同変層とそれを用いた不変式論

橋本　光靖

名古屋大学

2012 年 8 月 21 日

同変層

- 同変層を用いた不変式論
- 層を用いた代数幾何学
- 加群を用いた環論
- 表現を用いた表現論

fpqc 射

Definition 1

スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が fpqc とは, φ が忠実平坦で, Y の任意の quasi-compact open subset が X のある quasi-compact open subset の像であることをいう.

注意 1

“fidèlment plat et quasi-compact” の略. 文字通り「忠実平坦かつ準コンパクト」の意味に使われる場合もあるが, ここでの定義はもう少し弱い. fppf (忠実平坦かつ局所的に有限表示) ならば fpqc である.

基本設定

S はスキーム, G は S 上 fpqc な S 群スキーム, X は G スキーム, すなわち, G が作用する S スキームとする.

スキームの図式

Sch/S で S-schemes の圏を表す. I : 小さい圏とし, $X_\bullet \in \mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ とする. 圏 $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(\mathrm{Zar}(X_\bullet)) &:= \{(i, U) \mid i \in \mathrm{Ob}(I),\ U \in \mathrm{Zar}(X_i)\},\\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Zar}(X_\bullet)}((j, V), (i, U)) &:= \{(\phi, h) \mid \phi \in \mathrm{Hom}_I(i, j),\\
& h \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}/S}(V, U),\ \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{h} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_j & \xrightarrow{X_\phi} & X_i \end{array} \text{ は可換図式}\}
\end{aligned}
$$

で定義する.

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ の位相

$\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ に Grothendieck 位相を,

$$\{(j_\lambda, V_\lambda)\} \xrightarrow{\{(\phi_\lambda, h_\lambda)\}} (i, U) \text{ が covering } \iff$$
$$\forall\lambda\ j_\lambda = i,\ \phi_\lambda = \mathrm{id}_i \text{ かつ } \bigcup_\lambda h_\lambda(V_\lambda) = U$$

で定める.

$\Gamma((i, U), \mathcal{O}_{X_\bullet}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X_i})$ と定めることにより, $\mathrm{Zar}(X_\bullet)$ は ringed. $\mathrm{Mod}(\mathrm{Zar}(X_\bullet))$ は単に $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と書く.

Restriction と β map

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ と $i \in \mathrm{Ob}(I)$ に対して, $\mathcal{M}_i$ を $\Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M})$ で定めると $\mathcal{M}_i \in \mathrm{Mod}(X_i)$. これを $\mathcal{M}$ の X_i への制限という.

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$, $(\phi : i \to j) \in \mathrm{Mor}(I)$ とする. $\beta_\phi : \mathcal{M}_i \to (X_\phi)_* \mathcal{M}_j$ を

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \mathcal{M}_i) = \Gamma((i, U), \mathcal{M}) &\xrightarrow{\mathrm{res}} \Gamma((j, X_\phi^{-1}(U)), \mathcal{M}) \\ &= \Gamma(X_\phi^{-1}(U), \mathcal{M}_j) = \Gamma(U, (X_\phi)_* \mathcal{M}_j) \end{aligned}$$

で定める.

α map と同変性

随伴性からくる同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_i)}(\mathcal{M}_i, (X_\phi)_*\mathcal{M}_j) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}(X_j)}(X_\phi^*\mathcal{M}_i, \mathcal{M}_j)$$

で β_ϕ に対応する射を $\alpha_\phi : X_\phi^*\mathcal{M}_i \to \mathcal{M}_j$ で表す.

定義 2

$\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(X_\bullet)$ が同変 (equivariant) (または cartesian) であるとは, すべての $\phi \in \mathrm{Mor}(I)$ について α_ϕ が同型であることをいう. $\mathcal{M}$ が局所準連接であるとは, すべての $i \in \mathrm{Ob}(I)$ について $\mathcal{M}_i$ が準連接なことをいう. 局所準連接かつ同変のとき, 準連接という.

$\mathrm{Qch}(X_\bullet)$ はアーベル圏

補題 3

$$\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_4 \to \mathcal{M}_5$$

が $\mathcal{O}_{X_\bullet}$-modules の完全列とする.

1. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$ が局所準連接ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである.
2. すべての X_ϕ が平坦のとき, $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_4, \mathcal{M}_5$ が同変 (または準連接) ならば, $\mathcal{M}_3$ もそうである. 特に準連接 $\mathcal{O}_{X_\bullet}$ 加群層全体 $\mathrm{Qch}(X_\bullet)$ はアーベル圏で, $\mathrm{Mod}(X_\bullet)$ の中で plump (つまり, 空でなく, kernel, cokernel, extension で閉じている) である.

圏 Δ_M (1)

全順序集合 $[n]$ を $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ で定義する ($n \geq -1$). 順序集合の圏 Ord の部分圏 Δ_M を

$$\mathrm{Ob}(\Delta_M) = \{[0], [1], [2]\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\Delta_M}([i], [j]) = \{\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}([i], [j]) \mid \gamma \text{ は単射 }\}$$

で定義する.

圏 Δ_M (2)

Δ_M の射 $[n-1] \to [n]$ で $i \in [n]$ が像に入らないものを $\delta_i(n)$ で表すと, Δ_M は

$$[2] \;\substack{\xleftarrow{\delta_0(2)} \\ \xleftarrow{\delta_1(2)} \\ \xleftarrow{\delta_2(2)}}\; [1] \;\substack{\xleftarrow{\delta_0(1)} \\ \xleftarrow{\delta_1(1)}}\; [0]$$

の形. ただし $\delta_0(2)\delta_0(1) = \delta_1(2)\delta_0(1)$, $\delta_2(2)\delta_0(1) = \delta_0(2)\delta_1(1)$, $\delta_1(2)\delta_1(1) = \delta_2(2)\delta_1(1)$.

$B_G^M(X)$

$B_G^M(X) \in \mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ を

$$G \times G \times X \overset{\xrightarrow{1_G \times a}}{\underset{\xrightarrow{p_{23}}}{\xrightarrow{\mu \times 1_X}}} G \times X \overset{\xrightarrow{a}}{\underset{}{\xrightarrow{p_2}}} X$$

で定義する．ここに $a : G \times X \to X$ は作用, $\mu : G \times G \to G$ は積, p_{23}, p_2 は projection.

同変層の定義

$\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$-modules 全体を $\mathrm{Mod}(G, X)$ で表し, その対象を $(G, \mathcal{O}_X)$-module と呼ぶ. その中で同変なものを同変 $(G, \mathcal{O}_X)$-module と呼ぶ. その中で準連接なもの全体を $\mathrm{Qch}(G, X)$ で表す. 導来圏について, 例えば $D_{\mathrm{Qch}(G,X)}(\mathrm{Mod}(G, X))$ は $D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ 等と略記する.

商スタック $[X/G]$ の上の層

G は S 上アフィンとする. 商スタック $X \to [X/G]$ はある意味 G-torsor (後述) になっている, 理想的な商であるが, $[X/G]$ は一般にはスキームではなく, それを一般化したスタックと呼ばれるものでしかない. 圏同値 $\mathrm{Qch}([X/G]) \cong \mathrm{Qch}(G, X)$ が存在することが知られている.

G 線形化された層 (1)

Definition 2

$(\mathcal{M}, \phi)$ が G 線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層 とは,

1. $\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_X$ 加群層
2. $\phi : a^*\mathcal{M} \to p_2^*\mathcal{M}$ は $\mathcal{O}_{G\times X}$ 線型で次の図式は可換

$$\begin{tikzcd}
(1_G \times a)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(1_G\times a)^*\phi"] \arrow[d, "\cong"] & (1_G \times a)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* a^* \mathcal{M} \arrow[d, "p_{23}^*\phi"] \\
(\mu \times 1_X)^* a^* \mathcal{M} \arrow[r, "(\mu\times 1_X)^*\phi"] & (\mu \times 1_X)^* p_2^* \mathcal{M} \arrow[r, "\cong"] & p_{23}^* p_2^* \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

であることをいう．ここに $p_2(g,x) = x$, $p_{23}(g,g',x) = (g',x)$, $a(g,x) = gx$, $\mu(g,g') = gg'$.

G 線形化された層 (2)

準連接な線形化された $\mathcal{O}_X$ 加群層の圏は $\mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_X)$ と同値.

Affine の場合

R は可換環, $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} H$ も $X = \operatorname{Spec} B$ もアフィンとする. B には G が作用する. H は可換 R 平坦な R-Hopf 代数であり, B は (可換な) H-comodule algebra である.

定義 4

M が (G, B)-module であるとは, M は G-module であり, B-module でもあり, 両者から来る R-module 構造は一致し, 作用 $B \otimes M \to M$ が G 線型であることをいう.

これは M が (H, B)-Hopf module ということに他ならない.

補題 5

圏 $\mathrm{Qch}(G, X)$ と (G, B)-modules の圏は同値である.

極端な例

k は代数的閉体, $S = \operatorname{Spec} k$, G は k 上の線型代数群とする. $X = S = \operatorname{Spec} k$ とすると, $\mathrm{Qch}(G, X)$ は G 加群 (G の表現) のなす圏である. これが (G が自明でないとスキームとしては存在しない) $BG := [(\operatorname{Spec} k)/G]$ の上の準連接層の圏とみなせる.

G が自明ならば, $\mathrm{Qch}(G, X)$ は $\mathrm{Qch}(X)$ と同一視される.

Six operations (1)

$\mathcal{M} \in \mathrm{Qch}(B_G^M(X))$ について, $\mathcal{M}_{[0]} \in \mathrm{Mod}(X)$ ($\mathcal{M}$ への G の作用を忘却したもの) を $\mathcal{M}$ としばしば同一視する. 特に, $\mathcal{O}_{B_G^M(X)}$ は単に $\mathcal{O}_X$ (に G 作用がついたもの) と表す. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{B_G^M(X)}}$ も $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}$ や $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}$ と書いてしまう.

Six operations (2)

補題 6

$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ に対して, $\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, $\otimes^L_{\mathcal{O}_X}$ は群作用の忘却と可換. つまり, $(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G})_{[0]} \cong \mathbb{F}_{[0]} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} \mathbb{G}_{[0]}$.

注意 7

特に $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathrm{Qch}(G, X)$ に対して, $\underline{\mathrm{Tor}}_i^{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ に $\mathrm{Qch}(G, X)$ の object としての構造が入る. このことは, $S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} H$, $X = \operatorname{Spec} B$ すべてが affine でも明らかなことではない.
$\mathrm{Mod}(G, X)$ まで圏を広げることによって, K-flat resolution を容易にとることができるようになる.

Six operations (3)

補題 8

X は locally Noetherian, G は S 上 of finite type とする.
$\mathbb{F} \in D^-_{\mathrm{Coh}}(G, X)$, $\mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ のとき,
$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G}) \in D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, このとき canonical map

$$R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{G})_{[0]} \to R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}_{[0]}, \mathbb{G}_{[0]})$$

は同型.

注意 9

$\mathbb{F}$ が coherent cohomology を持つという仮定は外せない. たとえば, V が無限次元の代数群 G の表現のとき, V^* には (rational な) G-module の構造は一般には入らない.

Six operations (4)

I が小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射 (つまり自然変換) とする. $f_\bullet^{-1} : \mathrm{Zar}(Y_\bullet) \to \mathrm{Zar}(X_\bullet)$ を $f_\bullet^{-1}(i, U) = (i, f_i^{-1}(U))$ で定めると $f_\bullet^{-1}$ は ringed continuous functor. $f_\bullet^{-1}$ による引き戻し

$$(f_\bullet^{-1})^{\#} : \mathrm{Mod}(X_\bullet) \to \mathrm{Mod}(Y_\bullet)$$

を順像 $(f_\bullet)_*$ と定める. その左随伴関手を逆像と呼んで $f_\bullet^*$ と表す.

Six operations (5)

$f: X \to Y$ が G 射のとき, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射
$B_G^M(f): B_G^M(X) \to B_G^M(Y)$ が

$$
\begin{array}{lccccc}
B_G^M(X): & G \times G \times X & \overset{\xrightarrow{1_G \times a}}{\underset{\xrightarrow{p_{23}}}{\xrightarrow{\mu \times 1_X}}} & G \times X & \overset{\xrightarrow{a}}{\underset{}{\xrightarrow{p_2}}} & X \\
& \Big\downarrow {\scriptstyle 1_G \times 1_G \times f} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1_G \times f} & & \Big\downarrow {\scriptstyle f} \\
B_G^M(Y): & G \times G \times Y & \overset{\xrightarrow{1_G \times a}}{\underset{\xrightarrow{p_{23}}}{\xrightarrow{\mu \times 1_Y}}} & G \times Y & \overset{\xrightarrow{a}}{\underset{}{\xrightarrow{p_2}}} & Y
\end{array}
$$

で定まる.

$B_G^M(f)_*: \mathrm{Mod}(G, X) \to \mathrm{Mod}(G, Y)$ を単に f_* と略記する. $B_G^M(f)^*$ は f^* と略記する.

Six operations (6)

補題 10

$f : X \to Y$ が G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$ について $Lf^*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$. また, 自然な射 $Lf^*\mathbb{F}_{[0]} \to (Lf^*\mathbb{F})_{[0]}$ は同型.

補題 11

$f : X \to Y$ が quasi-compact quasi-separated な G 射のとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ について $Rf_*\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, Y)$. また, 自然な射 $(Rf_*\mathbb{F})_{[0]} \to Rf_*\mathbb{F}_{[0]}$ は同型.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (1)

補題 12 (Neeman, Bondal–van den Bergh, H)

I は小さい圏, $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ は (各 f_i が) quasi-compact quasi-separated な $\mathrm{Func}(I^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ の射とすると,

$$R(f_\bullet)_* : D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet)$$

は直和を保つ. また, 各 $i \in I$ について X_i が quasi-compact quasi-separated ならば, 3 角圏 $D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$ は compactly generated. ここに D_{Lqc} は cohomology 群が局所準連接であることを表す.

Neeman の 3 角関手の右随伴の存在に関する定理 (Brown representability のひとつのバージョン) から, 次を得る.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (2)

系 13

補題 12 と同じ状況で, $R(f_\bullet)_*$ は右随伴関手

$$R(f_\bullet)^\times : D_{\mathrm{Lqc}}(Y_\bullet) \to D_{\mathrm{Lqc}}(X_\bullet)$$

を持つ.

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (3)

定理 14 (永田コンパクト化)

G は S 上 of finite type とし, $f : X \to Y$ がネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とすると, $\mathrm{Func}(\Delta_M^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sch}/S)$ における factorization

$$B_G^M(X) \xrightarrow{j} Z_\bullet \xrightarrow{p} B_G^M(Y)$$

が存在して, j は image-dense な open immersion, p は proper (たとえば p が proper とは, 任意の $i \in \mathrm{Ob}(\Delta_M)$ について p_i が proper なことを意味する).

Six operations の 5 個目, 捻れ逆像 $f^!$ (4)

$f : X \to Y$ が定理の通りのとき, $f^! = j^* p^\times$ と定義する. 3角関手 $f^! : D_{\mathrm{Lqc}}(G, Y) \to D_{\mathrm{Lqc}}(G, X)$ は分解 $f = pj$ の取り方によらない. $f^!$ を f による捻れ逆像 (twisted inverse) 関手と呼ぶ.

基本性質

補題 15

G は of finite type, $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ はネーター的 G スキームの間の separated of finite type な G 射とする.
$\mathbb{F}, \mathbb{G} \in D^+_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ とする.

1. $(?)^!$ は pseudo-functor である. 特に, $\mathrm{id}_X^! \cong \mathrm{Id}$, $(gf)^! \cong f^! g^!$.
2. G 作用を忘れる自然な射 $(f^!\mathbb{F})_{[0]} \to f^!\mathbb{F}_{[0]}$ は同型である.
3. $f^!(D^+_{\mathrm{Qch}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ であり, $f^!(D^+_{\mathrm{Coh}}(G, Y)) \subset D^+_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ である.
4. f が of finite flat dimension のとき, 自然な射 $f^!\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_X} Lf^*\mathbb{G} \to f^!(\mathbb{F} \otimes^L_{\mathcal{O}_Y} \mathbb{G})$ は同型である.
5. f が smooth で relative dimension d を持つとすると, $f^!\mathbb{F} \cong \bigwedge^d \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathbb{F}$.

同変 Grothendieck duality

定理 16 (同変 Grothendieck duality)

G は of finite type, $f : X \to Y$ はネーター的 G スキームの間の proper な G 射とすると, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ と $\mathbb{G} \in D^{+}_{\mathrm{Lqc}}(G, Y)$ について, 圏 $D(G, Y)$ において

$$Rf_* R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, f^!\mathbb{G}) \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Y}(Rf_*\mathbb{F}, \mathbb{G}).$$

例

系 17 (同変 Serre duality)

k は代数閉体, G は k 上の簡約群, T は極大トーラス, B はそれを含む (negative な) Borel 部分群, $\lambda \in X(T)$ とすると, G-module の同型

$$H^i(G/B, \mathcal{L}(\lambda)) \cong H^{n-i}(G/B, \mathcal{L}(-(\lambda + 2\rho)))^*$$

が存在する. ここに, $n = \dim G/B$, ρ は positive roots の和の半分, $\mathcal{L}(?)$ は 1 次元 B 加群に associate した G-linearized ivertible sheaf.

同変双対化複体 (1)

G は有限型, X はネーター的とする. $\mathbb{I} \in D(G, X)$ が X の (G 同変) 双対化複体であるとは, $\mathbb{I} \in D_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ で $i = 0, 1, 2$ について $\mathbb{I}_{[i]}$ は $(B_G^M(X))_{[i]}$ の双対化複体であることをいう.

注意 18

$\mathbb{I}$ が X の G 同変双対化複体ならば, $\mathbb{I}$ は有限の入射次元を持つ.

同変双対化複体 (2)

G は有限型, X は固定された G 同変双対化複体 $\mathbb{I}_X$ を持つネーター G スキームで, $f : Y \to X$ が separated of finite type な G 射の時, $\mathbb{I}_Y := f^!(\mathbb{I}_X)$ は Y の G 同変双対化複体である．これを the G-equivariant dualizing complex of Y と呼ぶ．さらに Y が non-empty で G 連結の時, $\mathbb{I}_Y$ の 0 でない最初の cohomology 群を ω_Y で表し, Y の G-canonical sheaf と呼ぶ.

局所環論の同変版

局所環論の「次数付き版」が存在することは可換環論を学ぶものはたいてい気づいている．これは $\mathbb{G}_m$ (または $\mathbb{G}_m^n$) 同変版だと捉えることが出来る．これをより一般の群スキームの場合に拡張したい．

定義 19

X が G-local であるとは，ある unique な極小な空でない G 不変な閉部分スキーム Z が存在することをいう．このとき (X, Z) が G-local であるともいう．

例 20

$S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{G}_m$, $X = \operatorname{Spec} B$ のとき，X が G-local とは，B が $\mathbb{Z}$-graded ring として後藤・渡辺の意味で H-local であることと同じである．

最初の応用例

定理 21 (H–大溪)

k が体, G が linearly reductive なアフィン k 群スキーム, X が Cohen–Macaulay Noetherian G スキームとする. $\pi : X \to Y$ は幾何学的商でアフィン射とする. このとき Y は Noetherian かつ Cohen–Macaulay である.

証明の概略.

Noether 性は容易なので CM 性が問題. そのためには局所化して (Y, y) は local scheme (つまり局所環の Spec) としてよい. このとき $(X, \pi^{-1}(y))$ は G-local. X の CM 性と同変性によって ある d について $H^i_{\pi^{-1}(y)}(\mathcal{O}_X) = 0$ $(i \neq d)$. このとき $H^i_y(\mathcal{O}_Y) = 0$ $(i \neq d)$. □

Matlis 双対性の同変版

(X, Y) は Noetherian G-local とし, $\mathbb{I}_X$ は固定された X の G 双対化複体とする. $\underline{H^i_Y}(\mathbb{I}_X) \neq 0$ となる i はただひとつ. この i が 0 のとき, $\mathbb{I}_X$ は G-normalized という. 以下 $\mathbb{I}_X$ は G-normalized とする. $\underline{H^0_Y}(\mathbb{I}_X)$ を $\mathcal{E}_X$ で表し, G-Matlis 層 と呼ぶ.

定理 22 (Matlis 双対性, H–大溪)

上の状況で, $\mathcal{F}$ で長さ有限の (準) 連接 $(G, \mathcal{O}_X)$-modules 全体を表すとすると, $\mathbb{D} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(?, \mathcal{E}_X)$ は $\mathcal{F}$ から $\mathcal{F}$ 自身への反変同値で, $\mathbb{D}^2 \cong \mathrm{Id}$.

Local duality の同変版

定理 23 (H–大渓)

(X, Y), $\mathbb{I}_X$, $\mathcal{E}_X$ は上の通りとする．このとき, $\mathbb{F} \in D_{\mathrm{Coh}}(G, X)$ について同型

$$R\,\underline{\Gamma}_Y\,\mathbb{F} \cong R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(R\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{I}_X), \mathcal{E}_X)$$

が存在し, $i \in \mathbb{Z}$ について同型

$$\underline{H}^i_Y(\mathbb{F}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\underline{\mathrm{Ext}}^{-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{F}, \mathbb{I}_X), \mathcal{E}_X)$$

を誘導する．

自明なバンドル

S スキームの射 $\varphi : X \to Y$ が G 不変射とは, $\varphi(gx) = \varphi(x)$ が成立することをいう.

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ が自明な G バンドルとは, G 同型かつ Y 同型である射 $X \cong G \times Y$ が存在することをいう.

G-torsor (主 G バンドル)

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor (または主 G バンドル) であるとは, φ が G 不変射で, ある fpqc 射 $f : Y' \to Y$ による base change $\varphi' : X' \to Y'$ が自明な G バンドルであることをいう.

注意 24

G-torsor とは, (fpqc 位相で) 局所自明な G-bundle である.

補題 25

G 不変射 $\varphi : X \to Y$ について次は同値.

1. φ は G-torsor.
2. φ は fpqc で, $\Phi : G \times Y \to X \times_Y X$ ($\Phi(g, x) = (gx, x)$) は同型.

Grothendieck の descent theorem

補題 26

$\varphi : X \to Y$ が G-torsor とする.

1. G が S 上 quasi-compact, quasi-separated, separated, of finite presentation, affine, proper, finite ならば φ もそうである.
2. S が Noether 的で G が of finite type のとき, G は S 上 l.c.i. (local complete intersection) であり, したがって φ もそう.
3. (Grothendieck) $\varphi^* : \mathrm{Qch}(Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\varphi_* \mathcal{M})^G$ がその準逆である.
4. X の下の同型 $Y \to [X/G]$ が存在する.

G-torsor はすばらしい商であるが, 不変式論に現れる射 $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はまず G-torsor にはならない.

有理的概主束

定義 27

S スキームの図式

$$\begin{tikzcd} X & U \arrow[l, hook', "i"'] \arrow[r, "\rho"] & V \arrow[r, hook, "j"] & Y \end{tikzcd}$$

が 有理的概 G-torsor (有理的概主 G 束) であるとは,

1. G は X と Y に作用し, G は Y に自明に作用する.
2. U は X の G 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. V は Y の開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : U \to V$ は G-torsor.

概主束 (almost principal fiber bundle)

X が reduced G-scheme, $\rho : X \dashrightarrow Y$ が有理写像のとき, ρ が有理的概主 G 束とは, ある図式

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xrightarrow{j} Y$$

が有理的概主 G 束であることをいう．さらに $\rho : X \to Y$ が射であって G 不変射のとき, ρ は概主 G 束という.

随伴表現 Lie G

S はネータ, G は S 上 (有限型かつ) 順滑で, 相対次元 d を持つとする. $\mathcal{I}$ を単位元 $e = \operatorname{Spec} S \to G$ の定義イデアルとする. G は G 自身に随伴作用 $(g \cdot g' = gg'g^{-1})$ するものとすると $\mathcal{I}$ は $\mathcal{O}_G$ の G イデアルであり, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は階数 d の局所自由な $(G, \mathcal{O}_S)$ 加群となる. その双対 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_S)$ を Lie G で表し, G の随伴表現と呼ぶ.

標準層 (1)

$$X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$$

は有理的概主 G 束とし, S は固定された双対化複体 $\mathbb{I}_S$ を持つネータースキームで, X と Y は空でなく S 上分離的かつ有限型で G 連結正規な S スキームとする.

標準層 (2)

定理 28

上記設定のもとで,

1. (Knop, H) G は S 上順滑で相対次元 d を持つとする. $\Theta = \bigwedge^d \mathrm{Lie}\, G$ とおく. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^* j^* \omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^*\Theta)^*$ と $\mathcal{O}_Y$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_* i^*(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\Theta)))^G$ が存在する. ここに $f : X \to S$ は構造射.
2. $S = \mathrm{Spec}\, k$, k は体とし, G は有限な線型簡約群スキームとする. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^* j^* \omega_Y$ と $\mathcal{O}_Y$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_* i^* \omega_X)^G$ が存在する.

いつ Θ は自明か

注意 29

k が体, G は k 上のアフィン代数群とする. $d = \dim G$, $\Theta = \bigwedge^d \mathrm{Lie}\, G$ とする. Θ は G の 1 次元表現である.

1. G が有限群ならば Θ は自明.
2. G が (連結) 簡約群ならば Θ は自明.
3. (Knop) G° が簡約群でも Θ は自明とは限らない.

その他の応用

$\rho: X \dashrightarrow Y$ 有理的概主 G 束で X, Y が正規のとき, (主に Y の) 次のような情報が取り出せる場合がある.

1. ω_Y (上のとおり)
2. Y の reflexive sheaves の圏の情報
3. Y の因子類群の情報
4. (標数 p で) $F^e_* \mathcal{O}_Y$ の reflexive sheaf としての分解の情報, とりわけ Y が finite F-representation type かどうか, Y がネーター局所環の Spec のとき, F-signature.

有限群の例 (1)

k が代数閉体, $B = k[x_1, \ldots, x_n]$, $V = \bigoplus_i kx_i$ とし, $G \subset \mathrm{GL}(V)$ は有限部分群とする. $A = B^G$ とし, $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ は自然な射とする.

定義 30

$g \in \mathrm{GL}(V)$ が擬鏡映 (pseudo-reflection) とは, $\operatorname{codim}_V \{v \in V \mid gv = v\} = 1$ であることをいう.

補題 31

$\pi : X \to Y$ が概主 G 束であることと G が擬鏡映を持たないことは同値である.

有限群の例 (2)

補題 32

G が擬鏡映を持たないとする．このとき

1. $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(G)$ である．
2. $\omega_B \cong (B \otimes_A \omega_A)^{**}$ かつ $\omega_A \cong \omega_B^G$ である．
3. $(?)^G : \mathrm{Ref}(G, B) \to \mathrm{Ref}(A)$ は同値である．

有限群の例 (3)

系 33 (渡辺敬一, Braun)

G が擬鏡映を持たないとき, 次は同値.

1. $\omega_B \cong B$;
2. $G \subset \mathrm{SL}(V)$;
3. $\omega_A \cong A$;
4. A は quasi-Gorenstein (つまり ω_A は射影加群).

有限群の例 (4)

定理 34 (吉田・渡辺, 原・沢田, H–中嶋)

k が標数 $p > 0$ の代数的閉体で, G が擬鏡映をもたず, $(|G|, p) = 1$ とする. $V_1, \ldots, V_r$ を G の既約表現全体とし, $M_i = (B \otimes_k V_i)^G$ とする. $e > 0$ に対して,

$$F_*^e(A) \cong M_1^{\oplus c_{e,1}} \oplus \cdots \oplus M_r^{\oplus c_{e,r}}$$

と一意的に書け, 各 i について,

$$\lim_{e \to \infty} \frac{c_{e,i}}{p^{ne}} = \frac{\dim V_i}{|G|}.$$

Multi-section ring の例 (1)

R は固定された双対化複体 $\mathbb{I}_R$ をもつネーター環, Y は準射影的連結正規 R スキーム, $D_1, \ldots, D_r$ は Y の Weil 因子とし, $\sum_i \mathbb{Z} \cdot D_i$ はアンプルな Cartier 因子を含むとする. $V = Y_{\mathrm{reg}}$ とし,

$$\mathcal{B} = \Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \mathcal{O}\big(\sum_i \lambda_i D_i\big) t^\lambda\Big)\Big|_V,$$

$U = \underline{\mathrm{Spec}}_V \mathcal{B}$, $B = \Gamma(V, \mathcal{B})$, $X = \operatorname{Spec} B$ とおく.

$$B = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \Gamma\big(Y, \mathcal{O}\big(\sum_i \lambda_i D_i\big)\big) t^\lambda \subset k(Y)[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_r^{\pm 1}]$$

を $D_1, \ldots, D_r$ の multi-section ring という. さらに $D_1, \ldots, D_r$ が $\mathrm{Cl}(Y)$ の自由基底のとき, B を Y の Cox 環という.

Multi-section ring の例 (2)

定理 35 (H–藏野, H)

上の設定の下で, $G = \mathbb{G}_m^r$ とおくと, $X \xleftarrow{i} U \xrightarrow{\rho} V \xhookrightarrow{j} Y$ は有理的概主 G 束.

系 36 (H–藏野, H)

B は R 上有限生成と仮定する. $\omega_Y = \mathcal{O}(K_Y)$ とすると,
multi-section ring B の graded canonical module ω_B は

$$\Gamma(X, i_*\rho^* j^* \omega_Y) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \Gamma(Y, \mathcal{O}(K_Y + \sum_i \lambda_i D_i)).$$

Determinantal ring の例 (1)

$S = \operatorname{Spec} k$, $m, n, t \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq t \geq 2$ とする．$V = k^n$, $W = k^m$, $E = k^{t-1}$ とおく．$X = \operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)$, $Y = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{rank} \varphi < t\}$ と定義する．$\pi : X \to Y$ を $\pi(f, g) = f \circ g$ で定義する．

補題 37 (De Concini–Procesi, H)

$\pi : X \to Y$ は概主 $\mathrm{GL}(E)$ 束である．

Determinantal ring の例 (2)

系 38

1. (Bruns) $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(\mathrm{GL}(E)) \cong \mathbb{Z}$.
2. (Svanes) 次は同値.
   1. $m = n$.
   2. $(\mathrm{GL}(E), \mathcal{O}_X)$ 加群として $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$.
   3. $\mathcal{O}_Y$ 加群として $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$.
   4. Y は Gorenstein.

問題点

注意 39

Technical な理由から, (strictly) simplicial scheme を [0], [1], [2] だけに truncate して考えているので, 'cohomological descent' は (ほとんどの場合) 成り立たない.

注意 40

Cohomological descent の成立する strictly simplicial scheme で考えてうまくいくかどうかは考え中です. 少なくとも, G-dualizing complex は有限の入射次元を持つとは限らなくなる. 何かご存知の方, 教えてください.

ありがとうございました

本講演のスライドは近日中に
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto/
で入手可能とさせていただきます.