Canonical modules of Cox rings

橋本　光靖

名古屋大学

2012 年 9 月 13 日

群スキーム (1)

S はスキームとする. $G=(G,\mu,e,\iota)$ が S 群スキームであるとは, G は S スキーム, $\mu: G\times G\to G$, $e:S\to G$, $\iota:G\to G$ は S 射で, 図式

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "\mu\times 1_G"] \arrow[d, "1_G\times\mu"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} & G\times G \arrow[d, "\mu"] & \\ S\times G \arrow[ur, "e\times 1_G"] \arrow[r, "\cong"] & G & G\times S \arrow[ul, "1_G\times e"'] \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

群スキーム (1)

S はスキームとする．$G = (G, \mu, e, \iota)$ が S 群スキームであるとは，G は S スキーム，$\mu : G \times G \to G$, $e : S \to G$, $\iota : G \to G$ は S 射で，図式

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times G & \xrightarrow{\mu \times 1_G} & G \times G \\ \downarrow{\scriptstyle 1_G \times \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} & & G \times G & & \\ & \nearrow^{e \times 1_G} & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \nwarrow^{1_G \times e} & \\ S \times G & \xrightarrow{\cong} & G & \xleftarrow{\cong} & G \times S \end{array}$$

群スキーム (2)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "f"'] & G \times G \arrow[r, shift left, "\iota \times 1_G"] \arrow[r, shift right, "1_G \times \iota"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \\ & S \arrow[urr, "e"] & & \end{tikzcd}$$

が可換である（群の公理が成立する）ことをいう．ここに $f : G \to S$ は構造射, $\Delta : G \to G \times G$ は対角線写像.

群スキーム (2)

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "f"'] & G \times G \arrow[r, shift left, "\iota \times 1_G"] \arrow[r, shift right, "1_G \times \iota"'] & G \times G \arrow[r, "\mu"] & G \\ & S \arrow[urr, "e"] & & \end{tikzcd}$$

が可換である（群の公理が成立する）ことをいう．ここに
$f : G \to S$ は構造射, $\Delta : G \to G \times G$ は対角線写像.

表現可能関手としての見方

S スキームの圏を Sch/S で, 集合の圏を $\underline{\mathrm{Set}}$ で表す. S スキーム X に対して, 関手 $X^\bullet : \mathrm{Sch}/S \to \underline{\mathrm{Set}}$ を $X^\bullet = \mathrm{Sch}/S(?, X)$ で定義する. G が S 群スキームならば, 各 $Y \in \mathrm{Sch}/S$ について $G^\bullet(Y)$ は

$$G^\bullet(Y) \times G^\bullet(Y) \cong (G \times G)^\bullet(Y) \xrightarrow{\mu} G^\bullet(Y)$$

を積にして群となり, $G^\bullet$ は Sch/S から群の圏 $\underline{\mathrm{Grp}}$ への関手に昇格する. 逆に S-scheme G について, $G^\bullet$ に $\underline{\mathrm{Grp}}$ への関手としての構造をいれると, (米田の補題で) G は S 群スキームになる.

例

例 1

$S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $G = \mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x_{ij}]_{1\le i,j\le n}[\det^{-1}]$. GL_1 は特に $\mathbb{G}_m$ または $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ と表されることが多い. 直積 $\mathbb{G}_m^n$ を (分裂した) n 次元トーラスという.

例 2

$G_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{Z}$ 群スキームのとき, $G_S := S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} G_{\mathbb{Z}}$ は自然に S 群スキーム. 特に $\mathbb{G}_{m,S}^n = S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}^n$ は S 群スキーム.

例

例 1

$S = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, $G = \mathrm{GL}_n = \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Z}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[x_{ij}]_{1\le i,j\le n}[\det^{-1}]$. GL_1 は特に $\mathbb{G}_m$ または $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}$ と表されることが多い. 直積 $\mathbb{G}_m^n$ を (分裂した) n 次元トーラスという.

例 2

$G_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{Z}$ 群スキームのとき, $G_S := S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} G_{\mathbb{Z}}$ は自然に S 群スキーム. 特に $\mathbb{G}_{m,S}^n = S \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Z}}^n$ は S 群スキーム.

fpqc 射

Definition 1

スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が fpqc とは, φ が忠実平坦で, Y の任意の quasi-compact open subset が X のある quasi-compact open subset の像であることをいう.

注意 3

“fidèlment plat et quasi-compact” の略. 文字通り「忠実平坦かつ準コンパクト」の意味に使われる場合もあるが, ここでの定義はもう少し弱い. fppf (忠実平坦かつ局所的に有限表示) ならば fpqc である.

fpqc 射

Definition 1

スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が fpqc とは, φ が忠実平坦で, Y の任意の quasi-compact open subset が X のある quasi-compact open subset の像であることをいう.

注意 3

“fidèlment plat et quasi-compact” の略. 文字通り「忠実平坦かつ準コンパクト」の意味に使われる場合もあるが, ここでの定義はもう少し弱い. fppf (忠実平坦かつ局所的に有限表示) ならば fpqc である.

基本設定

S はスキーム, G は S 上 fpqc な S 群スキーム, X は G スキーム, すなわち, G が作用する S スキームとする.

スキームの図式

Sch/S で S-schemes の圏を表す. I : 小さい圏とし, $X_\bullet \in \mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ とする. 圏 $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Zar}(X_\bullet)) := \{(i, U) \mid i \in \mathrm{Ob}(I),\ U \in \mathrm{Zar}(X_i)\},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(X_\bullet)}((j, V), (i, U)) := \{(\phi, h) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_I(i, j),$$

$$h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(V, U),\quad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_j & \xrightarrow{X_\phi} & X_i \end{array} \text{ は可換図式 }\}$$

で定義する.

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ の位相

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ に Grothendieck 位相を,

$$\{(j_\lambda, V_\lambda)\} \xrightarrow{\{(\phi_\lambda, h_\lambda)\}} (i, U) \text{ が covering } \iff$$
$$\forall\lambda\ j_\lambda = i,\ \phi_\lambda = \mathrm{id}_i \text{ かつ } \bigcup_\lambda h_\lambda(V_\lambda) = U$$

で定める.

$\Gamma((i, U), \mathcal{O}_{X_\bullet}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_i})$ と定めることにより, $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ は ringed. $\mathrm{Mod}(\mathrm{Zar}(X_\bullet))$ は単に $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と書く.

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ の位相

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ に Grothendieck 位相を,

$$\{(j_\lambda, V_\lambda)\} \xrightarrow{\{(\phi_\lambda, h_\lambda)\}} (i, U) \text{ が covering } \iff$$
$$\forall \lambda\ j_\lambda = i,\ \phi_\lambda = \mathrm{id}_i \text{ かつ } \bigcup_\lambda h_\lambda(V_\lambda) = U$$

で定める.

$\Gamma((i, U), \mathcal{O}_{X_\bullet}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_i})$ と定めることにより, $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ は ringed. $\mathrm{Mod}(\mathrm{Zar}(X_\bullet))$ は単に $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と書く.

Restriction と β map

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と $i \in \mathrm{Ob}(I)$ に対して, $\mathcal{M}_i$ を $\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M})$ で定めると $\mathcal{M}_i \in \mathrm{Mod}(X_i)$. これを $\mathcal{M}$ の X_i への制限という.

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$, $(\phi : i \to j) \in \mathrm{Mor}(I)$ とする. $\beta_\phi : \mathcal{M}_i \to (X_\phi)_* \mathcal{M}_j$ を

$$
\begin{aligned}
\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M}) &\xrightarrow{\mathrm{res}} \Gamma((j, X_\phi^{-1}(U)), \mathcal{M}) \\
&= \Gamma(X_\phi^{-1}(U), \mathcal{M}_j) = \Gamma(U, (X_\phi)_* \mathcal{M}_j)
\end{aligned}
$$

で定める.

Restriction と β map

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と $i \in \mathrm{Ob}(I)$ に対して, $\mathcal{M}_i$ を $\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M})$ で定めると $\mathcal{M}_i \in \mathrm{Mod}(X_i)$. これを $\mathcal{M}$ の X_i への制限という.

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$, $(\phi : i \to j) \in \mathrm{Mor}(I)$ とする. $\beta_\phi : \mathcal{M}_i \to (X_\phi)_* \mathcal{M}_j$ を

$$\begin{aligned}\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M}) &\xrightarrow{\text{res}} \Gamma((j, X_\phi^{-1}(U)), \mathcal{M}) \\ &= \Gamma(X_\phi^{-1}(U), \mathcal{M}_j) = \Gamma(U, (X_\phi)_* \mathcal{M}_j)\end{aligned}$$

で定める.

α map と同変性

随伴性からくる同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_i)}(\mathcal{M}_i, (X_\phi)_*\mathcal{M}_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_j)}(X_\phi^*\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j)$$

で β_ϕ に対応する射を $\alpha_\phi : X_\phi^*\mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_j$ で表す.

定義 4

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ が同変 (equivariant) (または cartesian) であるとは, すべての $\phi \in \mathrm{Mor}(I)$ について α_ϕ が同型であることをいう. $\mathcal{M}$ が局所準連接であるとは, すべての $i \in \mathrm{Ob}(I)$ について $\mathcal{M}_i$ が準連接なことをいう. 局所準連接かつ同変のとき, 準連接という.

α map と同変性

随伴性からくる同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_i)}(\mathcal{M}_i, (X_\phi)_*\mathcal{M}_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_j)}(X_\phi^*\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j)$$

で β_ϕ に対応する射を $\alpha_\phi : X_\phi^*\mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_j$ で表す.

定義 4

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ が同変 (equivariant) (または cartesian) であるとは, すべての $\phi \in \mathrm{Mor}(I)$ について α_ϕ が同型であることをいう. $\mathcal{M}$ が局所準連接であるとは, すべての $i \in \mathrm{Ob}(I)$ について $\mathcal{M}_i$ が準連接なことをいう. 局所準連接かつ同変のとき, 準連接という.

$\mathrm{Qch}(X_\bullet)$ はアーベル圏

補題 5

$$\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_4 \to \mathcal{M}_5$$

が $\mathcal{O}_{X_\bullet}$-modules の完全列とする.

1. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$ が局所準連接ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである.
2. すべての X_ϕ が平坦のとき, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$ が同変 (または準連接) ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである. 特に準連接 $\mathcal{O}_{X_\bullet}$ 加群層全体 $\mathrm{Qch}(X_\bullet)$ はアーベル圏で, $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ の中で plump (つまり, 空でなく, kernel, cokernel, extension で閉じている) である.

圏 Δ_M (1)

全順序集合 $[n]$ を $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ で定義する ($n \geq -1$). 順序集合の圏 Ord の部分圏 Δ_M を

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(\Delta_M) &= \{[0], [1], [2]\}, \\ \mathrm{Hom}_{\Delta_M}([i], [j]) &= \{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}([i], [j]) \mid \gamma \text{ は単射 } \} \end{aligned}$$

で定義する.

圏 Δ_M (2)

Δ_M の射 $[n-1] \to [n]$ で $i \in [n]$ が像に入らないものを $\delta_i(n)$ で表すと, Δ_M は

$$
\begin{tikzcd}
{[2]} & {[1]} \arrow[l, shift right=6, "\delta_0(2)"'] \arrow[l, "\delta_1(2)"'] \arrow[l, shift left=6, "\delta_2(2)"'] & {[0]} \arrow[l, shift right=3, "\delta_0(1)"'] \arrow[l, shift left=3, "\delta_1(1)"']
\end{tikzcd}
$$

の形. ただし $\delta_0(2)\delta_0(1) = \delta_1(2)\delta_0(1)$, $\delta_2(2)\delta_0(1) = \delta_0(2)\delta_1(1)$, $\delta_1(2)\delta_1(1) = \delta_2(2)\delta_1(1)$.

$B_G^M(X)$

$B_G^M(X) \in \mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ を

$$G \times G \times X \; \begin{matrix} \xrightarrow{1_G \times a} \\ \xrightarrow{\mu \times 1_X} \\ \xrightarrow{p_{23}} \end{matrix} \; G \times X \; \begin{matrix} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{p_2} \end{matrix} \; X$$

で定義する．ここに $a : G \times X \to X$ は作用, $\mu : G \times G \to G$ は積, p_{23}, p_2 は projection.

同変層の定義

$\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$-modules 全体を $\mathrm{Mod}(G,X)$ で表し，その対象を $(G,\mathcal{O}_X)$-module と呼ぶ．その中で同変なものを同変 $(G,\mathcal{O}_X)$-module と呼ぶ．その中で準連接なもの全体を $\mathrm{Qch}(G,X)$ で表す．導来圏について，例えば $D_{\mathrm{Qch}(G,X)}(\mathrm{Mod}(G,X))$ は $D_{\mathrm{Qch}}(G,X)$ 等と略記する．

G 線形化された層 (1)

Definition 2

$(\mathcal{M}, \phi)$ が G 線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層 とは,

1. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群層
2. $\phi : a^*\mathcal{M} \to p_2^*\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_{G\times X}$ 線型で次の図式は可換

$$
\begin{tikzcd}
(1_G \times a)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(1_G\times a)^*\phi"] \arrow[d, "\cong"] & (1_G \times a)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* a^* \mathcal{M} \arrow[d, "p_{23}^*\phi"] \\
(\mu \times 1_X)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(\mu\times 1_X)^*\phi"] & (\mu \times 1_X)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* p_2^* \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

であることをいう．ここに $p_2(g, x) = x$, $p_{23}(g, g', x) = (g', x)$, $a(g, x) = gx$, $\mu(g, g') = gg'$.

G 線形化された層 (2)

準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層の圏は $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ と同値.

$\mathcal{M}$ が $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ の対象ならば, $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{[0]}$, $\phi : a^*\mathcal{N} \to p_2^*\mathcal{N}$ を

$$a^*\mathcal{N} = a^*\mathcal{M}_{[0]} \xrightarrow{\alpha_{\delta_0}} \mathcal{M}_{[1]} \xrightarrow{\alpha_{\delta_1}^{-1}} p_2^*\mathcal{M}_{[0]} = p_2^*\mathcal{N}$$

で定めると $(\mathcal{N}, \phi)$ は G 線形化された準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層.

G 線形化された層 (2)

準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層の圏は $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ と同値.

$\mathcal{M}$ が $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ の対象ならば, $\mathcal{N} = \mathcal{M}_{[0]}$, $\phi : a^*\mathcal{N} \to p_2^*\mathcal{N}$ を

$$a^*\mathcal{N} = a^*\mathcal{M}_{[0]} \xrightarrow{\alpha_{\delta_0}} \mathcal{M}_{[1]} \xrightarrow{\alpha_{\delta_1}^{-1}} p_2^*\mathcal{M}_{[0]} = p_2^*\mathcal{N}$$

で定めると $(\mathcal{N}, \phi)$ は G 線形化された準連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層.

Six operations (1)

$\mathcal{M} \in \mathrm{Qch}(B_G^M(X))$ について, $\mathcal{M}_{[0]} \in \mathrm{Mod}(X)$ ($\mathcal{M}$ への G の作用を忘却したもの) を $\mathcal{M}$ としばしば同一視する. 特に, $\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$ は単に $\mathcal{O}_X$ (に G 作用がついたもの) と表す. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ も $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ と書いてしまう.

Six operations (2)

補題 6

$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ に対して, $\mathbb{F} \otimes^{L}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, $\otimes^{L}_{\mathcal{O}_X}$ は群作用の忘却と可換. つまり, $(\mathbb{F} \otimes^{L}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G})_{[0]} \cong \mathbb{F}_{[0]} \otimes^{L}_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G}_{[0]}$.

注意 7

特に $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ に対して, $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ に $\mathrm{Qch}(G, X)$ の object としての構造が入る. このことは, $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} H$, $X = \operatorname{Spec} B$ すべてが affine でも明らかなことではない.
$\mathrm{Mod}(G, X)$ まで圏を広げることによって, K-flat resolution を容易にとることができるようになる.

Six operations (2)

補題 6

$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ に対して, $\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, $\otimes^L_{\mathcal{O}_X}$ は群作用の忘却と可換. つまり, $(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G})_{[0]} \cong \mathbb{F}_{[0]} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G}_{[0]}$.

注意 7

特に $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ に対して, $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ に $\mathrm{Qch}(G, X)$ の object としての構造が入る. このことは, $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} H$, $X = \operatorname{Spec} B$ すべてが affine でも明らかなことではない.
$\mathrm{Mod}(G, X)$ まで圏を広げることによって, K-flat resolution を容易にとることができるようになる.

Six operations (3)

補題 8

X は locally Noetherian, G は S 上 of finite type とする.
$\mathbb{F} \in D^-_{\mathrm{Coh}}(G, X)$, $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ のとき,
$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, このとき canonical map

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G})_{[0]} \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}_{[0]}, \mathbb{G}_{[0]})$$

は同型.

注意 9

$\mathbb{F}$ が coherent cohomology を持つという仮定は外せない. たとえば, V が無限次元の代数群 G の表現のとき, V^* には (rational な) G-module の構造は一般には入らない.

Six operations (3)

補題 8

X は locally Noetherian, G は S 上 of finite type とする．
$\mathbb{F} \in D^-_{\mathrm{Coh}}(G, X)$, $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ のとき,
$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, このとき canonical map

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G})_{[0]} \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}_{[0]}, \mathbb{G}_{[0]})$$

は同型.

注意 9

$\mathbb{F}$ が coherent cohomology を持つという仮定は外せない．たとえば,
V が無限次元の代数群 G の表現のとき, V^* には (rational な) G-module の構造は一般には入らない．

Six operations (4)

I が小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射 (つまり自然変換) とする．$f_\bullet^{-1} : \mathrm{Zar}(Y_\bullet) \to \mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を $f_\bullet^{-1}(i, U) = (i, f_i^{-1}(U))$ で定めると $f_\bullet^{-1}$ は ringed continuous functor. $f_\bullet^{-1}$ による引き戻し

$$(f_\bullet^{-1})^{\#} : \mathrm{Mod}(X_\bullet) \to \mathrm{Mod}(Y_\bullet)$$

を順像 $(f_\bullet)_*$ と定める．その左随伴関手を逆像と呼んで $f_\bullet^*$ と表す．

Six operations (5)

$f : X \to Y$ が G 射のとき, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射 $B_G^M(f) : B_G^M(X) \to B_G^M(Y)$ が

$$
\begin{tikzcd}
B_G^M(X): & G\times G\times X \arrow[r, shift left=3, "1_G\times a"] \arrow[r, "\mu\times 1_X"] \arrow[r, shift right=3, "p_{23}"] \arrow[d, "1_G\times 1_G\times f"'] & G\times X \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"] \arrow[d, "1_G\times f"] & X \arrow[d, "f"] \\
B_G^M(Y): & G\times G\times Y \arrow[r, shift left=3, "1_G\times a"] \arrow[r, "\mu\times 1_Y"] \arrow[r, shift right=3, "p_{23}"] & G\times Y \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"] & Y
\end{tikzcd}
$$

で定まる.

$B_G^M(f)_* : \mathrm{Mod}(G, X) \to \mathrm{Mod}(G, Y)$ を単に f_* と略記する. $B_G^M(f)^*$ は f^* と略記する.

Six operations (5)

$f : X \to Y$ が G 射のとき, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}\,/S)$ の射
$B_G^M(f) : B_G^M(X) \to B_G^M(Y)$ が

$$\begin{tikzcd}
B_G^M(X) : & G \times G \times X \arrow[r, shift left=4, "1_G \times a"] \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[r, shift right=4, "p_{23}"] \arrow[d, "1_G \times 1_G \times f"'] & G \times X \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"] \arrow[d, "1_G \times f"] & X \arrow[d, "f"] \\
B_G^M(Y) : & G \times G \times Y \arrow[r, shift left=4, "1_G \times a"] \arrow[r, "\mu \times 1_Y"] \arrow[r, shift right=4, "p_{23}"] & G \times Y \arrow[r, shift left=2, "a"] \arrow[r, shift right=2, "p_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

で定まる.

$B_G^M(f)_* : \mathrm{Mod}(G, X) \to \mathrm{Mod}(G, Y)$ を単に f_* と略記する. $B_G^M(f)^*$ は f^* と略記する.

Six operations (6)

補題 10

$f : X \to Y$ が G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$ について $Lf^*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, 自然な射 $Lf^*\mathbb{F}_{[0]} \to (Lf^*\mathbb{F})_{[0]}$ は同型.

補題 11

$f : X \to Y$ が quasi-compact quasi-separated な G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ について $Rf_*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$. また, 自然な射 $(Rf_*\mathbb{F})_{[0]} \to Rf_*\mathbb{F}_{[0]}$ は同型.

Six operations (6)

補題 10

$f : X \to Y$ が G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$ について $Lf^*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, 自然な射 $Lf^*\mathbb{F}_{[0]} \to (Lf^*\mathbb{F})_{[0]}$ は同型.

補題 11

$f : X \to Y$ が quasi-compact quasi-separated な G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ について $Rf_*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$. また, 自然な射 $(Rf_*\mathbb{F})_{[0]} \to Rf_*\mathbb{F}_{[0]}$ は同型.

$(G, \mathcal{O}_X)$ 線形射

$\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ とし, $f : \mathcal{M}_{[0]} \to \mathcal{N}_{[0]}$ が $\mathcal{O}_X$ 線型射とする. このとき, $(G, \mathcal{O}_X)$ 線型射 $h : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ であって $h_{[0]} = f$ となるものは存在すれば unique である. このとき, f が $(G, \mathcal{O}_X)$ 線型である, という言い方をする. このとき, f と h は自然に同一視される.

$(G, \mathcal{O}_X)$-submodule

$\mathcal{M} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ で $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}_{[0]}$ は quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-submodule とする. $\phi : a^*\mathcal{M} \to p_2^*\mathcal{M}$ を linearization とする. ϕ が $a^*\mathcal{I}$ から $p_2^*\mathcal{I}$ への同型となるとき, かつそのときに限り, inclusion $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{M}_{[0]}$ が $(G, \mathcal{O}_X)$ 線型であるような $\mathcal{I}$ の G-linearization が入る. そのような G-linearization は存在すれば unique. このとき, $\mathcal{I}$ は $\mathcal{M}$ の (quasi-coherent) $(G, \mathcal{O}_X)$-submodule という. 特に $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ のとき, $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_X$ の G-ideal という.

$(G, \mathcal{O}_X)$-algebra

$\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_X)$-algebra であるとは, $\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_X)$-module であるとともに $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[0]}$ は $\mathcal{O}_X$-algebra でもあり, 単位射 $u : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ および積 $m : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は $(G, \mathcal{O}_X)$ 線型であることをいう.

$f : X \to Y$ が qusai-compact quasi-separated な G 射とすると $f_*\mathcal{O}_X$ は quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra. 逆に $\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra のとき, $X := \underline{\mathrm{Spec}}_Y\, \mathcal{A}$ には G が作用し, 構造射 $f : X \to Y$ は G 射で, $f_*\mathcal{O}_X$ は $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra として $\mathcal{A}$ に同型.

$(G, \mathcal{O}_X)$-algebra

$\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_X)$-algebra であるとは, $\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_X)$-module であるとともに $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[0]}$ は $\mathcal{O}_X$-algebra でもあり, 単位射 $u : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ および積 $m : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ は $(G, \mathcal{O}_X)$ 線型であることをいう.

$f : X \to Y$ が qusai-compact quasi-separated な G 射とすると $f_* \mathcal{O}_X$ は quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra. 逆に $\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra のとき, $X := \underline{\mathrm{Spec}}_Y \mathcal{A}$ には G が作用し, 構造射 $f : X \to Y$ は G 射で, $f_* \mathcal{O}_X$ は $(G, \mathcal{O}_Y)$-algebra として $\mathcal{A}$ に同型.

トーラスの表現 (1)

$X = \operatorname{Spec} R$ はアフィンで, X にはトーラス $G = \mathbb{G}_m^n$ が自明に作用するとする. つまり $a = p_2 : G \times X \to X$ とする. このとき G-linearizied $\mathcal{O}_X$-module $(\mathcal{M}, \phi)$ について,

$$\phi^{-1} : (p_2)_*(p_2)^*\mathcal{M} \to (p_2)_*(p_2)^*\mathcal{M}$$

に対応して,

$$\theta : M \otimes_R H \to M \otimes_R H$$

が定まる. ここに $H = R[G] = \Gamma(\mathbb{G}_{m,R}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{G}_{m,R}^n}) = R[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$, $M = \Gamma(X, \mathcal{M})$.

トーラスの表現 (2)

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ について

$$M_\lambda = \{m \in M \mid \theta(m \otimes 1) = m \otimes t^\lambda\} \tag{1}$$

とおくことによって, $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} M_\lambda$ であり, $\mathbb{Z}^n$-graded R-module M が得られた.

逆に $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} M_\lambda$ が $\mathbb{Z}^n$-graded R-module とすると, (1) で H-linear map $\theta : M \otimes_R H \to M \otimes_R H$ が定まり, 対応して $\mathcal{M} = \tilde{M}$ および $\phi = \tilde{\theta}^{-1} : p_2^* \mathcal{M} \to p_2^* \mathcal{M}$ が決まって G-linearized $\mathcal{O}_X$-module $(\mathcal{M}, \phi)$ が得られる.

トーラスの表現 (2)

$\lambda \in \mathbb{Z}^n$ について

$$M_\lambda = \{m \in M \mid \theta(m \otimes 1) = m \otimes t^\lambda\} \tag{1}$$

とおくことによって, $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} M_\lambda$ であり, $\mathbb{Z}^n$-graded R-module M が得られた.

逆に $M = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} M_\lambda$ が $\mathbb{Z}^n$-graded R-module とすると, (1) で H-linear map $\theta : M \otimes_R H \to M \otimes_R H$ が定まり, 対応して $\mathcal{M} = \tilde{M}$ および $\phi = \tilde{\theta^{-1}} : p_2^* \mathcal{M} \to p_2^* \mathcal{M}$ が決まって G-linearized $\mathcal{O}_X$-module $(\mathcal{M}, \phi)$ が得られる.

トーラスの表現 (3)

単純化して, k が体, $S = \operatorname{Spec} k = X$, $G = \mathbb{G}_{m,k}^n$ の場合を考える. この場合, quasi-coherent $(G, \mathcal{O}_X)$-module を単に G-module あるいは G の表現というが, G の表現とは $\mathbb{Z}^n$-graded k-vector space $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^n} V_\lambda$ に他ならない. 言い方を変えて, G の既約表現はすべて 1 次元で, $\mathbb{Z}^n$ でパラメトライズされ, G の表現はすべて完全可約 (G は線型簡約) とも言い表される.

$$\mathbb{Z}^n\text{-grading} = \text{トーラス } \mathbb{G}_m^n \text{ の作用}$$

という標語は $\mathbb{Z}^n$-grading を扱うときの基本と思われる.

トーラスの表現 (4)

特に $\mathbb{Z}^n$-graded R-module に, $((\mathbb{G}_m^n, \operatorname{Spec} R)$-module と同一視出来るということで) six operations のうちの４つ ($\otimes$, $\underline{\mathrm{Hom}}$, f_*, f^*) をはじめ, 各種操作が入るが, それは常識と合致している.

- R 自身 graded で, $R = R_0$.
- $(\bigoplus_{i \in I} M_i)_\lambda = \bigoplus_{i \in I} M_{i,\lambda}$
- $(M \otimes_R N)_\lambda = \bigoplus_{\mu+\nu=\lambda} M_\mu \otimes_R N_\nu$
- R がネーターで M が有限生成のとき, $M_\mu \neq 0$ なる μ は有限個で, $\operatorname{Hom}_R(M, N)_\lambda = \bigoplus_{\nu-\mu=\lambda} \operatorname{Hom}_R(M_\mu, N_\nu)$.
- $R \to R'$ が環準同形のとき, $M'_\lambda = M'_\lambda$ で graded R'-module は graded R-module.
- $R \to R'$ が環準同形のとき, $(R' \otimes_R M)_\lambda = R' \otimes_R M_\lambda$.

トーラスの表現 (5)

同様にして, S が一般, $G = \mathbb{G}_{m,S}^n$, X が G が自明に作用する S スキームの時, 準連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-module と $\mathbb{Z}^n$-graded quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module とは一対一に対応する.

Affine $\mathbb{G}_m^n$ 射

X に $\mathbb{G}_m^n$ が自明に作用するとする．$\mathcal{A}$ が quasi-coherent $(\mathbb{G}_{m,S}^n, \mathcal{O}_X)$-algebra であるとは，$\mathcal{A}$ が $\mathbb{Z}^n$-graded $\mathcal{O}_X$-algebra であることに他ならない．Affine な $\mathbb{G}_m^n$ 射 $Y \to X$ を構成することは，$\mathbb{Z}^n$-graded $\mathcal{O}_X$-algebra $\mathcal{A} = \bigoplus_\lambda \mathcal{A}_\lambda$ を構成することと同じである．$Y = \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{A}$ である．

$(\mathbb{G}_m, \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{A})$-module

$\mathcal{M}$ が quasi-coherent $(\mathbb{G}_m, \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{A})$-module とすると,
$f : Y = \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{A} \to X$ を構造射として, $\mathcal{N} = f_*\mathcal{M}$ は $\mathbb{Z}^n$-graded
$\mathcal{O}_X$-module であり, $\mathcal{A}$-module でもあり, 作用

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{N} = f_*\mathcal{O}_Y \otimes f_*\mathcal{M} \to f_*(\mathcal{O}_Y \otimes \mathcal{M}) = f_*\mathcal{M} = \mathcal{N}$$

は $(G, \mathcal{O}_X)$-linear. つまり, $\mathcal{N}$ は graded $\mathcal{A}$-module. 逆も成立し,
graded $\mathcal{A}$-module と quasi-coherent $(\mathbb{G}_m, \underline{\mathrm{Spec}}_X \mathcal{A})$-module とは同一概念である. $\otimes$, $\underline{\mathrm{Hom}}$ 等の取り扱いも常識と一致する.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (1)

再びトーラスから離れて一般論に戻る.

補題 12 (Neeman, Bondal–van den Bergh, H)

I は小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は (各 f_i が) quasi-compact quasi-separated な $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射とすると,

$$R(f_\bullet)_* : D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet)$$

は直和を保つ. また, 各 $i \in I$ について X_i が quasi-compact quasi-separated ならば, 3 角圏 $D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$ は compactly generated. ここに D_{Lqc} は cohomology 群が局所準連接であることを表す.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (1)

再びトーラスから離れて一般論に戻る.

補題 12 (Neeman, Bondal–van den Bergh, H)

I は小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は (各 f_i が) quasi-compact quasi-separated な $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}\,/S)$ の射とすると,

$$R(f_\bullet)_* : D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet)$$

は直和を保つ. また, 各 $i \in I$ について X_i が quasi-compact quasi-separated ならば, 3 角圏 $D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$ は compactly generated. ここに D_{Lqc} は cohomology 群が局所準連接であることを表す.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (2)

Neeman の 3 角関手の右随伴の存在に関する定理 (Brown representability のひとつのバージョン) から, 次を得る.

系 13

補題 12 と同じ状況で, $R(f_\bullet)_*$ は右随伴関手

$$R(f_\bullet)^\times : D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$$

を持つ.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (2)

Neeman の 3 角関手の右随伴の存在に関する定理 (Brown representability のひとつのバージョン) から, 次を得る.

系 13

補題 12 と同じ状況で, $R(f_\bullet)_*$ は右随伴関手

$$R(f_\bullet)^\times : D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$$

を持つ.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (3)

定理 14 (永田コンパクト化)

G は S 上 of finite type とし, $f : X \to Y$ がネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とすると, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ における factorization

$$B_G^M(X) \xrightarrow{j} Z_\bullet \xrightarrow{p} B_G^M(Y)$$

が存在して, j は image-dense な open immersion, p は proper (たとえば p が proper とは, 任意の $i \in \mathrm{Ob}(\Delta_M)$ について p_i が proper なことを意味する).

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (4)

$f : X \to Y$ が定理の通りのとき, $f^! = j^* p^\times$ と定義する．３角関手 $f^! : D_{\mathrm{Lqc}}(G, Y) \to D_{\mathrm{Lqc}}(G, X)$ は分解 $f = pj$ の取り方によらない. $f^!$ を f による捻れ逆像 (twisted inverse) 関手と呼ぶ.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}_X^! \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^! \mathbb{F})_{[0]} \to f^! \mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり,
$f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射
$f^! \mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^* \mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると,
$f^! \mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathbb{F}$.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}^!_X \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^! \mathbb{F})_{[0]} \to f^! \mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり, $f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^! \mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^* \mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると, $f^! \mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathbb{F}$.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}^!_X \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^!\mathbb{F})_{[0]} \to f^!\mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり, $f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^!\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると, $f^!\mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathbb{F}$.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}_X^! \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^!\mathbb{F})_{[0]} \to f^!\mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり, $f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^!\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると, $f^!\mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathbb{F}$.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}^!_X \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^! \mathbb{F})_{[0]} \to f^! \mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり, $f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^! \mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^* \mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると, $f^! \mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \mathbb{F}$.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}^!_X \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^!\mathbb{F})_{[0]} \to f^!\mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり,
$f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射
$f^!\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると,
$f^!\mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathbb{F}$.

同変 Grothendieck duality

定理 16 (同変 Grothendieck duality)

G は of finite type, $f : X \to Y$ はネーター的 G スキームの間の proper な G 射とすると, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ と $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ について, 圏 $D(G, Y)$ において

$$Rf_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, f^!\mathbb{G}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*\mathbb{F}, \mathbb{G}).$$

同変 Serre duality

系 17 (同変 Serre duality)

k は代数閉体, G は k 上の簡約群, T は極大トーラス, B はそれを含む (negative な) Borel 部分群, $\lambda \in X(T)$ とすると, G-module の同型

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(\lambda)) \cong H^{n-i}(G/B, \mathcal{L}(-(\lambda + 2\rho)))^*$$

が存在する．ここに, $n = \dim G/B$, ρ は positive roots の和の半分, $\mathcal{L}(?)$ は 1 次元 B 加群に associate した G-linearized ivertible sheaf.

同変双対化複体 (1)

G は有限型, X はネーター的とする. $\mathbb{I} \in D(G, X)$ が X の (G 同変) 双対化複体であるとは, $\mathbb{I} \in D_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ で $i = 0, 1, 2$ について $\mathbb{I}_{[i]}$ は $(B_G^M(X))_{[i]}$ の双対化複体であることをいう.

注意 18

$\mathbb{I}$ が X の G 同変双対化複体ならば, $\mathbb{I}$ は有限の入射次元を持つ.

同変双対化複体 (1)

G は有限型, X はネーター的とする. $\mathbb{I} \in D(G, X)$ が X の (G 同変) 双対化複体であるとは, $\mathbb{I} \in D_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ で $i = 0, 1, 2$ について $\mathbb{I}_{[i]}$ は $(B_G^M(X))_{[i]}$ の双対化複体であることをいう.

注意 18

$\mathbb{I}$ が X の G 同変双対化複体ならば, $\mathbb{I}$ は有限の入射次元を持つ.

同変双対化複体 (2)

G は有限型, X は固定された G 同変双対化複体 $\mathbb{I}_X$ を持つネーター G スキームで, $f : Y \to X$ が separated of finite type な G 射の時, $\mathbb{I}_Y := f^!(\mathbb{I}_X)$ は Y の G 同変双対化複体である．これを the G-equivariant dualizing complex of Y と呼ぶ．さらに Y が non-empty で G 連結の時, $\mathbb{I}_Y$ の 0 でない最初の cohomology 群を ω_Y で表し, Y の G-canonical sheaf と呼ぶ.

局所環論の同変版

局所環論の「次数付き版」が存在することは可換環論を学ぶものはたいてい気づいている．これは $\mathbb{G}_m$ (または $\mathbb{G}_m^n$) 同変版だと捉えることが出来る．これをより一般の群スキームの場合に拡張したい．

定義 19

X が G-local であるとは，ある unique な極小な空でない G 不変な閉部分スキーム Z が存在することをいう．このとき (X, Z) が G-local であるともいう．

例 20

$S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{G}_m$, $X = \operatorname{Spec} B$ のとき，X が G-local とは，B が $\mathbb{Z}$-graded ring として後藤・渡辺の意味で H-local であることと同じである．

局所環論の同変版

局所環論の「次数付き版」が存在することは可換環論を学ぶものはたいてい気づいている．これは $\mathbb{G}_m$ (または $\mathbb{G}_m^n$) 同変版だと捉えることが出来る．これをより一般の群スキームの場合に拡張したい．

定義 19

X が *G-local* であるとは，ある unique な極小な空でない G 不変な閉部分スキーム Z が存在することをいう．このとき (X, Z) が G-local であるともいう．

例 20

$S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{G}_m$, $X = \operatorname{Spec} B$ のとき，X が G-local とは，B が $\mathbb{Z}$-graded ring として後藤・渡辺の意味で H-local であることと同じである．

局所環論の同変版

局所環論の「次数付き版」が存在することは可換環論を学ぶものはたいてい気づいている．これは $\mathbb{G}_m$ (または $\mathbb{G}_m^n$) 同変版だと捉えることが出来る．これをより一般の群スキームの場合に拡張したい．

定義 19

X が G-local であるとは，ある unique な極小な空でない G 不変な閉部分スキーム Z が存在することをいう．このとき (X, Z) が G-local であるともいう．

例 20

$S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{G}_m$, $X = \operatorname{Spec} B$ のとき，X が G-local とは，B が $\mathbb{Z}$-graded ring として後藤・渡辺の意味で H-local であることと同じである．

最初の応用例

定理 21 (H–大溪)

k が体, G が linearly reductive なアフィン k 群スキーム, X が Cohen–Macaulay Noetherian G スキームとする. $\pi : X \to Y$ は幾何学的商でアフィン射とする. このとき Y は Noetherian かつ Cohen–Macaulay である.

証明の概略.

Noether 性は容易なので CM 性が問題. そのためには局所化して (Y, y) は local scheme (つまり局所環の Spec) としてよい. このとき $(X, \pi^{-1}(y))$ は G-local. X の CM 性と同変性によって ある d について $H^i_{\pi^{-1}(y)}(\mathcal{O}_X) = 0$ $(i \neq d)$. このとき $H^i_y(\mathcal{O}_Y) = 0$ $(i \neq d)$. □

最初の応用例

定理 21 (H–大溪)

k が体, G が linearly reductive なアフィン k 群スキーム, X が Cohen–Macaulay Noetherian G スキームとする. $\pi : X \to Y$ は幾何学的商でアフィン射とする. このとき Y は Noetherian かつ Cohen–Macaulay である.

証明の概略.

Noether 性は容易なので CM 性が問題. そのためには局所化して (Y, y) は local scheme (つまり局所環の Spec) としてよい. このとき $(X, \pi^{-1}(y))$ は G-local. X の CM 性と同変性によって ある d について $H^i_{\pi^{-1}(y)}(\mathcal{O}_X) = 0$ $(i \neq d)$. このとき $H^i_y(\mathcal{O}_Y) = 0$ $(i \neq d)$. □

Matlis 双対性の同変版

(X, Y) は Noetherian G-local とし, $\mathbb{I}_X$ は固定された X の G 双対化複体とする. $\underline{H}^i_Y(\mathbb{I}_X) \neq 0$ となる i はただひとつ. この i が 0 のとき, $\mathbb{I}_X$ は G-normalized という. 以下 $\mathbb{I}_X$ は G-normalized とする. $\underline{H}^0_Y(\mathbb{I}_X)$ を $\mathcal{E}_X$ で表し, G-Matlis 層 と呼ぶ.

定理 22 (Matlis 双対性, H–大渓)

上の状況で, $\mathcal{F}$ で長さ有限の (準) 連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-modules 全体を表すとすると, $\mathbb{D} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{E}_X)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ 自身への反変同値で, $\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{Id}$.

Matlis 双対性の同変版

(X, Y) は Noetherian G-local とし, $\mathbb{I}_X$ は固定された X の G 双対化複体とする. $\underline{H}^i_Y(\mathbb{I}_X) \neq 0$ となる i はただひとつ. この i が 0 のとき, $\mathbb{I}_X$ は G-normalized という. 以下 $\mathbb{I}_X$ は G-normalized とする. $\underline{H}^0_Y(\mathbb{I}_X)$ を $\mathcal{E}_X$ で表し, G-Matlis 層 と呼ぶ.

定理 22 (Matlis 双対性, H–大溪)

上の状況で, $\mathcal{F}$ で長さ有限の (準) 連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-modules 全体を表すとすると, $\mathbb{D} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{E}_X)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ 自身への反変同値で, $\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{Id}$.

Local duality の同変版

定理 23 (H–大溪)

(X,Y), $\mathbb{I}_X$, $\mathcal{E}_X$ は上の通りとする．このとき，$\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Coh}}(G,X)$ について同型

$$R\,\underline{\Gamma}_Y\,\mathbb{F} \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F},\mathbb{I}_X),\mathcal{E}_X)$$

が存在し，$i \in \mathbb{Z}$ について同型

$$\underline{H}^i_Y(\mathbb{F}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\underline{\mathrm{Ext}}^{-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F},\mathbb{I}_X),\mathcal{E}_X)$$

を誘導する．

自明なバンドル

S スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が G 不変射とは, $\varphi(gx) = \varphi(x)$ が成立することをいう.

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ が自明な G バンドルとは, G 同型かつ Y 同型である射 $X \cong G \times Y$ が存在することをいう.

自明なバンドル

S スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が G 不変射とは, $\varphi(gx) = \varphi(x)$ が成立することをいう.

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ が自明な G バンドルとは, G 同型かつ Y 同型である射 $X \cong G \times Y$ が存在することをいう.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ ($\Phi(g, x) = (gx, x)$) は同型.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ ($\Phi(g, x) = (gx, x)$) は同型.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ $(\Phi(g, x) = (gx, x))$ は同型.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ $(\Phi(g, x) = (gx, x))$ は同型.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ $(\Phi(g, x) = (gx, x))$ は同型.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$X \xhookleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$X \xleftarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ \rho\ } V \xhookrightarrow{\ j\ } Y$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$\begin{tikzcd} X & U \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "\rho"] & V \arrow[r, hook, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\mathrm{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$X \xleftarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ \rho\ } V \xrightarrow{\ j\ } Y$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\mathrm{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$X \xleftarrow{\ i\ } U \xrightarrow{\ \rho\ } V \xhookrightarrow{\ j\ } Y$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

概主束 (almost principal fiber bundle)

X が reduced G-scheme, $\rho : X \dashrightarrow Y$ が有理写像のとき, ρ が有理的概主 G 束とは, ある図式

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xrightarrow{j} Y$$

が有理的概主 G 束であることをいう. さらに $\rho : X \to Y$ が射であって G 不変射のとき, ρ は**概主 G 束**という.

ありがとうございました

おつかれさまでした．スライドはここまでです．

本講演のスライドは近日中に
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto/
で入手可能とさせていただきます．

ありがとうございました

おつかれさまでした. スライドはここまでです.

本講演のスライドは近日中に
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto/
で入手可能とさせていただきます.