GEIGLE-LENZING COMPLETE INTERSECTIONS AND ORLOV'S THEOREM

名古屋大学多元数理科学研究科 伊山 修
Osamu Iyama
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

本稿では, Orlov の定理と Geigle-Lenzing 完全交叉環の 2 つのテーマを扱う.

Orlov の定理 [O] は, Auslander-Buchweitz 理論の次数付き Gorenstein 環 R に対する大幅な改良と見なすことができる. 極大 Cohen-Macaulay 加群の安定圏 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ を, 導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R)$ の三角部分圏として実現するものであり, 多くの非自明な結論を導く強力な定理である. 近年の可換環論における最大級の発見の一つと言っても過言ではないだろう. 本稿は Orlov の定理に関する概説から始める.

一方, 重み付き射影直線は 1987 年に Geigle-Lenzing [GL] によって導入されたものである. これは Ringel [R] が 1984 年に導入した標準多元環と導来圏同値であり, 今日では箙の道多元環とともに, 多元環の表現論における基本的対象として深く研究されている. 近年ではミラー対称性の研究においても重要な役割を果たしている [KST1, KST2]. 本稿では, [HIMO] に従って重み付き射影直線の高次元化である *Geigle-Lenzing* **完全交叉環**を導入して基本的な性質を調べる. その際に Orlov 型の定理が, 重要な役割を果たすのである.

1. Orlov の定理

1.1. **Auslander-Buchweitz 理論.**

この節では, R を局所 Gorenstein 環とし, $\mathsf{CM}R$ で極大 Cohen-Macaulay R 加群の圏を表す. Auslander-Buchweitz による以下の定理は良く知られている.

定理 1. [AB] *任意の有限生成 R 加群 C に対し, R 加群の完全列*

$$0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0 \text{ および } 0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$$

で, $X_C, X^C \in \mathsf{CM}R$ であり, Y_C, Y^C の射影次元が有限であるものが存在する.

これを導来圏の観点から定式化した, Buchweitz [Bu] による三角圏同値

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}R)/\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}R) \simeq \underline{\mathsf{CM}}R \tag{1.1}$$

も良く知られている. ここで $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}R)$ は $\mathsf{mod}R$ の有界導来圏, $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}R)$ は $\mathsf{proj}R$ の有界ホモトピー圏であり, 左辺は $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}R)$ の三角部分圏 $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}R)$ による Verdier 商である. 一方, 右辺は極大 Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathsf{CM}R$ の, 射影対象を通過する射全体のなすイデアルによる商である.[1]

一般に三角圏 $\mathcal{T}$ とその三角部分圏 $\mathcal{U}$ が与えられたとき, 良い状況では, 自然な関手 $\mathcal{T} \to \mathcal{T}/\mathcal{U}$ が右もしくは左随伴関手（あるいは両方）を持つ. その場合には, $\mathcal{T}$ の部分圏として Verdier 商 $\mathcal{T}/\mathcal{U}$ を実現することができる. しかし (1.1) の場合, 自然な関手 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}R) \to \underline{\mathsf{CM}}R$ は, 右随伴関手も左随伴関手も持たないことが簡単に分かる.

次節では, 局所環の代わりに次数付き環を扱うことにより, この状況が大幅に改善されることを観察する.

---

[1] 左辺の商を**特異導来圏**と呼び, 記号 $\mathsf{D}_{\mathrm{sg}}(R)$ で表すこともある.

1.2. **Orlov の発見.** この節では, $\mathbb{Z}$ 次数付き Gorenstein 環 $R=\bigoplus_{i=0}R_i$ で, $k:=R_0$ が体であるものを扱う.

以下, Orlov の発見を可能な限り平易な形で述べることを試みる. $\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R$ で $\mathbb{Z}$ 次数付き有限生成 R 加群の圏, $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}R$ で極大 Cohen-Macaulay 加群の成す充満部分圏, $\mathsf{proj}^{\mathbb{Z}}R$ で射影加群の成す充満部分圏を表す. このとき

$$\mathcal{D}:=\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R)\supset\mathcal{P}:=\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}^{\mathbb{Z}}R)$$

に対して, 前節の局所環の場合 (1.1) と全く同様に, 三角圏同値

$$\mathcal{D}/\mathcal{P}\simeq\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R \tag{1.2}$$

が存在する.

さらにいくつかの記号を準備する必要がある. $X\in\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R$ の i 次部分を X_i で表す. $i\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathsf{mod}^{\geq i}R:=\{X\in\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R\mid\forall j<i,\ X_j=0\},\quad\mathcal{D}^{\geq i}:=\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\geq i}R)$$

とおくと, $\mathcal{D}^{\geq i}$ は $\mathcal{D}$ の三角部分圏となる. また, Gorenstein 環 R は R 自身を双対化複体に持つので, 導来圏の自己双対

$$(-)^*:=\mathbf{R}\mathrm{Hom}_R(-,R):\mathcal{D}\to\mathcal{D}$$

が得られる. このとき, $\mathcal{D}$ の部分圏 $\mathcal{D}^{\geq 0}$ と $(\mathcal{D}^{\geq 1})^*$ の共通部分を考えると, 次の主張が成立する.

定理 2. *R を $\mathbb{Z}$ 次数付き Gorenstein 環とする. このとき, 以下の三角圏同値が存在する:*

$$\mathcal{D}^{\geq 0}\cap(\mathcal{D}^{\geq 1})^*\to\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R.$$

つまり $\mathcal{D}$ の商圏 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ が, $\mathcal{D}$ の部分圏 $\mathcal{D}^{\geq 0}\cap(\mathcal{D}^{\geq 1})^*$ として実現されるのである. 以下に証明を与えるが, その際に基本となるのが, 次の概念である.

定義 3. 三角圏の *thick* **部分圏**とは, 直和因子で閉じた充満三角部分圏のことである.

三角圏 $\mathcal{T}$ とその thick 部分圏 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ が以下の 2 条件を満たす時に, $\mathcal{T}=\mathcal{X}\perp\mathcal{Y}$ と表し, これを**半直交分解**と呼ぶ.[2]

(A) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{X},\mathcal{Y})=0$.
(B) 任意の $T\in\mathcal{T}$ に対して, 三角 $X\to T\to Y\to X[1]$ で $X\in\mathcal{X}$, $Y\in\mathcal{Y}$ となるものが存在する.

半直交分解 $\mathcal{T}=\mathcal{X}\perp\mathcal{Y}$ から, 三角圏同値 $\mathcal{X}\simeq\mathcal{T}/\mathcal{Y}$ および $\mathcal{Y}\simeq\mathcal{T}/\mathcal{X}$ が得られることは基本的である. 以下ではこの事実を頻繁に用いる. また, 自然な関手 $\mathcal{T}\to\mathcal{T}/\mathcal{Y}$ は右随伴関手 $\mathcal{T}/\mathcal{Y}\simeq\mathcal{X}\subset\mathcal{T}$ を持ち, 自然な関手 $\mathcal{T}\to\mathcal{T}/\mathcal{X}$ は左随伴関手 $\mathcal{T}/\mathcal{X}\simeq\mathcal{Y}\subset\mathcal{T}$ を持つ.

定理 2 の証明. 全ての生成元の次数が i 以上（i 以下）であるような $\mathbb{Z}$ 次数付き有限生成射影 R 加群の圏を $\mathsf{proj}^{\geq i}R$（$\mathsf{proj}^{\leq i}R$）で表し, 以下の $\mathcal{P}$ の部分圏を考える:

$$\mathcal{P}^{\geq i}:=\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}^{\geq i}R),\quad\mathcal{P}^{\leq i}:=\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}^{\leq i}R).$$

(Step 1) 以下の半直交分解を示す:

$$\mathcal{D}=\mathcal{P}^{\leq i-1}\perp\mathcal{D}^{\geq i} \tag{1.3}$$
$$\mathcal{P}=\mathcal{P}^{\leq i-1}\perp\mathcal{P}^{\geq i}. \tag{1.4}$$

(1.3) のみ示す. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{P}^{\leq i-1},\mathcal{D}^{\geq i})=0$ は明らかなので, 条件 (B) のみ示せば良い.

任意の $P\in\mathsf{proj}^{\mathbb{Z}}R$ に対し, $(i-1)$ 次以下の斉次元で生成される P の部分加群を $P^{\leq i-1}$ で表し, $P^{\geq i}:=P/P^{\leq i-1}$ とおくと, 分裂完全列 $0\to P^{\leq i-1}\to P\to P^{\geq i}\to 0$ が得られる.

[2]**ねじれ対**, **安定** t **構造**とも呼ばれ, また $\mathcal{T}=\langle\mathcal{Y},\mathcal{X}\rangle$ と表す場合もある.

任意の $\mathcal{D}$ の対象は, 右に有界な複体 $Q = (\cdots \xrightarrow{d^{-1}} Q^0 \xrightarrow{d^0} Q^1 \xrightarrow{d^1} \cdots) \in \mathsf{K}^-(\mathsf{proj}^{\mathbb{Z}}R)$ と同型であり, 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して $d^j(Q^j) \subset \mathrm{rad}Q^{j+1}$ が成立するとして一般性を失わない. すると以下の可換図式によって, $Q^{\leq i-1} \in \mathcal{P}^{\leq i-1}$ と $Q^{\geq i} \in \mathcal{D}^{\geq i}$ が定まる（$k = R_0$ であることより, $Q^{\leq i-1}$ が有界複体となることに注意せよ）:

$$\begin{tikzcd}
Q^{\leq i-1} \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & (Q^{-1})^{\leq i-1} \arrow[r] \arrow[d] & (Q^0)^{\leq i-1} \arrow[r] \arrow[d] & (Q^1)^{\leq i-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
Q \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "d^{-2}"] & Q^{-1} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & Q^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d] & Q^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[d] & \cdots \\
Q^{\geq i} & \cdots \arrow[r] & (Q^{-1})^{\geq i} \arrow[r] & (Q^0)^{\geq i} \arrow[r] & (Q^1)^{\geq i} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

これより三角 $Q^{\leq i-1} \to Q \to Q^{\geq i} \to Q^{\leq i-1}[1]$ が得られるので, 条件 (B) が成立することが示された.
(Step 2) 以上より三角圏同値

$$\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R \overset{(1.2)}{\simeq} \mathcal{D}/\mathcal{P} \simeq (\mathcal{D}/\mathcal{P}^{\leq i-1})/(\mathcal{P}/\mathcal{P}^{\leq i-1}) \overset{(1.3),(1.4)}{\simeq} \mathcal{D}^{\geq i}/\mathcal{P}^{\geq i} \tag{1.5}$$

が得られる.
(Step 3) (1.3) の半直交分解 $\mathcal{D} = \mathcal{P}^{\leq 0} \perp \mathcal{D}^{\geq 1}$ の右辺に, $\mathcal{D}$ の自己双対 $(-)^*$ を適用すると, $\mathcal{D}$ の半直交分解

$$\mathcal{D} = (\mathcal{D}^{\geq 1})^* \perp (\mathcal{P}^{\leq 0})^* = (\mathcal{D}^{\geq 1})^* \perp \mathcal{P}^{\geq 0} \tag{1.6}$$

が得られる. ここで $(\mathcal{P}^{\leq 0})^* = \mathcal{P}^{\geq 0}$ となることを用いた.
(Step 4) 次の半直交分解を示す:

$$\mathcal{D}^{\geq 0} = (\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq 1})^*) \perp \mathcal{P}^{\geq 0}. \tag{1.7}$$

半直交分解 (1.6) から, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq 1})^*, \mathcal{P}^{\geq 0}) = 0$ が成立し, さらに任意の $X \in \mathcal{D}^{\geq 0}$ に対して, 三角

$$Y \to X \to Z \to Y[1]$$

で $Y \in (\mathcal{D}^{\geq 1})^*$ かつ $Z \in \mathcal{P}^{\geq 0}$ となるものが存在する. $\mathcal{P}^{\geq 0} \subset \mathcal{D}^{\geq 0}$ であることと, $\mathcal{D}^{\geq 0}$ は $\mathcal{D}$ の三角部分圏であることから, この三角の項は全て $\mathcal{D}^{\geq 0}$ に属する. とくに $Y \in \mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq 1})^*$ が成立する. 以上より主張が示された.
(Step 5) 以上より, 三角圏同値

$$\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq 1})^* \overset{(1.7)}{\simeq} \mathcal{D}^{\geq 0}/\mathcal{P}^{\geq 0} \overset{(1.5)}{\simeq} \underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$$

が得られる. □

Orlov の発見は $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ のみならず, 射影スキーム上の連接層の導来圏も対象としている. 以下, $\mathsf{mod}_0^{\mathbb{Z}}R$ で k 上有限次元の $\mathbb{Z}$ 次数付き R 加群の成す圏を表す. これは $\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R$ の Serre 部分圏となり, 商アーベル圏

$$\mathsf{qgr}R := \mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R/\mathsf{mod}_0^{\mathbb{Z}}R$$

が定まる. R が次数 1 の元で生成される場合には, $\mathsf{qgr}R$ は射影スキーム $\mathrm{Proj}\,R$ 上の連接層の圏と同値であり, 一般の場合にもスタック上の連接層の圏と見なされる.

$\mathsf{qgr}R$ の導来圏 $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ も, $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ と同様に $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R)$ の Verdier 商として表される:

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R)/\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}_0^{\mathbb{Z}}R) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R).$$

Koszul 双対性をご存じの方は, $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ の間の, 何らかの類似性を期待したくなるだろう. 実際, 定理 2 と同様に, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ も $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}}R)$ の部分圏として実現されるのである.

定理 4. *R を $\mathbb{Z}$ 次数付き Gorenstein 環で, a 不変量を a とする. このとき以下の三角圏同値が存在する:*

$$\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq a+1})^* \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R).$$

証明は定理 2 と同様なので省略する.

以上の結果の応用を挙げてこの章を終えることにする. $\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq 1})^*$ と $\mathcal{D}^{\geq 0} \cap (\mathcal{D}^{\geq a+1})^*$ はともに $\mathcal{D}$ の部分圏であるため, これらの間の包含関係を考えることができるが, 定理 2 および 4 から直ちに, 次の結果が得られる.

系 5. [O] *R を $\mathbb{Z}$ 次数付き Gorenstein 環で, a 不変量を a とする.*

(a) *$a < 0$ ならば, $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ は $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ の thick 部分圏と三角圏同値である.*
(b) *$a = 0$ ならば, $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ は $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ と三角圏同値である.*
(c) *$a > 0$ ならば, $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ は $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ の thick 部分圏と三角圏同値である.*

圏 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ あるいは $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ を扱った経験のある方は, この結果の意外性に驚くに違いない. これらの三角圏同値は一意的なものではないことにも注意されたい.

この系 5 が Orlov の定理として広く知られているものであるが, 導来圏の中に $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{Z}}R$ と $\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{qgr}R)$ を実現した定理 2 および 4 に, より基本的な重要性がある. Orlov の定理の意義は, いまだ十分に理解されているとは言い難く, これは今後の表現論あるいは可換環論における重要問題の一つとなるだろう.

以下, 本稿では Orlov の定理を Geigle-Lenzing 完全交叉環という特別な環に応用する.

2. Geigle-Lenzing 完全交叉環

以下, k を基礎体とする. 射影空間 $\mathbb{P}^d$ の斉次座標環を $k[T_0, \ldots, T_d]$ とし, 各 $1 \leq i \leq n$ に対して, $\mathbb{P}^d$ 内の超平面 $L_1, \ldots, L_n$ が一次式

$$\ell_i = \sum_{j=0}^{d} \lambda_{ij} T_j \in k[T_0, \ldots, T_d].$$

で定義されるとする. 正整数の組 $(p_1, \ldots, p_n)$ に対し, 可換 k 代数 R を

$$R := k[T_0, \ldots, T_d, X_1, \ldots, X_n]/(X_i^{p_i} - \ell_i \mid 1 \leq i \leq n)$$

と定める. さらに $\vec{x}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ と $\vec{c}$ で生成される自由アーベル群 $\langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{c} \rangle$ の剰余群

$$\mathbb{L} := \langle \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n, \vec{c} \rangle / \langle p_i \vec{x}_i - \vec{c} \mid 1 \leq i \leq n \rangle$$

を考える. $\deg X_i := \vec{x}_i$, $\deg T_j := \vec{c}$ とおくことにより, R は $\mathbb{L}$ 次数付き k 代数となる. R の基本的な性質を挙げる.

- R は Krull 次元 $d+1$ の完全交叉環である.
- R の a 不変量は

$$\vec{\omega} := (n - d - 1)\vec{c} - \sum_{i=1}^{n} \vec{x}_i \in \mathbb{L}$$

  で与えられる. つまり $\mathbb{L}$ 次数付き R 加群としての同型 $\mathrm{Ext}_R^{d+1}(k, R(\vec{\omega})) \simeq R$ が存在する.

以下, 本文を通して $L_1, \ldots, L_n$ が一般の位置にあると仮定する. このとき, 組 $(R, \mathbb{L})$ を *Geigle-Lenzing* **完全交叉環**と呼ぶ. $d = 1$ の場合, これは Geigle-Lenzing によって導入された重み付き射影直線 [GL] の斉次座標環に他ならない.

2.1. **Cohen-Macaulay 表現論.** $\mathbb{L}$ 次数付き有限生成 R 加群の圏を $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}}R$ で表す．この節では [HIMO] に従って, $\mathbb{L}$ 次数付き極大 Cohen-Macaulay R 加群の圏

$$\mathsf{CM}^{\mathbb{L}}R := \{X \in \mathsf{mod}^{\mathbb{L}}R \mid \forall i > 0\ \ \mathrm{Ext}^i_R(X, R) = 0\}$$

を調べる．安定圏 $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R$ は三角圏であり, *Auslander-Reiten-Serre* **双対性**と呼ばれる関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R}(X, Y) \simeq D\,\mathrm{Hom}_{\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R}(Y, X(\vec{\omega})[d]) \quad (X, Y \in \underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R)$$

が存在する．ここで D は k 双対である．

この節の主目的は, $\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R$ が（非可換）有限次元 k 多元環の導来圏と三角圏同値であることを観察することである．そのために次の多元環のクラスを導入する．

定義 6. $\mathbb{L}$ の有限部分集合 I に対し, $I \times I$ で添字付けられた k ベクトル空間

$$A^I := (R_{\vec{x}-\vec{y}})_{\vec{x},\vec{y}\in I}$$

を考える．これは R における積と行列の積を用いることにより, 有限次元 k 多元環の構造を持つ．つまり $r = (r_{\vec{x},\vec{y}})_{\vec{x},\vec{y}\in I} \in A^I$ と $s = (s_{\vec{x},\vec{y}})_{\vec{x},\vec{y}\in I} \in A^I$ の積を, 以下で定める:

$$r \cdot s := \left(\sum_{\vec{z}\in I} r_{\vec{x},\vec{z}} \cdot s_{\vec{z},\vec{y}}\right)_{\vec{x},\vec{y}\in I}.$$

次に, $\vec{x}_i$ $(1 \le i \le n)$ と $\vec{c}$ で生成される $\mathbb{L}$ の部分モノイドを, $\mathbb{L}_+$ で表わす．$\vec{x} - \vec{y} \in \mathbb{L}_+$ であるときに $\vec{x} \ge \vec{y}$ と表わすことにより, $\mathbb{L}$ は半順序集合となる．$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{L}$ に対して,

$$[\vec{x}, \vec{y}] := \{\vec{z} \in \mathbb{L} \mid \vec{x} \le \vec{z} \le y\}$$

とおく．このとき,

$$\vec{\delta} := d\vec{c} + 2\vec{\omega} \in \mathbb{L}$$

から定まる k 多元環

$$A^{\mathrm{CM}} := A^{[0,\vec{\delta}]}$$

を, *CM* **標準多元環**と呼ぶ．

定理 7. [HIMO] $(R, \mathbb{L})$ を *Geigle-Lenzing* 完全交叉環とするとき, 以下の三角圏同値が存在する*:*

$$\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A^{\mathrm{CM}}).$$

定理 7 の略証. $\mathbb{L}$ の部分集合 I に対して,

$$\mathsf{mod}^I R := \{X \in \mathsf{mod}^{\mathbb{L}}R \mid \forall \vec{x} \in \mathbb{L}\backslash I,\ X_{\vec{x}} = 0\}, \quad \mathcal{D}^I := \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}^I R)$$

とおく．このとき定理 2 と全く同様にして, 次の三角圏同値が示される:

$$\mathcal{D}^{\mathbb{L}_+} \cap (\mathcal{D}^{-\mathbb{L}_+^c})^* \simeq \underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}}R. \tag{2.1}$$

ここで $-\mathbb{L}_+^c$ は, $\mathbb{L}$ における $-\mathbb{L}_+$ の補集合である．

一方, k 上有限次元の加群からなる $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}}R$ の充満部分圏を $\mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}}R$ で表わし,

$$\mathsf{mod}_0^I R := \mathsf{mod}^I R \cap \mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}}R, \quad \mathcal{S}^I := \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}_0^I R)$$

とおく．このとき A^{CM} の定義から, 圏同値

$$\mathsf{mod}_0^{[0,\vec{\delta}]}R \simeq \mathsf{mod}A^{\mathrm{CM}} \text{ および } \mathcal{S}^{[0,\vec{\delta}]} \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod}A^{\mathrm{CM}}) \tag{2.2}$$

が存在することが容易に分かる．

ここで R の a 不変量が $\vec{\omega}$ であることより,

$$(\mathcal{S}^{-\mathbb{L}_+^c})^* = \mathcal{S}^{\mathbb{L}_+^c + \vec{\omega}} \tag{2.3}$$

が成立し, また群 $\mathbb{L}$ の構造を分析することによって

$$\mathbb{L}_+ \cap (\mathbb{L}_+^c + \vec{\omega}) = [0, \vec{\delta}] \tag{2.4}$$

が容易に示される. 以上より

$$\mathcal{D}^{\mathbb{L}_+} \cap (\mathcal{D}^{-\mathbb{L}_+^c})^* \supset \mathcal{S}^{\mathbb{L}_+} \cap (\mathcal{S}^{-\mathbb{L}_+^c})^* \overset{(2.3)}{=} \mathcal{S}^{\mathbb{L}_+} \cap \mathcal{S}^{\mathbb{L}_+^c + \vec{\omega}} \supset \mathcal{S}^{\mathbb{L}_+ \cap (\mathbb{L}_+^c + \vec{\omega})} \overset{(2.4)}{=} \mathcal{S}^{[0,\vec{\delta}]}$$

が得られるが, 実はこの左辺と右辺が等しいことが, 正則列を用いた議論により分かる. 以上をまとめることにより, 三角圏同値

$$\underline{\mathsf{CM}}^{\mathbb{L}} R \overset{(2.1)}{\simeq} \mathcal{D}^{\mathbb{L}_+} \cap (\mathcal{D}^{-\mathbb{L}_+^c})^* = \mathcal{S}^{[0,\vec{\delta}]} \overset{(2.2)}{\simeq} \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod} A^{\mathrm{CM}})$$

が得られる. □

この結果は $(d, n) = (1, 3)$ の場合に Kussin-Meltzer-Lenzing [KLM] によって示され, 超曲面（$n = d + 2$）の場合に Futaki-Ueda [FU] によって示された. 超曲面でない場合は, $d = 1$ のときでさえ新しい結果である.

超曲面の場合には, CM 標準多元環は $\mathbb{A}$ 型の箙の道多元環のテンソル積で与えられ, 例えばこれから Knörrer 周期性が直ちに従う:

$$A^{\mathrm{CM}} \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} k\mathbb{A}_{p_i-1}.$$

一般の場合にも, 箙と関係式を用いて A^{CM} を表示することができる.

これらの結果の簡単な応用として, **有限表現型**の Geigle-Lenzing 完全交叉環が分類される [HIMO]. また, 高次元 Auslander-Reiten 理論において基本的となる, d **有限表現型**の Geigle-Lenzing 完全交叉環の研究にも, 定理 7 は有用である [HIMO].

Geigle-Lenzing 完全交叉環に関しては, 多くの興味深い問題が存在するが, ここでは割愛する. 詳細は [HIMO] を参照されたい.

2.2. **Geigle-Lenzing 射影空間.** この節では [HIMO] に従って Geigle-Lenzing 射影空間を調べる. 引き続き, $\mathbb{L}$ 次数付き有限生成 R 加群の圏を $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R$ で表し, k 上有限次元の加群からなる充満部分圏を $\mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$ で表わす. $\mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$ は $\mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R$ の Serre 部分圏となっており, 商圏

$$\mathsf{coh}\,\mathbb{X} := \mathsf{mod}^{\mathbb{L}} R / \mathsf{mod}_0^{\mathbb{L}} R$$

はアーベル圏となる. これを *Geigle-Lenzing* **射影空間** $\mathbb{X}$ 上の**連接層**の圏と呼ぶ.

$d = 1$ の場合が, Geigle-Lenzing の導入した重み付き射影直線に他ならない. Geigle-Lenzing 射影空間は, 射影空間 $\mathbb{P}^d$ 上の特別な整環によって実現することが可能である [RV, IL].

$\mathsf{coh}\,\mathbb{X}$ は大域次元 d のアーベル圏であり, また *Auslander-Reiten-Serre* **双対性**と呼ばれる関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{X}}(X, Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}_{\mathbb{X}}^d(Y, X(\vec{\omega})) \quad (X, Y \in \mathsf{coh}\,\mathbb{X})$$

が存在する. ここで D は k 双対である.

この節では, Geigle-Lenzing 射影空間もある有限次元多元環と導来圏同値になることを観察する. このときに重要なのは, d **標準多元環**

$$A^{\mathrm{ca}} := A^{[0, d\vec{c}]}$$

である.

定理 8. [HIMO] $\mathbb{X}$ を *Geigle-Lenzing* 射影空間とするとき, 以下の三角圏同値が存在する:

$$\mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{coh}\,\mathbb{X}) \simeq \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\mathsf{mod} A^{\mathrm{ca}}).$$

証明は定理 7 と同様なので省略する.

$n=0$ の場合は, 射影空間 $\mathbb{P}^d$ に対する Beilinson [Be] の古典的な結果であり, この場合の A^{ca} を *Beilinson* **多元環**と呼ぶ. $d=1$ の場合が, Geigle-Lenzing [GL] によるものであり, この場合の A^{ca} が Ringel [R] によって導入された**標準多元環**である. $n \le d+1$ の場合は Baer [Ba] によって知られており, 最近 $n=d+2$ の場合が Ishii-Ueda [IU] によって与えられた.

Geigle-Lenzing 完全交叉環と同様に, Geigle-Lenzing 射影空間に関しても多くの興味深い問題が存在するが, ここでは割愛する. 詳細は [HIMO] を参照されたい.

References

[AB] M. Auslander, R. Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*, Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987). Mem. Soc. Math. France (N.S.) No. 38 (1989), 5–37.

[Ba] D. Baer, *Tilting sheaves in representation theory of algebras*, Manuscripta Math. 60 (1988), no. 3, 323–347.

[Be] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 68–69.

[Bu] R. O. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings*, unpublished manuscript.

[FU] M. Futaki, K. Ueda, *Homological mirror symmetry for Brieskorn-Pham singularities*, Selecta Math. (N.S.) 17 (2011), no. 2, 435–452.

[GL] W. Geigle, H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 265–297, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[HIMO] M. Herschend, O. Iyama, H. Minamoto, S. Oppermann, *Representation theory of Geigle-Lenzing complete intersections*, arXiv:1409.0668.

[IU] A. Ishii, K. Ueda, *A note on derived categories of Fermat varieties. Derived categories in algebraic geometry*, 103–110, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2012.

[IL] O. Iyama, B. Lerner, *Tilting bundles on orders on* $\mathbf{P}^d$, to appear in Israel J. Math., arXiv:1306.5867.

[KST1] H. Kajiura, K. Saito, A. Takahashi, *Matrix factorization and representations of quivers. II. Type ADE case*, Adv. Math. 211 (2007), no. 1, 327–362.

[KST2] H. Kajiura, K. Saito, A. Takahashi, *Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with* $\epsilon=-1$, Adv. Math. 220 (2009), no. 5, 1602–1654.

[KLM] D. Kussin, H. Lenzing, H. Meltzer, *Triangle singularities, ADE-chains, and weighted projective lines*, Adv. Math. 237 (2013), 194–251.

[O] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, 503–531, Progr. Math., 270, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[R] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, 1099. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[RV] I. Reiten, M. Van den Bergh, *Grothendieck groups and tilting objects*, Algebr. Represent. Theory 4 (2001), no. 1, 1–23.

O. Iyama: Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan

E-mail address: iyama@math.nagoya-u.ac.jp

URL: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~iyama/