Base change of an invariant subring

橋本 光靖

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

hasimoto@math.nagoya-u.ac.jp

Abstract

R は Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, B は G の作用する平坦 R 代数とする. $A \to B^G$ は R 代数の準同型とする. A はネーターと仮定する. もし任意の R 代数である代数的閉体 K に対して, 誘導される射 $K \otimes A \to (K \otimes B)^{K \otimes G}$ が同型になるならば, 任意の R 代数 S に対して $S \otimes A \to (S \otimes B)^{S \otimes G}$ が同型であることを証明する.

1. 序

この報告では, 次を証明する.

定理 1. R が Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, M は R 平坦 G 加群とする. A はネーター R 代数とし, V は有限生成 A 加群とする. $\varphi\colon V \to M^G$ は R 線型写像とする. もし任意の R 代数である代数的閉体 K に対して誘導される射 $\varphi_K\colon K \otimes V \to (K \otimes M)^{K \otimes G}$ が同型ならば, 任意の R 代数 S に対して自然な射 $\varphi_S\colon S \otimes V \to (S \otimes M)^{S \otimes G}$ は同型である.

系として, 次が成立する.

系 2. R は Dedekind 整域, G はアフィン平坦 R 群スキーム, B は G の作用する平坦 R 代数とする. A はネーター R 代数とし, $\varphi\colon A \to B^G$ は R 代数の準同型とする. 任意の R 代数である代数的閉体 K に対して誘導される準同型 $\varphi_K\colon K \otimes A \to (K \otimes B)^{K \otimes G}$ が同型であるなら, 任意の R 代数 S に対して自然な射 $\varphi_S\colon S \otimes A \to (S \otimes B)^{S \otimes G}$ は同型である.

もし作用と不変式環の生成元と関係式の候補が Dedekind 整域 (例えば $\mathbb{Z}$) の上で与えられ, 問題となる群スキームがその Dedekind 整域上平坦であれば, 一般の可換環上の代りに代数的閉体の上で議論をすれば良いことになる.

与えられた Dedekind 整域上の群スキーム G が平坦かどうかも, ある場合には体上の議論で判定できる. 次の補題により, 例えば symplectic 群は $\mathbb{Z}$ 上平坦であることが確かめられる.

補題 3. R は $\mathbb{Z}$ または体上有限生成で, 体ではない Dedekind 整域, G は有限型な R スキームで, 構造射 $\pi\colon G \to \operatorname{Spec} R$ は切断 $\sigma\colon \operatorname{Spec} R \to G$ を持つとする. また, ある非負整数 d が存在して, 任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $R/\mathfrak{m} \otimes G$ は既約被約で d 次元とする. このとき G は R 平坦で既約被約 $d+1$ 次元である.

証明. まず, $f\colon X \to \operatorname{Spec} R$ が有限型の時に, $x \in X$ が閉点ならば, $f(x)$ も閉点で, $\kappa(x)/\kappa(f(x))$ は代数拡大である. これは, R 上有限型な体は R が $\mathbb{Z}$ 上有限生成のときは有限体, 体 k 上有限生成のときは k の有限次代数拡大体であることから容易である.

次に, R の極大イデアルの全体 $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合である. そうでないとすると, ある $a \in R \setminus \{0\}$ が存在して $R[a^{-1}]$ が体になるが, 前段により, R が体になって仮定に反して矛盾である.

[9, Theorem 31.7] により, R は強鎖状である. A が R 上有限生成整域とすると, 次元公式 [9, Theorem 15.6] によって, A の極大イデアル $\mathfrak{M}$ に対して,

$$\begin{aligned}\operatorname{ht}\mathfrak{M} &= \operatorname{ht}(\mathfrak{M}\cap R)/P + \operatorname{trans.deg}_{Q(R/P)} Q(A) - \operatorname{trans.deg}_{R/(\mathfrak{M}\cap R)} A/\mathfrak{M} \\ &= \operatorname{trans.deg}_{Q(R/P)} Q(A) + 1 - \operatorname{ht} P\end{aligned}$$

でこれは $\mathfrak{M}$ によらないから $\dim A_{\mathfrak{M}} = \dim A$. ここに P は $R \to A$ の核である. よって, X が既約な R スキームならば, X の任意の閉点 x について, $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$ であることに注意する.

まず, G の既約成分でその π による像が $\operatorname{Spec} R$ の生成点を含むものがただひとつ存在することを示す. π は切断 σ を持つから全射で, そのような既約成分は存在する. そのような既約成分 G_0, G_1 $(G_0 \neq G_1)$ が2つあったとせよ. G_0 から, G_0 と他の既約成分との交わりを除いた G の開集合を U, G_1 から, G_1 と他の既約成分との交わりを除いた G の開集合を V とする. $\pi(U)$, $\pi(V)$ は $\operatorname{Spec} R$ 内で稠密な可構集合だから, $\operatorname{Spec}(R)$ から有限個の閉点を除いたものである. $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合なので, ある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(R) \cap \pi(U) \cap \pi(V)$ が存在する. $R/\mathfrak{m} \otimes G$ は既約で, $R/\mathfrak{m} \otimes U$, $R/\mathfrak{m} \otimes V$ はその空でない開集合で, 互いに交わらないから矛盾. G の既約成分で構造射 $\pi\colon G \to \operatorname{Spec} R$ による像が $\operatorname{Spec} R$ の生成点を含むものがただひとつなので, それを G° で表す. G° の生成点を η で表す.

G の open subset U に対して, $\Gamma(\mathcal{I}, U) := \Gamma(\mathcal{O}_G, U)_{\mathrm{tor}}$ と定義して, $\mathcal{I}$ は G の連接イデアル層である. ここに, R 加群 M に対して M_{tor} は M の torsion part $\{m \in M \mid \exists a \in R \setminus \{0\}\ am = 0\}$ である. $\mathcal{I}$ を定義イデアルとする G の閉部分スキームを $\bar{G}$ とする. 定義により $\bar{G}$ は R 平坦である. Going-down theorem により, $x \in \bar{G}$ ならば, x の一般化 ξ で $\pi(\xi)$ が $\operatorname{Spec} R$ の生成点であるものがある. よって集合論的に $\bar{G} \subset G^\circ$ である. また, $Q(R) \otimes \bar{G} = Q(R) \otimes G \ni \eta$ なので, $\eta \in \bar{G}$. ゆえに集合論的に $G^\circ \subset \bar{G}$. 以上により, 集合論的に $\bar{G} = G^\circ$ であり, $\bar{G}$ は既約.

切断 $\sigma\colon \operatorname{Spec} R \subset G$ (π が分離射と仮定していないので, 一般には閉埋入とは限らない埋入である) のスキーム論的像 E は R 平坦である. 実際, $U = \operatorname{Spec} A$ が G のアフィン開集合とすると, $E \cap U = \operatorname{Spec} B$, ここに, B は $A \to \Gamma(\sigma^{-1}(U), \operatorname{Spec} R)$ の像である. $\Gamma(\sigma^{-1}(U), \operatorname{Spec} R)$ が R-torsion free なので, B もそうである.

H が R 平坦な G の閉部分スキームならば, H は $\bar{G}$ に含まれる. 特に E は $\bar{G}$ の閉部分スキームであり, σ は $\bar{G}$ を経由する. 従って $\pi(\bar{G}) = \operatorname{Spec} R$.

$Z = \operatorname{Supp}\mathcal{I}$ とおくと, Z は G の closed subset であり, $\pi(Z) \subset \operatorname{Spec} R$ は可構集合で生成点を含まない. よって $\pi(Z)$ は有限個の閉点のみからなる集合. ところが $\operatorname{Max}(R)$ は無限集合なので, ある $\mathfrak{n} \in \operatorname{Max}(R) \setminus \pi(Z)$ がとれ, $R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G} \cong R/\mathfrak{n} \otimes G$ は d 次元. 閉点 $y \in R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G}$ をとる. $\bar{G}$ の既約性と最初の注意と $\bar{G}$ の平坦性を利用して,

$$\dim \bar{G} = \dim \mathcal{O}_{\bar{G},y} = \dim \mathcal{O}_{R/\mathfrak{n}\otimes\bar{G},y} + \dim R_{\pi(y)} = \dim R/\mathfrak{n} \otimes \bar{G} + \dim R = d+1.$$

今, $\pi(Z)$ が仮に空でないとして, $\mathfrak{m} \in \pi(Z)$ とする. 列

$$0 \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{I} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{O}_{\bar{G}} \to 0 \tag{1}$$

は完全である．これは，任意の G のアフィン開集合 $U = \operatorname{Spec} A$ に対して，$I := \Gamma(U, \mathcal{I}) = A_{\mathrm{tor}}$ とおくとき，

$$0 \to A/\mathfrak{m}A \otimes_A I \to A/\mathfrak{m}A \to A/\mathfrak{m}A \otimes_A A/I \to 0$$

が完全であることと同じだが，$A/\mathfrak{m}A \otimes_A$ は $R/\mathfrak{m} \otimes_R$ と同じで，A/I が R-flat だからこの列は完全である．$\mathfrak{m}$ の選び方と中山の補題により，$\mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes \mathcal{I} \neq 0$．$R/\mathfrak{m} \otimes G$ は d 次元既約被約だから，$R/\mathfrak{m} \otimes \bar{G}$ は d 次元未満で，($\pi(\bar{G}) = \operatorname{Spec} R$ だから) 空ではない．$x \in R/\mathfrak{m} \otimes \bar{G}$ を閉点とする．$\bar{G}$ の既約性と最初の注意，また $\bar{G}$ の平坦性により，

$$\dim \bar{G} = \dim \mathcal{O}_{\bar{G},x} = \dim \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G,x} + \dim R_{\pi(x)} < d + 1.$$

これは矛盾である．

以上により，$\pi(Z) = \emptyset$，つまり，$G = \bar{G}$ が示された．つまり G は平坦既約で $d+1$ 次元である．

A が R 平坦代数で $a \in A$, $r \in R \setminus \{0\}$, ra がベキ零とすると，ある n に対し $r^n a^n = 0$ だから $a^n = 0$．つまり，a はベキ零．これは A_{red} が R 平坦であることを示す．このことから，G_{red} も R 平坦である．$G \neq G_{\mathrm{red}}$ とせよ．$\mathcal{J}$ を G_{red} の G における定義イデアルとし，$\mathfrak{m} \in \pi(\operatorname{Supp}(\mathcal{J}))$ とすると，上と同様の議論で，

$$0 \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{J} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \to \mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G_{\mathrm{red}}} \to 0$$

は完全で，$\mathcal{O}_{R/\mathfrak{m}\otimes G} \otimes_{\mathcal{O}_G} \mathcal{J} \neq 0$．これは $R/\mathfrak{m} \otimes G$ が被約であることに反して矛盾である．従って $\mathcal{J} = 0$ で G は被約である． □

De Concini と Procesi [3] は任意の可換環上，いくつかの重要な群スキームの作用について，その不変式環を計算している．[6] では一般線型群とシンプレクティック群の作用について，体上での幾何的な議論を利用した簡単な証明を与えている．一般の基礎環の場合を体上の場合に帰着させるため，[6] では良いフィルター付けの知識が利用されているが，一般線型群とシンプレクティック群は $\mathbb{Z}$ 上平坦だと分かっているので，これは全くの一般論であったということが分かる．

2 節では上記定理を証明する．3 節では，応用例を与える．

2. 主定理の証明

R は可換環，G は R 平坦 R 群スキームとする．C は G の座標環 $R[G]$ を表すものとする．これは R 平坦な可換 R ホップ代数となる．G 加群とは，右 C 余加群に他ならない．[7, Chapter 2] を参照．G 加群 M に対し，$M^G = \{m \in M \mid \omega(m) = m \otimes 1\}$ とおく，ここに $\omega \colon M \to M \otimes C$ は余作用である．自然な埋め込み $\operatorname{Hom}_G(R, M) \hookrightarrow \operatorname{Hom}_R(R, M) = M$ により，R 加群 $\operatorname{Hom}_G(R, M)$ は M^G と同一視される．ここに R は自明な G 加群としての構造を与えられている．

一般に，R 加群 V は自明な G 加群であると見なされる．従って，G 加群 M と R 加群 V に対して，$V \otimes M$ は余作用が

$$1_V \otimes \omega_M \colon V \otimes M \to V \otimes M \otimes C$$

で与えられる G 加群である．ここに ω_M は M の余作用．

G 加群の圏は abelian で，十分多くの単射的対象を持つ ([5, Lemma I.3.3.3] および [5, Lemma I.3.5.9])．G 加群 M と R 代数 S に対し，$S \otimes M$ の右 $S \otimes C$ 余加群としての構造は合成

$$S \otimes M \xrightarrow{1_S \otimes \omega} S \otimes M \otimes C \xrightarrow{\alpha} (S \otimes M) \otimes_S (S \otimes C),$$

で与えられる．ここに α は $\alpha(s\otimes m\otimes c)=(s\otimes m)\otimes(1\otimes c)$ で与えられる同型である．特に, $(S\otimes M)^{S\otimes G}=(S\otimes M)^G$ である．従って $(S\otimes M)^G$ は S 加群である．

$\varphi\colon V\to M^G$ は R 線型写像とする．このとき, $\varphi_S\colon S\otimes V\to(S\otimes M)^G$ を $\varphi_S(s\otimes v)=s\otimes\varphi(v)$ で定義する．R 代数の射 $S\to S'$ に対し, $\rho_{S',S}\colon S'\otimes_S(S\otimes M)^G\to(S'\otimes M)^G$ を

$$\rho_{S'S}(s'\otimes(\sum_i s_i\otimes m_i))=\sum_i s's_i\otimes m_i$$

で定義する．$\rho_{S,R}\colon S\otimes M^G\to(S\otimes M)^G$ は ρ_S で表す．従って $s\in S$ および $m\in M^G$ に対して $\rho_S(s\otimes m)=s\otimes m$ である．φ_S は合成

$$S\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi}S\otimes M^G\xrightarrow{\rho_S}(S\otimes M)^G$$

であることに注意する．

G 加群 M に対し, $\mathrm{Ext}^i_G(R,M)$ を $H^i(G,M)$ で表し, M の i 番目の G コホモロジーと呼ぶ．特に, $H^0(G,M)=M^G$ である．

M は G 加群とする．すると [5, Lemma I.3.6.16] により, $H^i(G,M)\cong H^i(\mathrm{Cobar}_C(M,R))$ である．ここに $\mathbb{F}(M):=\mathrm{Cobar}_C(M,R)$ は複体

$$M\xrightarrow{\delta^0}M\otimes C\xrightarrow{\delta^1}M\otimes C\otimes C\xrightarrow{\delta^2}\cdots$$

であって, その boundary map が

$$\delta^n=(-1)^{n+1}\omega_M\otimes 1_{C^{\otimes n}}+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i}1_M\otimes 1_{C^{\otimes i}}\otimes\Delta_C\otimes 1_{C^{\otimes n-i-1}}+1_M\otimes 1_{C^{\otimes n}}\otimes u$$

で与えられるものである．ここに, $\Delta_C\colon C\to C\otimes C$ は余積, $u\colon R\to C$ は unit map である．定義により, R 加群 V に対し, $\mathbb{F}(V\otimes M)\cong V\otimes\mathbb{F}(M)$ である．もし M が R 平坦ならば, $\mathbb{F}(M)$ は R 平坦複体である．従って, 普遍係数定理 [5, Lemma III.2.1.2] とその証明により, 次が成立する．

補題 4. R が Dedekind 整域で M が R 平坦 G 加群とすると, 完全列

$$0\to S\otimes M^G\xrightarrow{\rho_S}(S\otimes M)^G\to\mathrm{Tor}_1^R(S,H^1(G,M))\to 0$$

が存在する．

定理 1 の証明. R, G, A, V, および M は定理の通りとする．

まず, 定理を S が体の場合に証明する．K を S の代数的閉包とする．$\varphi_S\colon S\otimes V\to(S\otimes M)^G$ と K との S 上のテンサー積をとって, $1\otimes\varphi_S\colon K\otimes V\to K\otimes_S(S\otimes M)^G$ を得る．K は S 上忠実平坦なので, この写像が同型ならば良い．合成

$$K\otimes V\xrightarrow{1\otimes\varphi_S}K\otimes_S(S\otimes M)^G\xrightarrow{\rho_{K,S}}(K\otimes M)^G$$

は φ_K であり, 定理の仮定により同型である．K は S 平坦なので, $\rho_{K,S}$ は補題 4 により同型である．従って $1\otimes\varphi_S$ は望み通り同型となり, 定理は S が体の場合正しい．

次に $H^1(G,M)$ が R 平坦であることを示す．R がネーターなので, すべての R の素イデアル P に対し, $\mathrm{Tor}_1^R(R/P,H^1(G,M))=0$ であることをいえば良い．R が 1

次元整域なので, R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, H^1(G,M))=0$ であることをいえば良い. 一方, 合成

$$R/\mathfrak{m}\otimes V \xrightarrow{1\otimes\varphi} R/\mathfrak{m}\otimes M^G \xrightarrow{\rho_{R/\mathfrak{m}}} (R/\mathfrak{m}\otimes M)^G,$$

であるところの $\varphi_{R/\mathfrak{m}}$ は, 前段により, 同型である. 従って $\rho_{R/\mathfrak{m}}$ は全射である. 補題 4 により, $\mathrm{Tor}_1^R(R/\mathfrak{m}, H^1(G,M))=0$ である. 従って $H^1(G,M)$ は望み通り R 平坦である.

$H^1(G,M)$ が R 平坦なので, 任意の R 代数 S に対して

$$\rho_S\colon S\otimes M^G\to (S\otimes M)^G$$

は補題 4 によって同型である. 任意の R 代数である体 K に対して合成

$$K\otimes V \xrightarrow{1\otimes\varphi} K\otimes M^G \xrightarrow{\rho_K} (K\otimes M)^G,$$

は φ_K と一致し, これは同型で, ρ_K も同型であるから, $1\otimes\varphi\colon K\otimes V\to K\otimes M^G$ も同型である.

次に V が R 平坦であることを示す. まず, R が DVR の場合に示す. t は R の極大イデアルの生成元とする. V がネーター A 加群なので, R 加群としての捻じれ部分 $V_{\mathrm{tor}}=\bigcup_{r\geq 0}(0:_V t^r)$ は ある r に対して $(0:_V t^r)$ に一致する. $V_{\mathrm{tor}}\neq 0$ であるとせよ. すると $r\geq 1$ である. r を出来るだけ小さくとる. すると $a\in(0:t^r)\setminus(0:t^{r-1})$ がとれる. もし $a\in tV$ と仮定すると, $a=ta'$, $a'\in V$ とかける. すると $a'\in V_{\mathrm{tor}}=(0:t^r)$ だから, $t^{r-1}a=t^ra'=0$. これは a の取り方に反して矛盾. 従って $a\notin tV$. よって $1\otimes a\in R/tR\otimes_R V$ は 0 でない. $1\otimes\varphi\colon R/tR\otimes_R V\to R/tR\otimes M^G$ は同型なので, $1\otimes\varphi(a)\in R/tR\otimes M^G$ は 0 でない. これは M^G において $\varphi(a)\neq 0$ であることを示す. M^G は捻じれのない R 加群なので, $\varphi(t^ra)=t^r\varphi(a)$ も 0 でない. これは仮定 $t^ra=0$ に反して矛盾. 従って V は R 加群として捻じれがない. R は DVR なので, V は R 平坦である. 一般の場合を考える. $\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとする. 上の議論を $R'=R_\mathfrak{m}$, $A'=R'\otimes A$, $V'=R'\otimes V$ および $M'=R'\otimes M$ に適用して, 任意の $\mathfrak{m}$ に対して $V_\mathfrak{m}$ が $R_\mathfrak{m}$ 平坦である. これは V が R 平坦であることを示す.

[5, Lemma I.2.1.4] により, $\varphi\colon V\to M^G$ は単射であり, $C:=\mathrm{Coker}\,\varphi$ は R 平坦である. R 代数である体 K に対して $K\otimes C=0$ なので, [5, Corollary I.2.1.6] により $C=0$ である. これは φ が同型であることを示す.

S が R 代数とする. 合成

$$S\otimes V \xrightarrow{1\otimes\varphi} S\otimes M^G \xrightarrow{\rho_S} (S\otimes M)^G$$

は $1\otimes\varphi$ と ρ_S が同型だから同型である. これが示すべきことであった. □

3. 応用

R は可換環とする. R スキーム Z に対し, $\Gamma(Z,\mathcal{O}_Z)$ を $R[Z]$ で表す. $v\geq 0$ と有限生成 R 自由加群 F と G に対し, rank 高々 v の線型写像からなる $\mathrm{Hom}_R(F,G)$ の閉部分スキームを $Y_v(F,G)$ で表す. 写像 $R[\mathrm{Hom}_R(F,G)]\to R[Y_v(F,G)]$ の核を $I_{v+1}(F,G)$ で表す. もし F と G がそれぞれ rank f と g ならば, $R[\mathrm{Hom}_R(F,G)]$ は fg 変数多項式環 $R[x_{ij}]_{1\leq i\leq g,\,1\leq j\leq f}$ に同一視され, $I_{v+1}(F,G)$ は行列 (x_{ij}) のすべての $v+1$ 次の小行列式全部で生成される $R[x_{ij}]$ のイデアルと同一視される. もし $v\geq\min(f,g)$ ならば $Y_v(F,G)=\mathrm{Hom}_R(F,G)$ であり, $I_{v+1}(F,G)=0$ である.

$m, n, r, s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $s \leq m, r$ であり, $t \leq n, r$ とする. $u := \min(s, t)$ とおく. $V := R^n$, $W := R^m$, $E := R^r$, $X := Y_s(E, W) \times Y_t(V, E)$, $Y := Y_u(V, W)$ とおく. $\pi\colon X \to Y$ を $\pi(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ により定義する. $G := GL(E)$ とし, $G' := GL(W) \times GL(V)$ とする. すると $G \times G'$ は X に $g \in G$, $g_1 \in GL(W)$, $g_2 \in GL(V)$ $\varphi \in Y_s(E, W)$, $\psi \in Y_t(V, E)$ について $(g, (g_1, g_2)) \cdot (\varphi, \psi) = (g_1 \varphi g^{-1}, g \psi g_2^{-1})$ によって作用する. $G \times G'$ を Y に $g \in G$, $g_1 \in GL(W)$, $g_2 \in GL(V)$, $\rho \in Y$ に対して $(g, (g_1, g_2)) \cdot \rho = g_1 \rho g_2^{-1}$ で作用させることにより, 射 π は $G \times G'$ 同変である. G は Y に自明に作用することに注意する.

定理 1 の応用として, 次を証明する.

定理 5. 射 $\pi\colon X \to Y$ は同型 $\pi^{\#}\colon R[Y] \to R[X]^G$ を誘導する.

証明. 定理 1 により, $R = K$ は代数的閉体として良い.

次の表現論からの基本的な事実を思い出す. G 加群 M が良いフィルター付けを持つとは, 任意の支配的ウエイト λ に対して $\operatorname{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), M) = 0$ となることをいう. ここに, $\Delta_G(\lambda)$ は最高ウエイト λ の Weyl 加群 [7, (II.4.16)] である.

分割 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ で $\lambda_1 \leq r$ であるものに対し, Schur 加群 [1] $L_\lambda E^*$ は双対 Weyl 加群である. 実際, $L_\lambda E^* \cong (\bigwedge^r E^*)^{\otimes k} \otimes L_\mu E$ である. ここに $\mu = (r - \lambda_k, \ldots, r - \lambda_1)$. Cauchy の公式 [1] により, $K[\operatorname{Hom}(E, W)] \cong \operatorname{Sym}(E \otimes W^*)$, $I_{s+1}(E, W)$, $K[Y_s(E, W)]$, $K[\operatorname{Hom}(V, E)] \cong \operatorname{Sym}(V \otimes E^*)$, $I_{t+1}(V, E)$ および $K[Y_t(V, E)]$ は G 加群として良いフィルター付けを持つ. 良いフィルター付けを持つ加群はテンサー積で閉じており [10], [4], [8], 拡大でも閉じているから, 自然な全射

$$\rho\colon K[\operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)] \to K[Y_s(E, W) \times Y_t(V, E)]$$

の核 I は良いフィルター付けを持つ. これは完全列

$$0 \to I_{s+1}(E, W) \otimes K[\operatorname{Hom}(V, E)] \to I \to K[Y_s(E, W)] \otimes I_{t+1}(V, E) \to 0$$

から分かる. 従って $H^1(G, I) = 0$ である. よって ρ は全射

$$\rho^G\colon K[\operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)]^G \to K[Y_s(E, W) \times Y_t(V, E)]^G = K[X]^G$$

を誘導する. 次の De Concini と Procesi の定理 [3] により, $\pi^{\#}\colon K[Y] \to K[X]^G$ は全射である.

定理 6. 合成

$$\operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E) \to Y_r(V, W) \qquad ((\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi)$$

は同型 $K[Y_r(V, W)] \to K[\operatorname{Hom}(E, W) \times \operatorname{Hom}(V, E)]^G$ を誘導する.

あとは $\pi^{\#}\colon K[Y] \to K[X]^G$ が単射であることを示せば良い. $K[Y]$ は整域 (例えば [2, (6.3)] を見よ) なので, π は支配射であることをいえば良い. 線形代数により, $0 \leq i \leq u$ である任意の i に対し, rank i の線型写像 $V \to W$ の集合は 1 個の G' 軌道をなす. さらに, rank u の線型写像のなす G'-orbit は Y で稠密である. π が G' 同変なので, $\pi(X)$ が rank u の線型写像を少なくともひとつ含むことをいえば良い. しかしこれは自明である. □

References

[1] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. Math.* **44** (1982), 207–278.

[2] W. Bruns and U. Vetter, *Determinantal Rings*, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer (1988).

[3] C. De Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, *Adv. Math.* **21** (1976), 330–354.

[4] S. Donkin, *Rational Representations of Algebraic Groups*, Lecture Notes in Math. **1140**, Springer (1985).

[5] M. Hashimoto, *Auslander-Buchweitz Approximations of Equivariant Modules*, Cambridge (2000).

[6] M. Hashimoto, Another proof of theorems of De Concini and Procesi, to appear in *J. Math. Kyoto Univ.*

[7] J. C. Jantzen, *Representations of Algebraic Groups*, 2nd edition, AMS (2003).

[8] O. Mathieu, Filtrations of G-modules, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **23** (1990), 625–644.

[9] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, first paperback edition, Cambridge (1989).

[10] J. Wang, Sheaf cohomology on G/B and tensor products of Weyl modules, *J. Algebra* **77** (1982), 162–185.