:13020), *Mathematical Review*.

[17] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, first paperback edition, Cambridge (1989).

[18] D. G. Northcott, *Multilinear Algebra*, Cambridge University Press, Cambridge (1984).

[19] O. Porras, Rank varieties and their resolutions, *J. Algebra* **186** (1996), 677–723.

[20] P. Pragacz and J. Weyman, Complexes associated with trace and evaluation. Another approach to Lascoux's resolution, *Adv. Math.* **57** (1985), 163–207.

[21] J. Weyman, The equations of conjugacy classes of nilpotent matrices, *Invent. Math.* **98** (1989), 229–245.

[22] S. J. Won, Minimal free resolutions of determinantal ideals: p-minors of $(p+2) \times (p+2)$ matrices, thesis, Yonsei Univ. (2000).

(はしもと みつやす・名大多元数理)