Purity of algebra maps and invariant theory

Mitsuyasu Hashimoto

Nagoya University

September 4, 2010

Pure submodule

A: 可換環.
A 加群の射 $\varphi : M \to N$ が A 純 (A-pure) または純であるとは, 任意の A 加群 L について,

$$1_L \otimes \varphi : L \otimes_A M \to L \otimes_A N$$

が単射であることをいう.

純な射は単射である ($L = A$ を考えよ). M が N の部分加群で, 埋入写像 $i : M \hookrightarrow N$ が純なとき, M は N の純部分加群であるという.

Pure submodule

A: 可換環.
A 加群の射 $\varphi : M \to N$ が A 純 (A-pure) または純であるとは, 任意の A 加群 L について,

$$1_L \otimes \varphi : L \otimes_A M \to L \otimes_A N$$

が単射であることをいう.

純な射は単射である ($L = A$ を考えよ). M が N の部分加群で, 埋入写像 $i : M \hookrightarrow N$ が純なとき, M は N の純部分加群であるという.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker} \varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker} \varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker}\varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker}\varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker} \varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker} \varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker}\varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker}\varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker}\varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker}\varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker} \varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker} \varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker}\varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker}\varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

純な加群準同型の基本性質

- 分裂単射は純.
- (Hochster–Roberts) $\varphi : M \to N$ が純で $\operatorname{Coker} \varphi$ が有限表示ならば φ は分裂単射.
- N が平坦 A 加群のとき, $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ φ が単射で $\operatorname{Coker} \varphi$ が A 平坦.
- 純な加群準同型の合成は純である.
- $\psi : L \to M$ と $\varphi : M \to N$ が A 準同型で $\varphi\psi$ が純ならば ψ は純.
- $\varphi : M \to N$ が純な A 加群準同型で B が A 代数の時, $1_B \otimes \varphi : B \otimes_A M \to B \otimes_A N$ は B 純.
- $\varphi : M \to N$ が純 $\Leftrightarrow$ 任意の A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \to N_{\mathfrak{m}}$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 純.

可換環の準同型の純性

定義 1

可換環の準同型 $f : A \to B$ が純であるとは, f を A 加群準同型と見て純であることをいう. f が分裂するとは, f を A 加群準同型と見て分裂単射であることをいう.

A が B の部分環とする. 埋入写像 $i : A \hookrightarrow B$ が純のとき, A は B の純部分環という. i が分裂するとき, A は B の直和因子部分環という.

可換環の準同型の純性

定義 1

可換環の準同型 $f : A \to B$ が純であるとは, f を A 加群準同型と見て純であることをいう. f が分裂するとは, f を A 加群準同型と見て分裂単射であることをいう.

A が B の部分環とする. 埋入写像 $i : A \hookrightarrow B$ が純のとき, A は B の純部分環という. i が分裂するとき, A は B の直和因子部分環という.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_{\mathfrak{m}} : A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{m}}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

簡単な性質

- 分裂する環準同型は純である.
- 純な環準同型の合成は純である.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$ が環準同型, gf が純ならば, f は純.
- 忠実平坦射は純である.
- $f : A \to B$ が純で, C が A 代数の時, $1_C \otimes f : C \to C \otimes_A B$ は純である.
- A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $f_\mathfrak{m} : A_\mathfrak{m} \to B_\mathfrak{m}$ が純ならば, f も純.

例 2 (渡辺敬一)

A が完備ではない Noether 局所環とするとき, 完備化 $A \to \hat{A}$ は忠実平坦だから純であるが, 分裂しない.

線形簡約群

純な環準同型は様々なよい性質をもち, 不変式論に応用を持つ. 特に線形簡約群とよばれるクラスの代数群の作用と相性が良い.

k は代数閉体, G は k 上の線型代数群とする. G 加群 M が単純とは, M の G 部分加群の個数が 2 であることをいう. M が半単純とは, 単純部分加群の和であることをいう. 任意の G 加群が半単純なとき, G は線形簡約という.

線形簡約群

純な環準同型は様々なよい性質をもち, 不変式論に応用を持つ. 特に線形簡約群とよばれるクラスの代数群の作用と相性が良い.

k は代数閉体, G は k 上の線型代数群とする. G 加群 M が単純とは, M の G 部分加群の個数が 2 であることをいう. M が半単純とは, 単純部分加群の和であることをいう. 任意の G 加群が半単純なとき, G は線形簡約という.

線形簡約群はどれくらいあるか

代数群 GL_1 の有限直積をトーラスという．根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラスである連結線型代数群を簡約群という．GL_n, SO_n, Sp_{2n} は簡約群である．簡約群の導来群, 有限直積は簡約群である．特に, SL_n, トーラスは簡約群である．

定理 3 (Nagata)

$\mathrm{char}(k) = 0$ のとき, 線型代数群 G が線型簡約であることと G の単位連結成分 G° が簡約であることは同値である．一方, $\mathrm{char}(k) = p > 0$ のとき, G が線型簡約であることと, G° がトーラスで, 有限群 G/G° の位数が p で割れないことは同値である．

線形簡約群はどれくらいあるか

代数群 GL_1 の有限直積をトーラスという．根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラスである連結線型代数群を簡約群という．GL_n, SO_n, Sp_{2n} は簡約群である．簡約群の導来群, 有限直積は簡約群である．特に, SL_n, トーラスは簡約群である．

定理 3 (Nagata)

$\mathrm{char}(k) = 0$ のとき, 線型代数群 G が線型簡約であることと G の単位連結成分 G° が簡約であることは同値である．一方, $\mathrm{char}(k) = p > 0$ のとき, G が線型簡約であることと, G° がトーラスで, 有限群 G/G° の位数が p で割れないことは同値である．

線形簡約群はどれくらいあるか

代数群 GL_1 の有限直積をトーラスという．根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラスである連結線型代数群を簡約群という．GL_n, SO_n, Sp_{2n} は簡約群である．簡約群の導来群，有限直積は簡約群である．特に，SL_n，トーラスは簡約群である．

定理 3 (Nagata)

$\mathrm{char}(k) = 0$ のとき，線型代数群 G が線型簡約であることと G の単位連結成分 G° が簡約であることは同値である．一方，$\mathrm{char}(k) = p > 0$ のとき，G が線型簡約であることと，G° がトーラスで，有限群 G/G° の位数が p で割れないことは同値である．

線形簡約群はどれくらいあるか

代数群 GL_1 の有限直積をトーラスという．根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラスである連結線型代数群を簡約群という．GL_n, SO_n, Sp_{2n} は簡約群である．簡約群の導来群, 有限直積は簡約群である．特に, SL_n, トーラスは簡約群である．

定理 3 (Nagata)

$\mathrm{char}(k) = 0$ のとき, 線型代数群 G が線型簡約であることと G の単位連結成分 G° が簡約であることは同値である．一方, $\mathrm{char}(k) = p > 0$ のとき, G が線型簡約であることと, G° がトーラスで, 有限群 G/G° の位数が p で割れないことは同値である．

Reynolds 作用素

G が線型代数群, M が半単純 G 加群とする．自明表現ではない M の単純部分加群全部の和を $U(M)$ とするとき, $M = M^G \oplus U(M)$. この直和分解に応じた射影 $\phi_M : M \to M^G$ は, 埋入 $i_M : M^G \to M$ の G 加群圏での unique な左逆. ϕ_M を半単純加群 M の **Reynolds 作用素** という.

Example 1

G は有限群, G の位数 $\#G$ は k で 0 でないとする．このとき, Maschke の定理により, G は線型簡約である．G 加群 M について, Reynolds 作用素は, $\rho = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} g$ の作用である.

Reynolds 作用素

G が線型代数群, M が半単純 G 加群とする．自明表現ではない M の単純部分加群全部の和を $U(M)$ とするとき, $M = M^G \oplus U(M)$. この直和分解に応じた射影 $\phi_M : M \to M^G$ は, 埋入 $i_M : M^G \to M$ の G 加群圏での unique な左逆. ϕ_M を半単純加群 M の Reynolds 作用素 という.

Example 1

G は有限群, G の位数 $\#G$ は k で 0 でないとする．このとき, Maschke の定理により, G は線型簡約である．G 加群 M について, Reynolds 作用素は, $\rho = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g$ の作用である．

G 代数の Reynolds 作用素

G の作用する可換 k 代数を単に G 代数ということにする.

Lemma 2

S が G 加群と見て半単純な G 代数とする. このとき, *Reynolds* 作用素 $\phi_S : S \to S^G$ は S^G 線型写像である. 特に, S^G は S の直和因子部分環である. 特に, S^G は S の純部分環である.

G 代数の Reynolds 作用素

G の作用する可換 k 代数を単に G 代数ということにする．

Lemma 2

S が G 加群と見て半単純な G 代数とする．このとき，*Reynolds* 作用素 $\phi_S : S \to S^G$ は S^G 線型写像である．特に，S^G は S の直和因子部分環である．特に，S^G は S の純部分環である．

不変式環の環論的性質

疑問 4

S の良い環論的性質はいつ S^G に伝播するか.

G が線型簡約のとき, (もう少し一般に, S が半単純のとき) 次の疑問は上の疑問の一般化になる.

疑問 5

可換環 B の良い性質は, いつ純部分環 A に伝播するか.

不変式環の環論的性質

疑問 4

S の良い環論的性質はいつ S^G に伝播するか.

G が線型簡約のとき, (もう少し一般に, S が半単純のとき) 次の疑問は上の疑問の一般化になる.

疑問 5

可換環 B の良い性質は, いつ純部分環 A に伝播するか.

不変式環の環論的性質

疑問 4

S の良い環論的性質はいつ S^G に伝播するか.

G が線型簡約のとき, (もう少し一般に, S が半単純のとき) 次の疑問は上の疑問の一般化になる.

疑問 5

可換環 B の良い性質は, いつ純部分環 A に伝播するか.

巡回的な純性, 単項的な純性

定義 6

可換環 A の上の加群の準同型 $\varphi : M \to N$ が巡回的に純 (resp. 単項的に純) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について, $1 \otimes \varphi : A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A N$ が単射 (これは $\varphi^{-1}(IN) = IM$ と同じ) であることをいう. 環準同型 $f : A \to B$ が巡回的に純, 単項的に純とは, A 加群準同型としてそうであることをいう. A が B の部分環のときには, 巡回的純部分環, 単項的純部分環という.

注意 7

単項的に純の方は一般的な定義ではなく, ここだけのものである.

巡回的な純性, 単項的な純性

定義 6

可換環 A の上の加群の準同型 $\varphi : M \to N$ が巡回的に純 (resp. 単項的に純) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について, $1 \otimes \varphi : A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A N$ が単射 (これは $\varphi^{-1}(IN) = IM$ と同じ) であることをいう. 環準同型 $f : A \to B$ が巡回的に純, 単項的に純とは, A 加群準同型としてそうであることをいう. A が B の部分環のときには, 巡回的純部分環, 単項的純部分環という.

注意 7

単項的に純の方は一般的な定義ではなく, ここだけのものである.

巡回的な純性, 単項的な純性

定義 6

可換環 A の上の加群の準同型 $\varphi : M \to N$ が巡回的に純 (resp. 単項的に純) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について, $1 \otimes \varphi : A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A N$ が単射 (これは $\varphi^{-1}(IN) = IM$ と同じ) であることをいう．環準同型 $f : A \to B$ が巡回的に純, 単項的に純とは, A 加群準同型としてそうであることをいう．A が B の部分環のときには, 巡回的純部分環, 単項的純部分環という．

注意 7

単項的に純の方は一般的な定義ではなく, ここだけのものである．

巡回的な純性, 単項的な純性

定義 6

可換環 A の上の加群の準同型 $\varphi : M \to N$ が巡回的に純 (resp. 単項的に純) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について, $1 \otimes \varphi : A/I \otimes_A M \to A/I \otimes_A N$ が単射 (これは $\varphi^{-1}(IN) = IM$ と同じ) であることをいう. 環準同型 $f : A \to B$ が巡回的に純, 単項的に純とは, A 加群準同型としてそうであることをいう. A が B の部分環のときには, 巡回的純部分環, 単項的純部分環という.

注意 7

単項的に純の方は一般的な定義ではなく, ここだけのものである.

簡単な注意

注意 8

A が B の部分環とする．A が B の巡回的純部分環 (resp. 単項的純部分環) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について $IB \cap A = I$ であることに他ならない．純部分環は巡回的純部分環．巡回的純部分環は単項的純部分環.

注意 9

任意の線形代数群 G と G 代数 S について, S が整域ならば, $(aS)^G = aS^G$ なので, $S^G \hookrightarrow S$ は単項的純である.

簡単な注意

注意 8

A が B の部分環とする．A が B の巡回的純部分環 (resp. 単項的純部分環) とは, 任意の A のイデアル I (resp. 単項イデアル $I = aA$) について $IB \cap A = I$ であることに他ならない．純部分環は巡回的純部分環．巡回的純部分環は単項的純部分環.

注意 9

任意の線形代数群 G と G 代数 S について, S が整域ならば, $(aS)^G = aS^G$ なので, $S^G \hookrightarrow S$ は単項的純である.

Hochster の定理

定理 10 (Hochster)

$(R, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環とする．次の条件は同値である．

- 任意の R 加群 M と準同型 $\varphi : R \to M$ について，φ が巡回的に純ならば，純である．
- R が Artinian Gorenstein であるか，または，$\operatorname{depth} R \geq 1$ であって，もし $P \in \operatorname{Ass}(\hat{R})$ であって，$\dim \hat{R}/P = 1$ ならば，$\hat{R}/P \oplus \hat{R}/P$ は $\hat{R}$ に埋め込めない．ここに $\hat{R}$ は R の完備化．

系 11

R が Noether 正規環，$f : R \to S$ が巡回的に純な環準同型であれば，f は純である．

Hochster の定理

定理 10 (Hochster)

$(R, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環とする．次の条件は同値である．

- 任意の R 加群 M と準同型 $\varphi : R \to M$ について, φ が巡回的に純ならば, 純である．
- R が Artinian Gorenstein であるか，または, depth $R \geq 1$ であって, もし $P \in \mathrm{Ass}(\hat{R})$ であって, $\dim \hat{R}/P = 1$ ならば, $\hat{R}/P \oplus \hat{R}/P$ は $\hat{R}$ に埋め込めない．ここに $\hat{R}$ は R の完備化．

系 11

R が Noether 正規環, $f : R \to S$ が巡回的に純な環準同型であれば, f は純である．

Hochster の定理

定理 10 (Hochster)

$(R, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環とする．次の条件は同値である．

- 任意の R 加群 M と準同型 $\varphi : R \to M$ について，φ が巡回的に純ならば，純である．
- R が Artinian Gorenstein であるか，または，$\operatorname{depth} R \geq 1$ であって，もし $P \in \operatorname{Ass}(\hat{R})$ であって，$\dim \hat{R}/P = 1$ ならば，$\hat{R}/P \oplus \hat{R}/P$ は $\hat{R}$ に埋め込めない．ここに $\hat{R}$ は R の完備化．

系 11

R が Noether 正規環，$f : R \to S$ が巡回的に純な環準同型であれば，f は純である．

Hochster の定理

定理 10 (Hochster)

$(R, \mathfrak{m})$ が Noether 局所環とする．次の条件は同値である．

- 任意の R 加群 M と準同型 $\varphi : R \to M$ について, φ が巡回的に純ならば, 純である．
- R が Artinian Gorenstein であるか，または, $\operatorname{depth} R \geq 1$ であって，もし $P \in \operatorname{Ass}(\hat{R})$ であって, $\dim \hat{R}/P = 1$ ならば, $\hat{R}/P \oplus \hat{R}/P$ は $\hat{R}$ に埋め込めない．ここに $\hat{R}$ は R の完備化．

系 11

R が Noether 正規環, $f : R \to S$ が巡回的に純な環準同型であれば, f は純である．

整閉性の伝播

補題 12

B が整閉整域有限個の直積, A が B の単項的純部分環とすると, A は $Q(A)$ 内で整閉である．ここに $Q(A)$ は全商環.

系 13

S が整閉整域である G 代数の時, S^G も整閉整域である．

注意 14

R が可換環, H が平坦な R 群スキーム, S が整閉整域有限個の直積である H 代数の時, S^H は整閉整域有限個の直積である．

整閉性の伝播

補題 12

B が整閉整域有限個の直積, A が B の単項的純部分環とすると, A は $Q(A)$ 内で整閉である．ここに $Q(A)$ は全商環.

系 13

S が整閉整域である G 代数の時, S^G も整閉整域である.

注意 14

R が可換環, H が平坦な R 群スキーム, S が整閉整域有限個の直積である H 代数の時, S^H は整閉整域有限個の直積である.

整閉性の伝播

補題 12

B が整閉整域有限個の直積, A が B の単項的純部分環とすると, A は $Q(A)$ 内で整閉である. ここに $Q(A)$ は全商環.

系 13

S が整閉整域である G 代数の時, S^G も整閉整域である.

注意 14

R が可換環, H が平坦な R 群スキーム, S が整閉整域有限個の直積である H 代数の時, S^H は整閉整域有限個の直積である.

局所化

定理 15 (Hochster–Huneke, Hochster)

B が可換環, A がその純部分環とする．もし, A が Noether 環であれば, A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, ある B の極大イデアル $\mathfrak{n}$ であって $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ であるものが存在して, $A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{n}}$ も純である．

上の定理により, B の良い性質が純部分環 A に遺伝するかどうかを議論するのに, 局所環の局所射のみを扱えば良いことがある．

局所化

定理 15 (Hochster–Huneke, Hochster)

B が可換環, A がその純部分環とする. もし, A が Noether 環であれば, A の任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, ある B の極大イデアル $\mathfrak{n}$ であって $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$ であるものが存在して, $A_{\mathfrak{m}} \to B_{\mathfrak{n}}$ も純である.

上の定理により, B の良い性質が純部分環 A に遺伝するかどうかを議論するのに, 局所環の局所射のみを扱えば良いことがある.

Noether 性

補題 16

ネーター環の巡回的純部分環はネーター環である.

系 17

B が Noether 正規環, A が B の巡回的純部分環とすると, A は Noether 正規環である. 特に A は B の純部分環である.

Noether 性

補題 16

ネーター環の巡回的純部分環はネーター環である.

系 17

B が Noether 正規環, A が B の巡回的純部分環とすると, A は Noether 正規環である. 特に A は B の純部分環である.

有限生成性

定理 18 (H—)

R がネーター環, B が有限生成 R 代数, A が B の R 部分代数で B の純部分環とする．このとき A は R 上有限生成である．

系 19

G が代数群, S が半単純な G 代数とする．S がネーターなら, S^G もそうである．S が有限生成なら, S^G もそうである．

注意 20

G が線型簡約のときの証明は Hilbert の時代から知られている．

有限生成性

定理 18 (H—)

R がネーター環, B が有限生成 R 代数, A が B の R 部分代数で B の純部分環とする．このとき A は R 上有限生成である．

系 19

G が代数群, S が半単純な G 代数とする．S がネーターなら, S^G もそうである．S が有限生成なら, S^G もそうである．

注意 20

G が線型簡約のときの証明は Hilbert の時代から知られている．

有限生成性

定理 18 (H—)

R がネーター環, B が有限生成 R 代数, A が B の R 部分代数で B の純部分環とする．このとき A は R 上有限生成である．

系 19

G が代数群, S が半単純な G 代数とする．S がネーターなら, S^G もそうである．S が有限生成なら, S^G もそうである．

注意 20

G が線型簡約のときの証明は Hilbert の時代から知られている．

Cohen–Macaulay 性

定理 21 (Hochster–J. Roberts)

G が体上の線型簡約群で S が正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

定理 22 (Hochster–Huneke)

B が体を含む正則環とする. A が B の純部分環ならば A は Cohen–Macaulay である.

系 23

G が線形代数群, S が半単純かつ正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

Cohen–Macaulay 性

定理 21 (Hochster–J. Roberts)

G が体上の線型簡約群で S が正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

定理 22 (Hochster–Huneke)

B が体を含む正則環とする. A が B の純部分環ならば A は Cohen–Macaulay である.

系 23

G が線形代数群, S が半単純かつ正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

Cohen–Macaulay 性

定理 21 (Hochster–J. Roberts)

G が体上の線型簡約群で S が正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

定理 22 (Hochster–Huneke)

B が体を含む正則環とする. A が B の純部分環ならば A は Cohen–Macaulay である.

系 23

G が線形代数群, S が半単純かつ正則な G 代数とすると, S^G は Cohen–Macaulay である.

Boutot の定理

定理 24 (Boutot)

K が標数 0 の体, B は K 代数で, A は B の純部分環とする. B も A も K 上本質的に有限型 (すなわち, 有限生成代数の局所化) と仮定する. もし B が高々有理特異点を持てば, A もそうである.

系 25

k が標数 0, G が k 上の線型代数群, S が半単純 G 代数で有限型で高々有理特異点を持てば, S^G も有限型で高々有理特異点をもつ.

注意 26

標数 0 の体上本質的に有限型な正則環は高々有理特異点をもつ. 高々有理特異点をもてば Cohen–Macaulay normal である.

Boutot の定理

定理 24 (Boutot)

K が標数 0 の体, B は K 代数で, A は B の純部分環とする. B も A も K 上本質的に有限型 (すなわち, 有限生成代数の局所化) と仮定する. もし B が高々有理特異点を持てば, A もそうである.

系 25

k が標数 0, G が k 上の線型代数群, S が半単純 G 代数で有限型で高々有理特異点を持てば, S^G も有限型で高々有理特異点をもつ.

注意 26

標数 0 の体上本質的に有限型な正則環は高々有理特異点をもつ. 高々有理特異点をもてば Cohen–Macaulay normal である.

Boutot の定理

定理 24 (Boutot)

K が標数 0 の体, B は K 代数で, A は B の純部分環とする. B も A も K 上本質的に有限型 (すなわち, 有限生成代数の局所化) と仮定する. もし B が高々有理特異点を持てば, A もそうである.

系 25

k が標数 0, G が k 上の線型代数群, S が半単純 G 代数で有限型で高々有理特異点を持てば, S^G も有限型で高々有理特異点をもつ.

注意 26

標数 0 の体上本質的に有限型な正則環は高々有理特異点をもつ. 高々有理特異点をもてば Cohen–Macaulay normal である.

F 純性

標数 p の可換環 A が F 純であるとは, Frobenius 射 $F : A \to {}^1A$ ($F(a) = {}^1a^p$) が純であることである.

注意 27

標数 p の完全体上の代数多様体 X が Frobenius split であるとは, $\mathcal{O}_X$ 加群層の準同型 $\mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_{{}^1X}$ が分裂単射であることをいう. ここに $F : {}^1X \to X$ は Frobenius 射. $X = \operatorname{Spec} A$ がアフィンのときには, これは A が F 純なことと同値.

F 純性

標数 p の可換環 A が F 純であるとは, Frobenius 射 $F : A \to {}^1A$ $(F(a) = {}^1a^p)$ が純であることである.

注意 27

標数 p の完全体上の代数多様体 X が Frobenius split であるとは, $\mathcal{O}_X$ 加群層の準同型 $\mathcal{O}_X \to F_*\mathcal{O}_{{}^1X}$ が分裂単射であることをいう. ここに $F : {}^1X \to X$ は Frobenius 射. $X = \operatorname{Spec} A$ がアフィンのときには, これは A が F 純なことと同値.

密着閉包

標数 p の可換ネーター環 R の上の加群 M とその部分加群 N について,

$$N_M^* := \{x \in M \mid \exists c \in R^\circ\ \exists e_0 \geq 1\ \forall e \geq e_0 \\ x \otimes {}^e c \in M/N \otimes_R {}^e R \text{ は零}\},$$

とおき, N_M^* を N の M における密着閉包という. ここに, $R^\circ := R \setminus \bigcup_{P \in \mathrm{Min}(R)} P$, $\mathrm{Min}(R)$ は R の極小素イデアルの全体. $N_M^* = N$ のとき, N は M において密着閉という. $M = R$ のときは, N_M^* は N^* と表し, イデアル N の密着閉包という. $N^* = N$ のとき, イデアル N は密着閉という.

F 正則性

定義 28

標数 p のネーター環 R について,

- R が強 F 正則であるとは, 任意の R 加群 M と任意の M の R 部分加群 N について N が M において密着閉であることをいう.
- R が弱 F 正則 であるとは, R の任意のイデアルが密着閉であることをいう.
- R が F 正則であるとは, 任意の R の素イデアル P について, 局所化 R_P が弱 F 正則であることをいう.
- R が F 有理であるとは, 任意の R のイデアル I について, I が height I 個の元で生成されるならば I が密着閉であることをいう.

F 正則性

定義 28

標数 p のネーター環 R について,

- R が強 F 正則であるとは, 任意の R 加群 M と任意の M の R 部分加群 N について N が M において密着閉であることをいう.
- R が弱 F 正則 であるとは, R の任意のイデアルが密着閉であることをいう.
- R が F 正則であるとは, 任意の R の素イデアル P について, 局所化 R_P が弱 F 正則であることをいう.
- R が F 有理であるとは, 任意の R のイデアル I について, I が height I 個の元で生成されるならば I が密着閉であることをいう.

F 正則性

定義 28

標数 p のネーター環 R について,

- R が強 F 正則であるとは, 任意の R 加群 M と任意の M の R 部分加群 N について N が M において密着閉であることをいう.
- R が弱 F 正則 であるとは, R の任意のイデアルが密着閉であることをいう.
- R が F 正則であるとは, 任意の R の素イデアル P について, 局所化 R_P が弱 F 正則であることをいう.
- R が F 有理であるとは, 任意の R のイデアル I について, I が height I 個の元で生成されるならば I が密着閉であることをいう.

F 正則性

定義 28

標数 p のネーター環 R について,

- R が強 F 正則であるとは, 任意の R 加群 M と任意の M の R 部分加群 N について N が M において密着閉であることをいう.
- R が弱 F 正則 であるとは, R の任意のイデアルが密着閉であることをいう.
- R が F 正則であるとは, 任意の R の素イデアル P について, 局所化 R_P が弱 F 正則であることをいう.
- R が F 有理であるとは, 任意の R のイデアル I について, I が height I 個の元で生成されるならば I が密着閉であることをいう.

F 正則性

定義 28

標数 p のネーター環 R について,

- R が強 F 正則であるとは, 任意の R 加群 M と任意の M の R 部分加群 N について N が M において密着閉であることをいう.
- R が弱 F 正則 であるとは, R の任意のイデアルが密着閉であることをいう.
- R が F 正則であるとは, 任意の R の素イデアル P について, 局所化 R_P が弱 F 正則であることをいう.
- R が F 有理であるとは, 任意の R のイデアル I について, I が height I 個の元で生成されるならば I が密着閉であることをいう.

注意

注意 29

正則 $\Rightarrow$ 強 F 正則 $\Rightarrow$ F 正則 $\Rightarrow$ 弱 F 正則 $\Rightarrow$ F 有理である．十分弱い条件の下に弱 F 正則から強 F 正則が出るのではないかと考える人もいるが, 長年経ても部分的な結果しかない.

注意 30

弱 F 正則ならば, F 純である．また, F 有理かつ Gorenstein ならば, 強 F 正則である.

注意

注意 29

正則 $\Rightarrow$ 強 F 正則 $\Rightarrow$ F 正則 $\Rightarrow$ 弱 F 正則 $\Rightarrow$ F 有理である．十分弱い条件の下に弱 F 正則から強 F 正則が出るのではないかと考える人もいるが, 長年経ても部分的な結果しかない.

注意 30

弱 F 正則ならば, F 純である．また, F 有理かつ Gorenstein ならば, 強 F 正則である.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F: R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限性

定義 31

標数 p の可換環 R が F 有限であるとは, $F : R \to {}^1R$ が有限射であることをいう.

- 完全体は F 有限である.
- F 有限な可換環上本質的に有限型な代数は F 有限である. F 有限なネーター局所環の完備化は F 有限である.
- (Fogarty) R が F 有限なネーター環で, G が R に作用する有限群とすると,
  - R^G は F 有限なネーター環である.
  - R は有限 R^G 加群である.
- (Kunz) F 有限なネーター環はエクセレント環.

F 有限の場合の強 F 正則性

補題 32

R が F 有限な標数 p のネーター環のとき, 次は同値.

- R は強 F 正則.
- 任意の $c \in R^\circ$ に対して, ある $e > 0$ が存在して,

$$R \xrightarrow{{}^e cF^e} {}^e R \qquad (a \mapsto {}^e(ca^{p^e}))$$

が R 加群準同型として分裂単射.

F 有限の場合の強 F 正則性

補題 32

R が F 有限な標数 p のネーター環のとき, 次は同値.

- R は強 F 正則.
- 任意の $c \in R^\circ$ に対して, ある $e > 0$ が存在して,

$$R \xrightarrow{{}^e cF^e} {}^e R \qquad (a \mapsto {}^e(ca^{p^e}))$$

が R 加群準同型として分裂単射.

F 有限の場合の強 F 正則性

補題 32

R が F 有限な標数 p のネーター環のとき, 次は同値.

- R は強 F 正則.
- 任意の $c \in R^\circ$ に対して, ある $e > 0$ が存在して,

$$R \xrightarrow{{}^e cF^e} {}^e R \qquad (a \mapsto {}^e(ca^{p^e}))$$

が R 加群準同型として分裂単射.

大域的 F 正則性 (1)

補題 33 (Smith)

標数 p の完全体上の射影的多様体 X について次は同値.

- X のある斉次座標環 R があって, R は強 F 正則.
- X の任意の Cartier で豊富な因子 D について, 切断環 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(nD))$ は強 F 正則.
- X のある Cartier で豊富で有効な因子 D について, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{{}^eX} \to F_*^{e}\,{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射となる e が存在して, $X-D$ は (すべての局所環が) 強 F 正則.
- X の任意の Cartier な有効因子 D について, ある e が存在して, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{{}^eX} \to F_*^{e}\,{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射.

大域的 F 正則性 (1)

補題 33 (Smith)

標数 p の完全体上の射影的多様体 X について次は同値.

- X のある斉次座標環 R があって, R は強 F 正則.
- X の任意の Cartier で豊富な因子 D について, 切断環 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(nD))$ は強 F 正則.
- X のある Cartier で豊富で有効な因子 D について, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F^e_* \mathcal{O}_{^eX} \to F^{e}_*{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射となる e が存在して, $X - D$ は (すべての局所環が) 強 F 正則.
- X の任意の Cartier な有効因子 D について, ある e が存在して, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F^e_* \mathcal{O}_{^eX} \to F^{e}_*{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射.

大域的 F 正則性 (1)

補題 33 (Smith)

標数 p の完全体上の射影的多様体 X について次は同値.

- X のある斉次座標環 R があって, R は強 F 正則.
- X の任意の Cartier で豊富な因子 D について, 切断環 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(nD))$ は強 F 正則.
- X のある Cartier で豊富で有効な因子 D について, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{^eX} \to F_*^{e\,e}\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射となる e が存在して, $X-D$ は (すべての局所環が) 強 F 正則.
- X の任意の Cartier な有効因子 D について, ある e が存在して, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{^eX} \to F_*^{e\,e}\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射.

大域的 F 正則性 (1)

補題 33 (Smith)

標数 p の完全体上の射影的多様体 X について次は同値.

- X のある斉次座標環 R があって, R は強 F 正則.
- X の任意の Cartier で豊富な因子 D について, 切断環 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(nD))$ は強 F 正則.
- X のある Cartier で豊富で有効な因子 D について, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F^e_*\mathcal{O}_{^eX} \to F^e_*{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射となる e が存在して, $X-D$ は (すべての局所環が) 強 F 正則.
- X の任意の Cartier な有効因子 D について, ある e が存在して, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F^e_*\mathcal{O}_{^eX} \to F^e_*{}^e\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射.

大域的 F 正則性 (1)

補題 33 (Smith)

標数 p の完全体上の射影的多様体 X について次は同値.

- X のある斉次座標環 R があって, R は強 F 正則.
- X の任意の Cartier で豊富な因子 D について, 切断環 $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{O}_X(nD))$ は強 F 正則.
- X のある Cartier で豊富で有効な因子 D について, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{^eX} \to F_*^{e\,e}\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射となる e が存在して, $X - D$ は (すべての局所環が) 強 F 正則.
- X の任意の Cartier な有効因子 D について, ある e が存在して, 合成射 $\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^e} F_*^e\mathcal{O}_{^eX} \to F_*^{e\,e}\mathcal{O}_X(D)$ が分裂単射.

大域的 F 正則性 (2)

定義 34 (Smith)

上記の同値な条件をみたす X は大域的に F 正則 (globally F-regular) という.

F 有理性と Cohen–Macaulay 性

定理 35 (Hochster–Huneke, Vélez)

R は標数 p の F 有理なネーター環とする．このとき，R は正規である．もしさらに，R が Cohen–Macaulay 環の準同型像であるか，または，R がエクセレント環であれば，R は Cohen–Macaulay である．

Smith – 原の定理

定理 36 (Smith–原 伸生)

A は標数 0 の体 K 上有限生成環とする．A が高々有理特異点を持つための必要充分条件は，ある $\mathbb{Z}$ 上有限生成な K の部分環 R と，有限生成平坦な R 代数 A_R が存在し，$A \cong K \otimes_R A_R$ かつ，任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について，$A_R \otimes_A R/\mathfrak{m}$ が F 有理であることである．

注意 37

F 有理性は正標数における有理特異点の対応物と考えられる．しかし . . .

Smith – 原の定理

定理 36 (Smith–原 伸生)

A は標数 0 の体 K 上有限生成環とする. A が高々有理特異点を持つための必要充分条件は, ある $\mathbb{Z}$ 上有限生成な K の部分環 R と, 有限生成平坦な R 代数 A_R が存在し, $A \cong K \otimes_R A_R$ かつ, 任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $A_R \otimes_A R/\mathfrak{m}$ が F 有理であることである.

注意 37

F 有理性は正標数における有理特異点の対応物と考えられる. しかし . . .

渡辺による “Boutot の定理の反例”

例 38 (渡辺敬一)

正標数の体上有限生成 F 有理な $\mathbb{N}$-graded algebra A で, 次数 0 の成分 A_0 が F 有理でない例.

注意 39

$\mathbb{Z}$-graded algebra A には１次元トーラス GL_1 が作用し, その不変式環は A_0 である. 線型簡約群の不変式環 (従って直和因子環) に F 有理性は一般には伝播しない.

渡辺による “Boutot の定理の反例”

例 38 (渡辺敬一)

正標数の体上有限生成 F 有理な $\mathbb{N}$-graded algebra A で, 次数 0 の成分 A_0 が F 有理でない例.

注意 39

$\mathbb{Z}$-graded algebra A には１次元トーラス GL_1 が作用し, その不変式環は A_0 である. 線型簡約群の不変式環 (従って直和因子環) に F 有理性は一般には伝播しない.

Cohen–Macaulay 性

定理 40 (川崎健)

A を体 K 上有限生成な整域とする．このとき、A の 0 でないイデアル I で, Rees 環 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A(I) = A[tI] = \bigoplus_{i \geq 0} I^i t^i$ が Cohen–Macaulay であるものが存在する．

注意 41

A は $\mathcal{R}$ の直和因子部分環である．A が Cohen–Macaulay でなくても, $\mathcal{R}$ を Cohen-Macaulay にできるから, 一般に Cohen–Macaulay 性は直和因子環に遺伝しない．

Cohen–Macaulay 性

定理 40 (川崎健)

A を体 K 上有限生成な整域とする．このとき、A の 0 でないイデアル I で, Rees 環 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_A(I) = A[tI] = \bigoplus_{i \geq 0} I^i t^i$ が Cohen–Macaulay であるものが存在する．

注意 41

A は $\mathcal{R}$ の直和因子部分環である．A が Cohen–Macaulay でなくても, $\mathcal{R}$ を Cohen-Macaulay にできるから, 一般に Cohen–Macaulay 性は直和因子環に遺伝しない．

F 正則性の伝播

補題 42 (Hochster–Huneke, H—)

B が正標数で強 F 正則, F 正則, または弱 F 正則な Noether 環で, A が B の巡回的に純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

補題 43 (Hochster–J. Roberts)

B が正標数で F 純な Noether 環で, A が B の純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

系 44

k が正標数, G が k 上の線型代数群, S が G 加群として半単純な G 代数で強 F 正則, F 正則, 弱 F 正則, または F 純なネーター環とすると, S^G も同じ性質をもつ.

F 正則性の伝播

補題 42 (Hochster–Huneke, H—)

B が正標数で強 F 正則, F 正則, または弱 F 正則な Noether 環で, A が B の巡回的に純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

補題 43 (Hochster–J. Roberts)

B が正標数で F 純な Noether 環で, A が B の純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

系 44

k が正標数, G が k 上の線型代数群, S が G 加群として半単純な G 代数で強 F 正則, F 正則, 弱 F 正則, または F 純なネーター環とすると, S^G も同じ性質をもつ.

F 正則性の伝播

補題 42 (Hochster–Huneke, H—)

B が正標数で強 F 正則, F 正則, または弱 F 正則な Noether 環で, A が B の巡回的に純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

補題 43 (Hochster–J. Roberts)

B が正標数で F 純な Noether 環で, A が B の純な部分環であれば, A も同じ性質をもつ.

系 44

k が正標数, G が k 上の線型代数群, S が G 加群として半単純な G 代数で強 F 正則, F 正則, 弱 F 正則, または F 純なネーター環とすると, S^G も同じ性質をもつ.

永田–Haboush の定理 (Mumford 予想)

正標数の線型簡約ではない簡約群 G (もう少し一般に G° が簡約群であるような線型代数群) の作用による不変式環 S^G はもはや S の純部分環とは限らない (Bergman, Hochster–Eagon). S^G はどの程度良い性質をみたすのか.

定理 45 (永田, Haboush, Waterhouse)

k が閉体で, G が k 上代数的アフィン群スキームで, G°_{red} が簡約群とする. S が k 上有限生成な G 代数ならば, S^G は k 上有限生成である.

永田–Haboush の定理 (Mumford 予想)

正標数の線型簡約ではない簡約群 G (もう少し一般に G° が簡約群であるような線型代数群) の作用による不変式環 S^G はもはや S の純部分環とは限らない (Bergman, Hochster–Eagon). S^G はどの程度良い性質をみたすのか.

定理 45 (永田, Haboush, Waterhouse)

k が閉体で, G が k 上代数的アフィン群スキームで, G°_{red} が簡約群とする. S が k 上有限生成な G 代数ならば, S^G は k 上有限生成である.

Kemper の定理

定理 46 (Kemper)

G は線型代数群で G° が簡約群とする．もし G が線型簡約でないならば，ある有限次元 G 加群 V が存在して，$(\mathrm{Sym}\,V)^G$ は Cohen–Macaulay ではない．

しかし，不変式環 $(\mathrm{Sym}\,V)^G$ が Cohen–Macaulay になる重要な例は多数知られている．

Kemper の定理

定理 46 (Kemper)

G は線型代数群で G° が簡約群とする．もし G が線型簡約でないならば, ある有限次元 G 加群 V が存在して, $(\operatorname{Sym} V)^G$ は Cohen–Macaulay ではない.

しかし, 不変式環 $(\operatorname{Sym} V)^G$ が Cohen–Macaulay になる重要な例は多数知られている.

Singh の例

例 47 (Singh)

k は標数 $p \leq 3$ で, 有限群 $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_p)$ が自然に 4 変数多項式環 $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に作用するとき, S^G は F 純ではない.

疑問 48

G が (連結) 簡約群, V が有限次元 G 加群のとき, $(\mathrm{Sym}\, V)^G$ は F 純か.

Singh の例

例 47 (Singh)

k は標数 $p \leq 3$ で, 有限群 $G = \mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_p)$ が自然に 4 変数多項式環 $S = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ に作用するとき, S^G は F 純ではない.

疑問 48

G が (連結) 簡約群, V が有限次元 G 加群のとき, $(\mathrm{Sym}\, V)^G$ は F 純か.

Singh の反例の応用

疑問 49 (宮西正宣)

G が有限群で可換環 B に作用し, A は G 部分環で B の純部分環とする．このとき A^G は B^G の純部分環か.

例 50

上記の反例. k, G, S は Singh の例 (例 47) の通りとする．$B = S$, $A = S^p$ とおくと, $A = S^p$ は多項式環なので F 純であり, A は B の直和因子部分環 (ただし, A 加群として直和因子というだけで, (G, A) 加群としては直和因子ではない). 一方, $A^G = (B^G)^p$ は容易であり, A^G は F 純ではなかったので, A^G は B^G の純部分環ではない.

Singh の反例の応用

疑問 49 (宮西正宜)

G が有限群で可換環 B に作用し, A は G 部分環で B の純部分環とする. このとき A^G は B^G の純部分環か.

例 50

上記の反例. k, G, S は Singh の例 (例 47) の通りとする. $B = S$, $A = S^p$ とおくと, $A = S^p$ は多項式環なので F 純であり, A は B の直和因子部分環 (ただし, A 加群として直和因子というだけで, (G, A) 加群としては直和因子ではない). 一方, $A^G = (B^G)^p$ は容易であり, A^G は F 純ではなかったので, A^G は B^G の純部分環ではない.

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

記号

記号 51

本講演終了まで, 特に断りのない限り,

- k: 閉体
- G: k 上の簡約群
- T: G の極大トーラス
- Δ: G のルート系のベース
- B: G の負の Borel 部分群
- U: B のユニポテント根基
- X^+: 支配的ウェートの全体

良いフィルターづけ

$\lambda \in X^+$ に対し, 誘導される加群 $\mathrm{ind}_B^G \lambda$ を $\nabla_G(\lambda)$ で表し, 最高ウェート λ の双対 Weyl 加群という. $\dim_k \nabla_G(\lambda) < \infty$ である. また, $\Delta_G(\lambda) := \nabla(-w_0\lambda)^*$ と定義し, 最高ウェート λ の Weyl module という. ここに w_0 は G の Weyl 群の最長元.

V を G 加群とする. V の G 加群のフィルトレーション $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ または $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ (であって $\bigcup_{i>0} V_i = V$ であるもの) が良いフィルター付けであるとは, 各 i についてある $\lambda(i) \in X^+$ が存在して $V_i/V_{i-1} \cong \nabla_G(\lambda(i))$ であることをいう.

良いフィルターづけ

$\lambda \in X^+$ に対し, 誘導される加群 $\mathrm{ind}_B^G \lambda$ を $\nabla_G(\lambda)$ で表し, 最高ウェート λ の双対 Weyl 加群という. $\dim_k \nabla_G(\lambda) < \infty$ である. また, $\Delta_G(\lambda) := \nabla(-w_0\lambda)^*$ と定義し, 最高ウェート λ の Weyl module という. ここに w_0 は G の Weyl 群の最長元.

V を G 加群とする. V の G 加群のフィルトレーション $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ または $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ (であって $\bigcup_{i>0} V_i = V$ であるもの) が良いフィルター付けであるとは, 各 i についてある $\lambda(i) \in X^+$ が存在して $V_i/V_{i-1} \cong \nabla_G(\lambda(i))$ であることをいう.

良いフィルターづけ

$\lambda \in X^+$ に対し, 誘導される加群 $\mathrm{ind}_B^G \lambda$ を $\nabla_G(\lambda)$ で表し, 最高ウェート λ の双対 Weyl 加群という. $\dim_k \nabla_G(\lambda) < \infty$ である. また, $\Delta_G(\lambda) := \nabla(-w_0\lambda)^*$ と定義し, 最高ウェート λ の Weyl module という. ここに w_0 は G の Weyl 群の最長元.

V を G 加群とする. V の G 加群のフィルトレーション $0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_r = V$ または $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ (であって $\bigcup_{i>0} V_i = V$ であるもの) が良いフィルター付けであるとは, 各 i についてある $\lambda(i) \in X^+$ が存在して $V_i/V_{i-1} \cong \nabla_G(\lambda(i))$ であることをいう.

Donkin の判定法

定理 52 (Cline–Parshall–Scott–van der Kallen, Donkin)

G 加群 V について次は同値.

- V は良いフィルター付けを持つ.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ と $i > 0$ について, $\operatorname{Ext}^i_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ について $\operatorname{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.

Donkin の判定法

定理 52 (Cline–Parshall–Scott–van der Kallen, Donkin)

G 加群 V について次は同値.

- V は良いフィルター付けを持つ.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ と $i > 0$ について, $\mathrm{Ext}^i_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ について $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.

Donkin の判定法

定理 52 (Cline–Parshall–Scott–van der Kallen, Donkin)

G 加群 V について次は同値.

- V は良いフィルター付けを持つ.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ と $i > 0$ について, $\mathrm{Ext}^i_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ について $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.

Donkin の判定法

定理 52 (Cline–Parshall–Scott–van der Kallen, Donkin)

G 加群 V について次は同値.

- V は良いフィルター付けを持つ.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ と $i > 0$ について, $\mathrm{Ext}^i_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.
- $\dim V$ は可算で, $\lambda \in X^+$ について $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), V) = 0$.

良いフィルター付けと不変式環の F 正則性

定理 53 (H—)

V は有限次元 G 加群とする．対称多元環 $S = \mathrm{Sym}\, V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば，S^G は強 F 正則である．特に S^G は Cohen–Macaulay である．

注意 54 (Bergman, Hochster–Eagon)

上の定理の仮定がみたされるが，S^G が S の純部分環でない例が存在する．

良いフィルター付けと不変式環の F 正則性

定理 53 (H—)

V は有限次元 G 加群とする．対称多元環 $S = \mathrm{Sym}\, V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば，S^G は強 F 正則である．特に S^G は Cohen–Macaulay である．

注意 54 (Bergman, Hochster–Eagon)

上の定理の仮定がみたされるが，S^G が S の純部分環でない例が存在する．

Grosshans の同型と Popov の定理

補題 55 (Grosshans)

H は G の閉部分群とする．S は G 代数とする．このとき，

$$S^H \cong (k[G]^H \otimes S)^G$$

である．ここに H は $k[G]$ に右正則に作用し，G は $k[G]^H$ に左正則に，S には与えられた作用で作用する．

系 56 (Grosshans, Popov)

S が有限生成 G 代数のとき S^U は有限生成．もしさらに k が標数 0 で S が有理特異点をもつならば，S^U も有理特異点を持つ．

理由は $k[G]^U$ が有限生成で，(標数 0 で) 有理特異点を持つから．

Grosshans の同型と Popov の定理

補題 55 (Grosshans)

H は G の閉部分群とする．S は G 代数とする．このとき，

$$S^H \cong (k[G]^H \otimes S)^G$$

である．ここに H は $k[G]$ に右正則に作用し，G は $k[G]^H$ に左正則に，S には与えられた作用で作用する．

系 56 (Grosshans, Popov)

S が有限生成 G 代数のとき S^U は有限生成．もしさらに k が標数 0 で S が有理特異点をもつならば，S^U も有理特異点を持つ．

理由は $k[G]^U$ が有限生成で，(標数 0 で) 有理特異点を持つから．

Grosshans の同型と Popov の定理

補題 55 (Grosshans)

H は G の閉部分群とする．S は G 代数とする．このとき,

$$S^H \cong (k[G]^H \otimes S)^G$$

である．ここに H は $k[G]$ に右正則に作用し, G は $k[G]^H$ に左正則に, S には与えられた作用で作用する．

系 56 (Grosshans, Popov)

S が有限生成 G 代数のとき S^U は有限生成．もしさらに k が標数 0 で S が有理特異点をもつならば, S^U も有理特異点を持つ．

理由は $k[G]^U$ が有限生成で, (標数 0 で) 有理特異点を持つから．

疑問

疑問 57

$\mathrm{char}(k) = p > 0$ とせよ．S が有限生成強 F 正則 G 代数とする．S が良いフィルター付けを持つとき, S^G も強 F 正則か.

注意 58

$k[G]^U$ は正標数では強 F 正則．強 F 正則有限生成代数の完全体上のテンサー積は強 F 正則である．また, $k[G]^U$ は良いフィルター付けをもち, 良いフィルター付けをもつ G 加群のテンサー積は良いフィルター付けをもつ (Donkin, Mathieu)．よって上の疑問が肯定的なら, Grosshans の同型により, S^U も強 F 正則になる．

疑問

疑問 57

$\mathrm{char}(k) = p > 0$ とせよ．S が有限生成強 F 正則 G 代数とする．S が良いフィルター付けを持つとき，S^G も強 F 正則か．

注意 58

$k[G]^U$ は正標数では強 F 正則．強 F 正則有限生成代数の完全体上のテンサー積は強 F 正則である．また，$k[G]^U$ は良いフィルター付けをもち，良いフィルター付けをもつ G 加群のテンサー積は良いフィルター付けをもつ (Donkin, Mathieu)．よって上の疑問が肯定的なら，Grosshans の同型により，S^U も強 F 正則になる．

疑問への部分的解答

定理 59 (H—)

V は有限次元 G 加群とする．対称多元環 $S = \mathrm{Sym}\, V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば，S^U は強 F 正則である．特に S^U は Cohen–Macaulay である．

系 60

定理の仮定の下で，P が G の放物的部分群で，U_P は P のユニポテント根基とする．このとき，S^{U_P} は強 F 正則である．

疑問への部分的解答

定理 59 (H—)

V は有限次元 G 加群とする．対称多元環 $S = \mathrm{Sym}\, V$ が G 加群として良いフィルター付けを持つならば, S^U は強 F 正則である．特に S^U は Cohen–Macaulay である．

系 60

定理の仮定の下で, P が G の放物的部分群で, U_P は P のユニポテント根基とする．このとき, S^{U_P} は強 F 正則である．

良軌跡の開性

定理 61

R が可換ネーター環で H は簡約 R 群スキームとする．V は R 上有限生成射影的な H 加群とする．このとき

$$\{P \in \operatorname{Spec} R \mid \overline{\kappa(P)} \otimes_R \operatorname{Sym} V \text{ は良いフィルター付けを持つ}\}$$

は $\operatorname{Spec} R$ において Zariski 開である．ここに $\overline{\kappa(P)}$ は $\kappa(P)$ の代数的閉包．もし R が標数 0 の整域 (たとえば $\mathbb{Z}$) ならば稠密な開部分集合である．

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ．(Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし，$d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする．$M_i := k^{d(i)}$ とし，$G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする．

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で，G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく．このとき，$(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である．

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ．(Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし，$d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする．$M_i := k^{d(i)}$ とし，$G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする．

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で，G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく．このとき，$(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である．

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ．(Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし，$d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする．$M_i := k^{d(i)}$ とし，$G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする．

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で，G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i．

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく．このとき，$(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である．

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$
(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)
(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)
(4) (1)–(3) の Levi 部分群
(5) (1)–(4) の導来群
(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基
(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i \in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

箙への応用

$\mathrm{char}(k) > 0$ とせよ. (Q_0, Q_1, s, t) を有限箙とし, $d : Q_0 \to \mathbb{N}$ は写像とする. $M_i := k^{d(i)}$ とし, $G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ は以下のいずれかとする.

(1) $\mathrm{GL}(M_i)$, $\mathrm{SL}(M_i)$

(2) $\mathrm{Sp}_{d(i)}$ ($d(i)$: 偶数)

(3) $\mathrm{SO}_{d(i)}$ ($\mathrm{char}(k) \neq 2$)

(4) (1)–(3) の Levi 部分群

(5) (1)–(4) の導来群

(6) (1)–(5) の放物部分群のユニポテント根基

(7) $N_i \subset G_i \subset \mathrm{GL}(M_i)$ であって N_i は (1)–(6) の群で, G_i/N_i が線型簡約な群スキームであるような G_i.

$G := \prod_{i\in Q_0} G_i$, $M := \prod_{\alpha\in Q_1} \mathrm{Hom}(M_{s(\alpha)}, M_{t(\alpha)})$ とおく. このとき, $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は強 F 正則である.

古典的な例 (1)

例 62

$Q = 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. $d(1) = m$, $d(2) = t$, $d(3) = n$. $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{GL}_t$, $G_3 = \{e\}$. このとき $M = \mathrm{Hom}(M_2, M_3) \times \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ で $M \to M/\!/G$ は

$$\pi : M \to Y_t = \{f \in \mathrm{Hom}(M_1, M_3) \mid \mathrm{rank}\, f \leq t\},$$

と同一視される．ここに $\pi(\varphi, \psi) = \varphi\psi$ (DeConcini–Procesi)．よって Y_t は強 F 正則 (Hochster–Huneke).

古典的な例 (2)

例 63

- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{SL}_m$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(n, m)$ の Plücker 埋め込みに関する斉次座標環.
- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = 2r$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2r}$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[x_{ij}]/Pf_{2r+2}$ と同型. ここに (x_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 交代行列. Pf_{2r+2} はパフィアンイデアル.
- $\mathrm{char}(k) > 2$ とする. $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = O_m$ とする. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[y_{ij}]/I_{m+1}$ と同型. ここに (y_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 対称行列. I_{m+1} は小行列式で生成されるイデアル.

これら不変式環は強 F 正則である.

古典的な例 (2)

例 63

- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{SL}_m$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(n, m)$ の Plücker 埋め込みに関する斉次座標環.
- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = 2r$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2r}$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[x_{ij}]/Pf_{2r+2}$ と同型. ここに (x_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 交代行列. Pf_{2r+2} はパフィアンイデアル.
- $\mathrm{char}(k) > 2$ とする. $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = O_m$ とする. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[y_{ij}]/I_{m+1}$ と同型. ここに (y_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 対称行列. I_{m+1} は小行列式で生成されるイデアル.

これら不変式環は強 F 正則である.

古典的な例 (2)

例 63

- $Q = \ 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{SL}_m$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(n, m)$ の Plücker 埋め込みに関する斉次座標環.
- $Q = \ 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = 2r$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2r}$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[x_{ij}]/Pf_{2r+2}$ と同型. ここに (x_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 交代行列. Pf_{2r+2} はパフィアンイデアル.
- $\mathrm{char}(k) > 2$ とする. $Q = \ 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = O_m$ とする. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[y_{ij}]/I_{m+1}$ と同型. ここに (y_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 対称行列. I_{m+1} は小行列式で生成されるイデアル.

これら不変式環は強 F 正則である.

古典的な例 (2)

例 63

- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{SL}_m$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ はグラスマン多様体 $\mathrm{Grass}(n, m)$ の Plücker 埋め込みに関する斉次座標環.
- $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = 2r$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = \mathrm{Sp}_{2r}$. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[x_{ij}]/Pf_{2r+2}$ と同型. ここに (x_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 交代行列. Pf_{2r+2} はパフィアンイデアル.
- $\mathrm{char}(k) > 2$ とする. $Q = 1 \longrightarrow 2$, $d(1) = n$, $d(2) = m$, $G_1 = \{e\}$, $G_2 = O_m$ とする. このとき $(\mathrm{Sym}\, M^*)^G$ は $k[y_{ij}]/I_{m+1}$ と同型. ここに (y_{ij}) はジェネリックな $n \times n$ 対称行列. I_{m+1} は小行列式で生成されるイデアル.

これら不変式環は強 F 正則である.

例 (1)

$M := k^m$, $N := k^n$ とする．$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = n$ を整数列とし，

$$H := \begin{pmatrix} H_1 & & & * \\ & H_2 & & \\ & & \ddots & \\ & O & & H_s \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_n(k) \cong \mathrm{GL}(N)$$

とする．ここに H_l は $\mathrm{GL}_{a_l - a_{l-1}}$, $\mathrm{SL}_{a_l - a_{l-1}}$, $\{E_{a_l - a_{l-1}}\}$ のいずれかとする．

例 (2)

$h := \inf\{l \mid H_l = \mathrm{GL}_{a_l - a_{l-1}}\}$ とおく. $l < h$ に対して, $H_l = \mathrm{SL}_{a_l - a_{l-1}}$ の場合には

$$\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_{a_l} \mid 1, \ldots, a_l] \mid 1 \le c_1 < \cdots < c_{a_l} \le m\}$$

とおく. $H_l = \{E_{a_l - a_{l-1}}\}$ の場合には

$$\begin{aligned}\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mid a_{l-1} < u \le a_l,\\ 1 \le c_1 < \cdots < c_u \le m,\ 1 \le d_1 < \cdots < d_u \le a_l,\\ d_t = t\ (t \le a_{l-1})\}\end{aligned}$$

とおく. $\Gamma := \bigcup_{l<h} \Gamma_l$ とおく. Γ は分配束である.

例 (2)

$h := \inf\{l \mid H_l = \mathrm{GL}_{a_l - a_{l-1}}\}$ とおく. $l < h$ に対して, $H_l = \mathrm{SL}_{a_l - a_{l-1}}$ の場合には

$$\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_{a_l} \mid 1, \ldots, a_l] \mid 1 \leq c_1 < \cdots < c_{a_l} \leq m\}$$

とおく. $H_l = \{E_{a_l - a_{l-1}}\}$ の場合には

$$\begin{aligned}\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mid a_{l-1} < u \leq a_l,\\ 1 \leq c_1 < \cdots < c_u \leq m,\ 1 \leq d_1 < \cdots < d_u \leq a_l,\\ d_t = t\ (t \leq a_{l-1})\}\end{aligned}$$

とおく. $\Gamma := \bigcup_{l<h} \Gamma_l$ とおく. Γ は分配束である.

例 (2)

$h := \inf\{l \mid H_l = \mathrm{GL}_{a_l - a_{l-1}}\}$ とおく. $l < h$ に対して, $H_l = \mathrm{SL}_{a_l - a_{l-1}}$ の場合には

$$\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_{a_l} \mid 1, \ldots, a_l] \mid 1 \leq c_1 < \cdots < c_{a_l} \leq m\}$$

とおく. $H_l = \{E_{a_l - a_{l-1}}\}$ の場合には

$$\begin{aligned}\Gamma_l := \{[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mid a_{l-1} < u \leq a_l, \\ 1 \leq c_1 < \cdots < c_u \leq m,\ 1 \leq d_1 < \cdots < d_u \leq a_l, \\ d_t = t\ (t \leq a_{l-1})\}\end{aligned}$$

とおく. $\Gamma := \bigcup_{l<h} \Gamma_l$ とおく. Γ は分配束である.

例 (3)

定理 64

$S := \mathrm{Sym}(M \otimes N)$ とし, H は S に $h \cdot (m \otimes n) = m \otimes h(n)$ によって作用させる. $A := S^H$ とおく. このとき,

- Γ を
$$[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mapsto \det(e_{c_i} \otimes f_{d_j})$$
によって S の部分集合とみなす. ここに, $e_1, \ldots, e_m$ および $f_1, \ldots, f_n$ はそれぞれ $M = k^m$ および $N = k^n$ の基底である. A は Γ で生成され, Γ 上の ASL である.
- A は強 F 正則な UFD である.

例 (3)

定理 64

$S := \mathrm{Sym}(M \otimes N)$ とし, H は S に $h \cdot (m \otimes n) = m \otimes h(n)$ によって作用させる. $A := S^H$ とおく. このとき,

- Γ を
$$[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mapsto \det(e_{c_i} \otimes f_{d_j})$$
によって S の部分集合とみなす. ここに, $e_1, \ldots, e_m$ および $f_1, \ldots, f_n$ はそれぞれ $M = k^m$ および $N = k^n$ の基底である. A は Γ で生成され, Γ 上の ASL である.
- A は強 F 正則な UFD である.

例 (3)

定理 64

$S := \mathrm{Sym}(M \otimes N)$ とし, H は S に $h \cdot (m \otimes n) = m \otimes h(n)$ によって作用させる. $A := S^H$ とおく. このとき,

- Γ を
$$[c_1, \ldots, c_u \mid d_1, \ldots, d_u] \mapsto \det(e_{c_i} \otimes f_{d_j})$$
によって S の部分集合とみなす. ここに, $e_1, \ldots, e_m$ および $f_1, \ldots, f_n$ はそれぞれ $M = k^m$ および $N = k^n$ の基底である. A は Γ で生成され, Γ 上の ASL である.
- A は強 F 正則な UFD である.

注意

注意 65

定理の $s = 2$, $a_1 = l$, $H_1 = \{E_l\}$, $H_2 = \mathrm{SL}_{m-l}$ の場合は, 後藤–早坂–藏野–中村 による.

注意 66

$s = n$, $a_i = i$, $H_i = \{1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ の場合は, 宮崎充弘 の結果に含まれる.

注意

注意 65

定理の $s = 2$, $a_1 = l$, $H_1 = \{E_l\}$, $H_2 = \mathrm{SL}_{m-l}$ の場合は, 後藤–早坂–藏野–中村 による.

注意 66

$s = n$, $a_i = i$, $H_i = \{1\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ の場合は, 宮崎充弘 の結果に含まれる.

疑問

疑問 67

R がネーター環, B は R 上本質的に有限型な R 代数とし, A は B の R 部分代数で B の純部分環とする．このとき, A は R 上本質的に有限型か.

ありがとうございました

ご清聴ありがとうございまいした. 本講演スライドは http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto/ で入手可能とする予定です.