Almost principal fiber bundles

Mitsuyasu Hashimoto

Nagoya University

February 1, 2012

目的

G は $X = \operatorname{Spec} B$ に作用する代数群とする．主 G 束はたいへん良い商ではあるが, 射 $X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^G = Y$ はめったに主 G 束にはならない．しかしながら, 余次元 2 以上の閉集合を X および Y から適当に除くと, 残りの部分はしばしば主 G 束になる．そこで X と Y の反射層, 因子類群, 標準層を比較することができる．本講演では前半は, 後半で大事な同変因子類群について, 多少の新結果を交えながらサーベイする．後半では, 余次元 2 以上の閉集合を上と下から除いた残りが主束になる同変射を亜主束 (almost principal fiber bundle) と名付け, 反射層, 因子類群, 標準層についてよい振る舞いをすることを示し, いくつかの応用例を見ていく．

Krull 環上の加群

R は Krull 整域とする．R 加群 M が torsionless であるとはある $n \geq 0$ と単射 $M \hookrightarrow R^n$ が存在することをいう．M が torsionless であることと $\dim_{Q(R)} M \otimes_R Q(R) < \infty$ であって M がある $M \otimes_R Q(R)$ の有限生成部分加群に含まれることは同値である．ここに $Q(R)$ は R の商体である．M が torsionless で自然な射 $M \to M^{**}$ が同型の時 M は 反射的 (または因子的) という．

局所的に Krull なスキーム

Krull 整域の素スペクトルからなる開被覆を持つスキームは局所的に Krull と称する. 局所的に Krull なスキームは（無限個かもしれない) 整で局所的に Krull な開部分スキームの離散和である.

Z が局所的に Krull なスキーム, $\mathcal{M}$ は Z 上の準連接層とする. $\mathcal{M}$ が torsionless (または反射的) とは任意の $z \in Z$ に対して, ある z のアフィン近傍 $U = \operatorname{Spec} R$ で R が Krull 整域かつ $\Gamma(U, \mathcal{M})$ は torsionless (または 反射的) であるようなものが存在することをいう.

基本的な設定

本講演を通して S はスキーム, G は平坦, 準コンパクト, 準分離的な S 群スキームとする.

層の双対の同変構造 (1)

Z は局所的に Krull な G スキームとし, $\mathcal{M} \in \mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_Z)$ とする. $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{tor}}$ は torsionless な $\mathcal{O}_Z$ 加群とせよ. このとき $\mathcal{M}^* = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_Z)$ は自然に準連接 $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群としての構造を持つ.

注意 1

一般に $\mathcal{A}$ が連接 $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群, $\mathcal{B}$ が準連接 $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群のとき, $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は準連接 $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群の構造を自然に持つが, 今の場合, $\mathcal{M}$ は一般には連接ではないので, 個別の議論を要する. 鍵になるのは次の補題である.

層の双対の同変構造 (2)

補題 2

R が Krull 整域, M が torsionless な R 加群, F が平坦な R 加群のとき, 自然な射

$$\mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R F \to \mathrm{Hom}_R(M, F)$$

は同型である.

層の双対の同変構造 (3)

補題 3

Z は局所的に Krull な G スキーム, $\mathcal{M} \in \mathrm{Qch}(G, \mathcal{O}_Z)$ とする.

1. $\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathrm{tor}}$ が torsionless ならば自然な射 $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{**}$ は $(G, \mathcal{O}_Z)$ 線型である.
2. $\mathcal{M}$ が階数 1 で反射的ならば, 自然な射 $(\mathcal{M}^* \otimes \mathcal{M})^{**} \to \mathcal{O}_Z$ は $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群の同型である.

同変因子類群 (1)

Z は局所的に Krull な G スキームとする．このとき, $\mathrm{Cl}(G,Z)$ (または $\mathrm{Pic}(G,Z)$) を $(G,\mathcal{O}_Z)$　加群であって $\mathcal{O}_Z$ 加群として階数 1 の反射加群 (または可逆層) であるようなものの同型類のなす集合とする．$\mathrm{Cl}(G,Z)$ と $\mathrm{Pic}(G,Z)$ は Z のそれぞれ同変因子類群, 同変 Picard 群と呼ぶ.

同変因子類群 (2)

$\mathrm{Pic}(G, Z)$ は和

$$[\mathcal{L}] + [\mathcal{L}'] = [\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}']$$

によってアーベル群である. $\mathrm{Cl}(G, Z)$ は和

$$[\mathcal{M}] + [\mathcal{N}] = [(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^{**}]$$

によってアーベル群である.

忘却写像

G の作用を忘れる明らかな準同形

$$\alpha : \mathrm{Cl}(G, Z) \to \mathrm{Cl}(Z)$$

が得られる.

補題 4

$\Gamma(G \times Z, \mathcal{O}_{G\times Z})^\times \cong \mathrm{pr}_1^* \Gamma(G, \mathcal{O}_G)^\times$ とすると

$$\mathrm{Ker}\,\alpha \cong X(G) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{grpsch}\,/S}(G, \mathbb{G}_m)$$

である.

系

系 5

$S = \operatorname{Spec} R$, $G = \operatorname{Spec} H$, および $Z = \operatorname{Spec} B$ すべてアフィンとし, $B = R[x_1, \ldots, x_n]$ は多項式環とする. このとき $\operatorname{Ker} \alpha \cong X(G)$ である.

証明.

$$\begin{aligned}\Gamma(G \times Z, \mathcal{O}_{G \times Z})^\times &= (H \otimes_R R[x_1, \ldots, x_n])^\times \\ &\cong H[x_1 \ldots, x_n]^\times = H^\times = \mathrm{pr}_1^* \Gamma(G, \mathcal{O}_G)^\times.\end{aligned}$$

□

有限群の場合

Lemma 1

G が有限群のとき, $\operatorname{Ker}\alpha \cong H^1(G, \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)^\times)$.

群 $\mathrm{Cl}'(G, B)$

$S = \operatorname{Spec} R$, G, $Z = \operatorname{Spec} B$ はすべてアフィンとする．$\mathrm{Cl}'(G, Z)$ で, 因子的な B の分数イデアル I で, I はある $a \in Q(B^G) \setminus \{0\}$ に対して aB の (G, B)-submodule で, $I^G \neq 0$ であるようなもの全体で生成される $\mathrm{Cl}(G, B)$ の部分群を表すことにする．

補題 6

k は体, $S = \operatorname{Spec} k$, G はアフィンで連結な k 上の代数群とし, $Z = \operatorname{Spec} B$ はアフィンとする．もし k が B 内で整閉ならば $\mathrm{Cl}'(G, Z) \cap \operatorname{Ker} \alpha$ は $X(G)$ の subquotient である．

有限生成性 (1)

補題 7

$S = \operatorname{Spec} k$ で G はアフィンで有限型な k 群スキームとする．次のいずれかを仮定する．

1. $\Gamma(G \times Z, \mathcal{O}_{G\times Z})^\times = \mathrm{pr}_1^* \Gamma(G, \mathcal{O}_G)^\times$;
2. G は連結順滑で $Z = \operatorname{Spec} B$ はアフィンで k は B 内で整閉．

もし $\mathrm{Cl}(Z)$ が有限生成アーベル群ならば $\mathrm{Cl}'(G, Z)$ もそうである．

有限生成性 (2)

証明.

列 $0 \to \mathrm{Cl}'(G,Z) \cap \operatorname{Ker}\alpha \to \mathrm{Cl}'(G,Z) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Cl}(Z)$ は完全で, $\mathrm{Cl}'(G,Z) \cap \operatorname{Ker}\alpha$ は仮定により $X(G)$ の subquotient. $X(G)$ と $\mathrm{Cl}(Z)$ は有限生成なので $\mathrm{Cl}'(G,Z)$ もそうである. $\square$

Waterhouse 型の定理 (1)

補題 8 (Waterhouse)

B は G 代数で Krull 整域とする．このとき $\mathrm{Cl}(B^G)$ は $\mathrm{Cl}'(G, B)$ の subquotient である．

Waterhouse 型の定理 (2)

定理 9

$S = \operatorname{Spec} k$ で G はアフィン代数的 k 群スキームとする．B は G 代数で Krull 整域とする．$\mathrm{Cl}(B)$ は有限生成とする．次を仮定する．

1. $(k[G] \otimes_k B)^\times = k[G]^\times$ (たとえば $B = k[x_1, \ldots, x_n]$);
2. (Waterhouse) G は連結順滑で k は B 内で整閉.

このとき $\mathrm{Cl}(B^G)$ は有限生成アーベル群である.

Coker α について (1)

注意 10

Coker α については次がよく知られている.

定理 11

k が代数閉体, G は連結代数群, X は正規な G-variety とする. このとき完全列

$$\operatorname{Pic}(G, X) \xrightarrow{\alpha} \operatorname{Pic}(X) \to \operatorname{Pic}(G)$$

が存在する.

Coker α について (2)

注意 12

定理の条件の下で $\operatorname{Pic} G$ は有限群である．したがって $\operatorname{Coker}\alpha$ も有限群である．$G/\operatorname{rad} G$ が単連結半単純群ならば $\operatorname{Pic} G = 0$ である．

系 13

k, G, X は上の通りとする．$G/\operatorname{rad} G$ が単連結半単純群 (たとえば G が単連結半単純か可解群) ならば

$$\alpha : \operatorname{Pic}(G, X) \to \operatorname{Pic}(X)$$

および

$$\alpha : \operatorname{Cl}(G, X) \to \operatorname{Cl}(X)$$

は全射である．

主束

N は S 平坦な G の正規閉部分群とする.

定義 14

$\pi : X \to Y$ が G 同変 主 N 束であるとは,

1. π は G 射. つまり, G は X と Y に作用し, $\pi(gx) = g\pi(x)$.
2. N は Y に自明に作用する.
3. π は忠実平坦かつ準コンパクト.
4. $\Phi : N \times X \to X \times_Y X$ $(\Phi(n,x) = (nx, x))$ は同型.

注意

注意 15

主 N 束は fpqc 位相に関して局所自明であるし, 逆も正しい.

我々は $H = G/N$ とおく

以下 $q : G \to H$ は S 群スキームの間の準同形とし, q は G 同変主 N 束とする.

注意 16

- $N = \operatorname{Ker} q$ である.
- おおざっぱにいって $H = G/N$ である.

主束の重要な性質

補題 17

$\pi : X \to Y$ は G 同変な主 N 束とする．このとき

1. π は準分離的.
2. G が S 上有限表示 (resp. 分離的, アフィン, 有限) のとき, π もそうである.
3. $\pi^* : \mathrm{Qch}(H, Y) \to \mathrm{Qch}(G, X)$ は同値で, $(\pi_* ?)^N$ はその準逆である.

アフィン商はめったに主束にならない

主束はたいへんよい商であり, X と Y の間に強い関係のある商である. しかしながら, $X = \operatorname{Spec} B$ が G 代数の素スペクトルで, $Y = \operatorname{Spec} B^N$ のとき, 商射 $\pi : X \to Y$ はめったに主 N 束にならない.

有理的亜主束

定義 18

S スキームの図式

$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xhookrightarrow{j} Y$$

が G 同変な有理的亜主 N 束 であるとは,

1. G は X と Y に作用し, N は Y に自明に作用する.
2. V は X の G 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_X(X \setminus V) \geq 2$ である.
3. U は Y の H 安定な開部分スキームで, $\operatorname{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ である.
4. $\rho : V \to U$ は G 同変な主 N 束.

亜主束 (almost principal fiber bundle)

定義 19

$\pi : X \to Y$ が $(V, U$ によって$)$ G 同変な主 N 束 であるとは,

1. $\pi : X \to Y$ は G 射.
2. X の開部分集合 V と Y の開部分集合 U が存在して, $\pi(V) \subset U$ であり, $\rho : V \to U$ を π の制限とするとき,

$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xrightarrow{j} Y$$

が G 同変な有理的亜主 N 束である.

記号

ただいまから G は有限表示とする.

Z は局所 Krull な G スキームとする. $\mathcal{O}_Z$ 加群として反射的な準連接 $(G, \mathcal{O}_Z)$ 加群全体のなす圏を $\mathrm{Ref}(G, Z)$ で表す.

主定理 (1)

定理 20

$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xhookrightarrow{j} Y$$

は　G 同変な亜主 N 束とし, X と Y が局所的に Krull とする．このとき

1. $\mathcal{N} \mapsto i_*\rho^*j^*\mathcal{N} : \mathrm{Ref}(H, Y) \to \mathrm{Ref}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (j_*\rho_*i^*\mathcal{M})^N$ はその準逆.
2. この同値は同型 $\mathrm{Cl}(H, Y) \cong \mathrm{Cl}(G, X)$ を誘導する．

標準加群を議論するための設定

標準加群を議論するときには次を仮定する.

仮定 (#)

S は固定された双対化複体 $\mathbb{I}_S$ を持つネータースキームで, X と Y は空でなく S 上分離的かつ有限型で連結正規な S スキーム.

注意 21

上の状況で X が G スキームのとき, その構造射を $f : X \to S$ とすると, 同変捻れ逆像関手 $f^! : D^+_{\mathrm{Qch}}(G, S) \to D^+_{\mathrm{Qch}}(G, X)$ が定義される. $\mathbb{I}_X := f^!(\mathbb{I}_S)$ とおく. $\mathbb{I}_X$ は X の G 同変双対化複体である. $\mathbb{I}_X$ の 0 でない最低次のコホモロジー群を ω_X で表し, X の (G 同変) 標準加群と称する.

随伴表現 Lie G

S はネータ, G は S 上 (有限型かつ) 順滑で, 相対次元 d を持つとする. $\mathcal{I}$ を単位元 $e = \operatorname{Spec} S \to G$ の定義イデアルとする. G は G 自身に随伴作用 $(g \cdot g' = gg'g^{-1})$ するものとすると $\mathcal{I}$ は G イデアルであり, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ は階数 d の局所自由な (G, S) 加群となる. その双対 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_S)$ を Lie G で表し, G の随伴表現と呼ぶ.

主定理 (2)

定理 22

$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xhookrightarrow{j} Y$$

は G 同変な亜主 N 束とし, 仮定 (#) が充たされるとせよ.

1. N は S 上順滑で相対次元 d を持つとする. $\Theta = \bigwedge^d \operatorname{Lie} N$ とおく. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^*j^*\omega_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^*\Theta)^*$ と $(H, \mathcal{O}_Y)$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_*i^*(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\Theta)))^N$ が存在する. ここに $f : X \to S$ は構造射.
2. $S = \operatorname{Spec} k$, k は体とし, N は有限な線型簡約群スキームとする. このとき $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong i_*\rho^*j^*\omega_Y$ と $(H, \mathcal{O}_Y)$ 同型 $\omega_Y \cong (j_*\rho_*i^*\omega_X)^N$ が存在する.

注意

注意 23

$S = \operatorname{Spec} k$ で k が標数 0 の体のとき, 定理 22 は Knop による.
定理の証明のアイデアも類似している.

系

系 24

$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xhookrightarrow{j} Y$$

は　G 同変な亜主 N 束とし, 仮定 (#) が充たされて $\Theta \cong \mathcal{O}_S$ のとき, 次は同値である.

1. $\mathrm{Ref}(H, Y)$ において $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$ である.
2. $\mathrm{Ref}(G, X)$ において $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ である.

Θ はいつ自明か

注意 25

$S = \operatorname{Spec} k$ で G は k 上のアフィン代数群とする．このとき，

1. G が連結ならば $\Theta \cong k$.
2. G が有限ならば $\Theta \cong k$.
3. (Knop) 一般には Θ は自明ではない.

亜主束の場合 (1)

系 26

$\pi : X \to Y$ は G 同変亜主 N 束とし, X と Y は局所 Krull とする. このとき

1. $\mathcal{N} \mapsto (\pi^* \mathcal{N})^{**} : \mathrm{Ref}(H, Y) \to \mathrm{Ref}(G, X)$ は同値であり, $\mathcal{M} \mapsto (\pi_* \mathcal{M})^N$ はその準逆である.
2. 上の同値は同型 $\mathrm{Cl}(H, Y) \cong \mathrm{Cl}(G, X)$ を誘導する.

亜主束の場合 (2)

系 27

$\pi : X \to Y$ が G 同変亜主 N 束とする. 仮定 (#) が充たされるとせよ. このとき

1. G が順滑で相対次元 d を持つとき, $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong (\pi^*\omega_Y)^{**} \otimes_{\mathcal{O}_X} (f^*\Theta)^*$ と $(H, \mathcal{O}_Y)$ 同型 $\omega_Y \cong (\pi_*(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*(\Theta)))^N$ が存在する.
2. もし $S = \operatorname{Spec} k$ で N が有限かつ線型簡約な k 群スキームとすると, $(G, \mathcal{O}_X)$ 同型 $\omega_X \cong (\pi^*\omega_Y)^{**}$ と $(H, \mathcal{O}_Y)$ 同型 $\omega_Y \cong (\pi_*\omega_X)^N$ が存在する.

有限群の例 (1)

k が代数閉体, $B = k[x_1, \ldots, x_n]$, $V = \bigoplus_i kx_i$ とし, $G \subset \mathrm{GL}(V)$ は有限部分群とする. $N = G$, $H = \{e\}$ とおく. $A = B^G$ とし, $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = Y$ は自然な射とする.

定義 28

$g \in \mathrm{GL}(V)$ が擬鏡映とは, $\operatorname{codim}_V \{v \in V \mid gv = v\} = 1$ であることをいう.

補題 29

$\pi : X \to Y$ が亜主 G 束であることと G が擬鏡映を持たないことは同値である.

有限群の例 (2)

補題 30

G が擬鏡映を持たないとする．このとき

1. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathrm{Cl}(G, X) \cong X(G)$ である．
2. $\omega_B \cong (B \otimes_A \omega_A)^{**}$ かつ $\omega_A \cong \omega_B^G$ である．
3. $(?)^G : \mathrm{Ref}(G, B) \to \mathrm{Ref}(A)$ は同値である．

有限群の例 (3)

系 31

次は同値 (k で $\#G \neq 0$ のときは 渡辺 による).

1. $\omega_B \cong B$;
2. $G \subset \mathrm{SL}(V)$;
3. $\omega_A \cong A$;
4. A は quasi-Gorenstein (つまり ω_A は射影加群).

このとき A の Cohen-Macaulay locus は Gorenstein locus と一致する (Braun).

有限群の例 (4)

$n = \dim B = 2$ のとき, 同値 $(?)^G : \mathrm{Ref}(G, B) \to \mathrm{Ref}(A)$ は次のような翻訳をもつ.

$$\mathrm{Ref}(G, B) = \mathrm{Proj}(G, B) = \{M \in \mathrm{Mod}(G, B) \mid M \text{ is a finite projective } B\text{-module}\}$$

であって, $\mathrm{Ref}(A) = \mathrm{MCM}(A)$. もしさらに k で $\#G \neq 0$ のとき, $\mathrm{Proj}(G, B)$ の直既約対象と G の既約表現は 1 対 1 に対応し, 従って A は有限表現型 (有名).

Veronese 部分環の例 (1)

$S = \operatorname{Spec} k$ で $G = \mathbb{G}_m = \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$, $N = \mu_m = \operatorname{Spec} k[t]/(t^m - 1) \hookrightarrow G$ $(m > 1)$, $H = \operatorname{Spec} k[t^m, t^{-m}]$ とする．G 代数は $\mathbb{Z}$-graded な k 代数に他ならない．G 代数 B に対して, (G, B) 加群とは次数付 B 加群に他ならない．(G, B) 加群 M に対して, M^N は Veronese 部分加群 $M^{(m\mathbb{Z})} = \bigoplus_{i \in m\mathbb{Z}} M_i$ に他ならない．

B がネーター正規 $\mathbb{Z}$-graded k 代数で $B_0 = k$ で $B = k[B_1]$ とする．$B \neq k$ かつ $B \neq k[x]$ とする．すなわち, $\dim B \geq 2$ とする．B^N は Veronese 部分環 $B^{(m\mathbb{Z})} = \bigoplus_{i \in m\mathbb{Z}} B_i$ である．

Veronese 部分環の例 (2)

補題 32

上記仮定の下で,

1. $\pi : X = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} B^N = Y$ は G 同変亜主 N 束である.
2. $\omega_{B^N} \cong \omega_B^N$ であり, $\omega_B \cong (B \otimes_{B^N} \omega_{B^N})^{**}$ である.
3. $\omega_B \cong B(rm) \Leftrightarrow \omega_{B^N} \cong B^N(rm)$. 特に, B^N が quasi-Gorenstein であることと, B が quasi-Gorenstein で $a(B)$ が m で割れることとは同値である. 同様の結果が (B が Cohen–Macaulay であるが正規とは限らない場合に) 後藤–渡辺 によって証明されている.
4. $\mathrm{Cl}(Y) \cong \mathrm{Cl}(N, X)$. 特に $B = k[x_1, \ldots, x_n]$ の場合は $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(N) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ である.

Veronese 部分環の場合 (3)

$G = N = \mu_m$, $H = \{e\}$, $B = k[[x,y]]$ とせよ．このとき,

$$\mathrm{MCM}(B^N) = \mathrm{Ref}(B^N) \cong \mathrm{Ref}(N, B).$$

$\mathrm{Ref}(N, B)$ の直既約対象は $B, B(-1), \ldots, B(-m+1)$ しかない.
従って B^N は有限表現型.

多重切断環の例 (1)

Y が分離的かつネーター連結正規とし，$D_1, \ldots, D_r \in \mathrm{Div}(Y)$ とする．$\sum_{i=1}^r \mathbb{Z}D_i$ はアンプルな Cartier 因子を含むとする．$U = Y_{\mathrm{reg}}$ とおく．Let

$$V := \underline{\mathrm{Spec}} \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \mathcal{O}_U(\lambda_1 D_1' + \cdots + \lambda_r D_r') \xrightarrow{\rho} U$$

を自然な射とする．ここに $D_i' := D_i|_U$.

$$R := \Gamma(V, \mathcal{O}_V) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_r D_r))$$

とおき，$X = \mathrm{Spec}\, R$ とする．$N = G = \mathbb{G}_m^r$ とせよ．

多重切断環の例 (2)

補題 33

上記の記号の下で,

1. (Elizondo–藏野–渡辺) R は Krull 整域である.
2. 図式
$$X \xleftarrow{i} V \xrightarrow{\rho} U \xhookrightarrow{j} Y$$
は有理的亜主 G 束である.
3. $\mathcal{M} \mapsto \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Z}^r} \Gamma(Y, (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(\lambda_1 D_1 + \cdots + \lambda_r D_r))^{**})$ で与えられる関手 $\beta : \mathrm{Ref}(Y) \to \mathrm{Ref}(G, R)$ は同値であり, 同型 $\beta' : \mathrm{Cl}(Y) \cong \mathrm{Cl}(G, R)$ を誘導する.

多重切断環の例 (3)

定理 34

1. (Elizondo–Kurano–Watanabe) 列

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Cl}(Y) \xrightarrow{\alpha\beta'} \mathrm{Cl}(R) \to 0$$

は完全である．ここに $\gamma(\lambda) = \sum_{i=1}^r \lambda_i D_i$ であり，
$\alpha\beta'(D) = [\bigoplus_\lambda \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D + \sum_{i=1}^r \lambda_i D_i))]$ である．

2. (Kurano–H) (#) を仮定するとき，

$$\omega_R = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^r} \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(K_Y + \sum_{i=1}^r \lambda_i D_i)).$$

多重切断環の例 (4)

例 35 (有名)

$Y = \mathbb{P}^1$, $r = 1$, $D_1 = \{0\}$ の場合を考える．すると,

$$\mathrm{vb}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{Ref}(\mathbb{P}^1) \to \mathrm{Ref}(\mathbb{G}_m, k[x, y])$$

は同値．任意の次数付きの有限生成自由 $k[x, y]$ 加群は階数 1 の自由加群 $k[x, y](m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ の直和．従って $\mathbb{P}^1$ 上のベクトル束は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$ $(m \in \mathbb{Z})$ の直和.

Determinantal ring の例 (1)

$S = \operatorname{Spec} k$, $m, n, t \in \mathbb{Z}$, $m, n \geq t \geq 1$ とする．$V = k^n$, $W = k^m$, $E = k^{t-1}$　とおく．$X = \operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)$, $Y = \{\varphi \in \operatorname{Hom}(V, W) \mid \operatorname{rank} \varphi < t\}$ と定義する．$\pi : X \to Y$ を $\pi(f, g) = f \circ g$ で定義する．

補題 36

$\pi : X \to Y$ は $\mathrm{GL}(V) \times \mathrm{GL}(E) \times \mathrm{GL}(W)$ 同変な亜主 $\mathrm{GL}(E)$ 束である．

Determinantal ring の例 (2)

系 37

1. (有名) $\mathrm{Cl}(Y) \cong X(\mathrm{GL}(E)) \cong \mathbb{Z}$.
2. (Svanes) 次は同値.
    1. $m = n$.
    2. $(\mathrm{GL}(E), \mathcal{O}_X)$ 加群として $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$.
    3. $\mathcal{O}_Y$ 加群として $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y$.
    4. Y は Gorenstein.

ありがとうございました

本講演のスライドは近日中に
http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hasimoto/
で入手可能とさせていただきます.