数　学

第 11 巻

1959

日本数学会編集
岩波書店発行

に対して．$x_i^{(1)}, x_j^{(2)}$ の双1次形式

$$\sum_{i,j=1}^{p} a_{ij} x_i^{(1)} x_j^{(2)}$$

を作るという意味である.）　これは L. Gårding が示したように，次の性質をもつ．

1°　$P_l(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(l)})$

$$\geqq (P_l(\lambda^{(1)}))^{\frac{1}{l}} \cdot (P_l(\lambda^{(2)}))^{\frac{1}{l}} \cdots (P_l(\lambda^{(l)}))^{\frac{1}{l}}.$$

2°　上式において等号が成り立つのは，$\lambda_{ik}^{(1)}, \lambda_{ik}^{(2)}, \cdots, \lambda_{ik}^{(l)}$ の二つずつが比例するとき，またそのときにかぎる．

さて，明らかに

$$P_{l-1,1} = P_l(\underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{l-1}, \lambda')$$

であるから，性質 1° により

$$P_{l-1,1} \geqq (P_l(\lambda))^{\frac{l-1}{l}} \cdot (P_l(\lambda'))^{\frac{1}{l}}$$

となる．そこで5の性質1の仮定，すなわちいまは

$$P_{l,0} = P_{0,l}$$

が成り立つとする．(4) により

$$(5)\qquad P_l(\lambda) = P_l(\lambda')$$

となるから

$$P_{l-1,1} \geqq P_l(\lambda') = P_{0,l}.$$

ゆえに性質1が成り立つ．次に性質1の仮定，すなわち上式で等号が成り立つとする．性質 2° により

$$\lambda'_{ik} = \rho\lambda_{ik} \qquad (\rho > 0)$$

となる．これを (5) に代入して，少なくとも一つの H_l が 0 でなければ $\rho=1$ となり，結局 $\lambda_{ik}=\lambda'_{ik}$．すなわち性質2が成り立つ．（すべての $H_l=0$ なら，H_l の定義から，すべての $1/k_i=0$ となって矛盾である.）

7.　以上でわれわれの定理は証明できたことになる．すなわち，5でのべた性質1, 2をもつ函数 F があるから，5の予備定理によって直ちに定理がえられる．

曲面が compact でなくて境界をもつときにも，Stokes の公式を用いて同様の定理が成り立つことがわかる．

さらに，これまで用いた H_l に関して

$$H_l^{\alpha} H_{l+1}^{\beta}, \quad \alpha+\beta>0, \quad \alpha \geqq 0, \quad \beta \geqq 0$$

が，あたえられた convex, closed hypersurface M^n 上で一定値であれば，X は超球であることが示される．

このように，convex, closed hypersurface M^n の主曲率半径 $1/k_1, 1/k_2, \cdots, 1/k_n$ の間の種々の多項式をあたえることによって，M^n の rigidity が証明されるのであるが，その代りに主曲率 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ そのものに関する多項式をあたえて M^n の rigidity を論ずることは，種種の方法がないわけではなかろうが，まだ成功していないようである．　（松本　誠・滝沢精二・後藤雄三記）

第3回微分幾何学シンポジウム

1957年3月名古屋大学で開かれた会での決定によって，第3回微分幾何学シンポジウムは，1958年3月27日から3日間岡山大学理学部数学教室において行なわれた．参加者は主として東北，東京，名古屋，京都，広島，九州大の人達と，岡山大数学教室の諸教官を合わせて40数名で，国立大学入試第2期校の試験のすぐあとのせいもあり新制大学におられる方達があまり参加できなかったのは残念であった．参加者が暖かい岡山を予想して来られたのに，あいにく27日から急に寒い気候に変り会場で震えるようなことになったのは，主催校として申し訳けなかった．

28日の夜には岡山大学内の非常勤講師宿舎津島クラブにおいて懇親会が行なわれ，32人が出席した．第3日の午後を，前回の参会者多数の希望意見に従って観光のためにあてたが，主催校として計画した倉敷市大原美術館の見学には17名の人達が参加した．また，国立公園鷲羽山方面の観光に出かけた人もあった．

なお次回のシンポジウムは，来年の春広島大学において開かれることに決定した．

以下に各講演のアブストラクトを記しておく．

第1日

1.　岩堀長慶（東大）：既約な線型実リー環について．

E. Cartan の有名な論文 (Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, J. Math. Pures Appl., **10** (1914), 149-186) の紹介で，半単純 Lie 環の一般的考察によって原著のわかりにくい面を改良し近代的な表現によって解説した．

実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の実既約表現 d の複素化 d^c が既約のとき，d を第一類という．また d^c が可約のときは $d^c=\rho+\bar{\rho}$ となるような互いに複素共役な複素既約表現 $\rho, \bar{\rho}$ がある．このとき d を第二類という．逆に複素既約表現 ρ に対して前記の意味の d があり，それぞれに応じて ρ は第一類，第二類であるという．従って $\mathfrak{g}$ のあらゆる実既約表現を求める問題は，$\mathfrak{g}$ のあらゆる複素既約表現を求めそれが第一類か第二類かを決定する問題になる．$\mathfrak{g}$ の根基を $\mathfrak{r}$ とするとき，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ は $\mathfrak{g}$ の任意の完全可約表現によって0に写されるから $\mathfrak{g}$ の代りに $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ を考えれば十分である．それで $\mathfrak{g}$ は単純 Lie 環の直和 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r$ としてよい．$\mathfrak{g}$ の複素既約表現 ρ は，$\mathfrak{g}_i$ の複素既約表現 ρ_i,　$i=1,2,\cdots,r$,　のテンソル和 $\rho=\rho_1\oplus\cdots\oplus\rho_r$ として表わされる．一般に $\mathfrak{g}$ の複素既約表現 ρ が $\bar{\rho}$ と同値のとき ρ を自己共役という．このとき $\rho J=J\rho$ なる行列 J で $J\bar{J}=cI$ (c は実数で $c\neq 0$) なるものがある．$c/|c|=\varepsilon$ を ρ の指数という．すると ρ が第一類であることと ρ が自己共役で指数$=1$ なことが同値となり，また $\mathfrak{g}$ が前記のように $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\cdots+\mathfrak{g}_r$ のときには $\rho\sim\bar{\rho}$ と $\rho_i\sim\bar{\rho}_i$, $i=1,2,\cdots,r$, とが同値で $\varepsilon=\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_r$ となる．結局 $\mathfrak{g}$ が単純，半単純の場合を調べればよいことになる．しかも $\mathfrak{g}$ が半単純のとき，$\mathfrak{h}$ を Cartan 部分環として，$\mathfrak{g}^c$ の $\mathfrak{h}^c$ に関する根の基本系に対応する既約表現の基本系の性質と，これらの既約表現の最高の weights と $\mathfrak{g}$ の任意の

既約表現 ρ の最高の weight との関係に関する基本定理を導き，これによってはじめの問題を解決すればよいことを示した．詳しくは Nagoya Math. J., **14** (1959) の同氏の論文参照．

2. 野水克巳 (名大)：Holonomy and isometries. Homogeneous space $M=G/H$ が reductive, すなわち $\mathfrak{g}=L(G)$, $\mathfrak{h}=L(H)$ に対して，

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{m},\quad 0=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{m},\quad \mathrm{ad}(H)\mathfrak{m}=\mathfrak{m}$$

なる $\mathfrak{m}$ があるとき，講演者によって第一種の canonical affine connection とよばれた接続が Riemann 計量から導かれているとする．このような空間の holonomy 群に関する B. Kostant の最近の研究 (Trans. Amer. Math. Soc., **80** (1955)；Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., **42** (1956), I, II) の紹介と，さらに Kostant の Nagoya Math. J., **12** (1957) に載った研究，G/H の前記のような自然な Riemann 計量にかぎらず，一般に G で不変な計量 C を考え，その holonomy 群 $\Sigma(C)$, restricted holonomy 群 $\Sigma_0(C)$ の性質，特に de Rham の分解についての相互関係に関する諸定理を紹介した．最後に，同じく Nagoya Math. J. の **13** (1958) に載った H. C. Wang の principal fibre bundle $\{P,S\}$ における G-invariant な接続に関する結果，すなわち，P で Lie 群 G が transitive に operate しているとき，P において G-invariant な接続 ω と或る種の線型写像 $\Psi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{s}=L(S)$ との間に一対一の対応があること，G-invariant な接続に対して平行移動と G とから定義せられ，講演者が定義した群の拡張にあたる Lie 群 $\varDelta$ とこの接続の holonomy 群に関連した定理等を解説した．

3. 大槻富之助・田代嘉宏 (岡山大)：線素空間の holonomy 群と変換群について．前者は線素空間の擬似接続論を holonomy 群の立場から説明し，後者は Finsler 空間と Cartan 空間の運動群に関する講演者の得られた結果について述べた．n 次元多様体 $\mathfrak{X}$ の tangent bundle $T(\mathfrak{X})$, tangent sphere bundle $S(\mathfrak{X})$ とし，$S(\mathfrak{X})$ の擬似接続 Γ を $T(\mathfrak{X})$ のそれで考察した．$\mathfrak{X}$ の閉曲線のみ用いて定まる Γ の homogeneous holonomy 群を H_Γ, $S(\mathfrak{X})$ の閉曲線から定まるものを $\tilde{H}_\Gamma$ とする．Γ が $S(\mathfrak{X})$ に定める type (1,1) のテンソル Φ_Γ が同型写像を表わすとき，Γ は正則であるという．正則な任意の接続 Γ に対して $H_\Gamma=\tilde{H}_{\Gamma'}$ となるような正則な接続 Γ' が一意に定まり $(\Gamma')'=\Gamma'$ である．Affine holonomy 群 AH_Γ に対しては，Φ_Γ により Γ から誘導される接続を $\Gamma^\varDelta$ で表わし，$\Gamma^*=(\Gamma^\varDelta)'$ と置くと $AH_\Gamma\approx\widetilde{AH}_{\Gamma^*}$ となり，しかも $H_\Gamma\approx\tilde{H}_{\Gamma^*}$ となる．$\Gamma=\Gamma^*$ である正則な接続を a-proper とよべば，正則な接続 Γ に対応する Γ^* は a-proper であって，Finsler 空間で有名な Cartan の接続が a-proper であることなどを詳しく述べた．

第2日

4. 佐々木重夫，鈴木治夫 (東北大)：閉測地線について．n 次元の compact, 微分可能な多様体 M 上で定義された微分可能な函数 f についての critical point の理論と，それに準じて論ぜられる compact な Riemann 多様体上の閉測地線に関する M. Morse の理論をできるだけ幾何学的直観的に紹介した．空間や群の direct system, non-oriented circular connectivities (mod 2) 等の概念がいかに自然に，しかも必然的なものとして導入されたかを説明し，また函数の critical points の set の type 数と Betti 数に関する Morse の不等式や critical points の最小個数の評価に対する式の類似が閉測地線に対しても成立することまでを佐々木氏が述べた．鈴木氏は circular connectivities についての最近の結果を，R. Bott の研究に基いて紹介し，n 次元球面のそれについても詳しく説明した．

5. 森本明彦 (名大)：Complex fibre bundle における connection について．Complex structure と connection に関連した結果で主に J.L. Koszul によるものを紹介した．M を base, G を structure group, π を projection とする C^∞-principal bundle $P(M,G,\pi)$ において，$a\in G$ に対応する right translation を R_a, $X\in\mathfrak{g}=L(G)$ が定める P 上の vertical vector field を X^* とする．命題：G が complex Lie 群で，M が almost complex manifold, I_M をその almost complex structure とする．P 上に connection form ω が与えられたとき，P 上の almost complex structure $I=I_\omega$ で次の条件をみたすものがただ一つある．1) ω は I について type (1,0), 2) $I_M\cdot\pi=\pi\cdot I$, 3) $IX=(\sqrt{-1}\,\omega(X))^*_x$ (X は x での vertical tangent vector), 4) $I\cdot R_a=R_a\cdot I$. 定理：$P(M,G,\pi)$ が complex analytic のとき，その complex structure I_P に対して $I_P=I_\omega$ となるような connection form ω でその curvature form Ω の type (0,2) の component $\Omega^{0,2}=0$ となるものが存在する．逆に $P(M,G,\pi)$ で M が complex analytic, G が complex Lie 群，ω が P 上の connection form で $\Omega^{0,2}=0$ であれば，I_ω は complex structure で $P(M,G,\pi)$ は complex analytic bundle の structure を持つ．これらの諸定理を説明し，さらに共変微分 $D=D'+D''$ (complex analytic なときの自然な分解) と Ω の type (1,1) の成分に関する諸性質について述べた．

第3日

6. 山口 清 (広島大)：Geodesic space について．0-connection を持った連続変換群の空間において，無限小変換の族が totally geodesic subspace を生成するための条件が Lie triple product $[[X_i,X_j],X_k]$ についてこの族が閉じていることであるという E. Cartan の定理からはじめ，一般擬似対称空間を介して，より一般な Lie triple system V を定義した．この V に対して standard enveloping Lie algebra とよばれる Lie 代数 L で，

$$L=V+D,\quad V\cap D=0,\quad [V,D]\subseteq V,\quad [D,D]\subseteq D,$$

であるようなものが同型を除いて一意に定まることを述べた．V と L との関係，たとえば

$V^{(k)}=[V, V^{(k-1)}, V^{(k-1)}]+V^{(k-1)}\circ V^{(k-1)}\quad (k=1,2,\cdots)$ と置いて，$V^{(n)}=0$ となる n があるとき V は可解であると定義すれば，V が可解なとき L は Lie 代数として可解であり，また L が (semi) simple ならば V も general Lie triple system として (semi) simple である等の諸関係を詳しく述べた．

なお以上の特別講演のほかに，第2日の終りに次の一般講演が行なわれた．

田畑不二夫 (京都学芸大)：Riemann 空間の無限小変形 tensor $g_{lm}=\partial g_{lm}(t,x)/\partial t$ の第2次共変微分係数 $g_{lm;np}$ の意義について．　(大槻富之助記)

修学院セミナー

——Homology 代数および整数論——

谷口数学振興会の第4回セミナー (1958) は京都東洋紡修学院寮で10月22日より10月24日まで 'Homology 代数および整数論' というテーマで淡中教授を中心に行なわれた．出席者は北より伊藤昇 (北大)，淡中忠郎，高橋秀一 (東北大)，河田敬義，玉河恒夫，藤崎源二郎 (東大)，服部昭 (東京教育大)，高須達 (武蔵工大)，都筑俊郎，久保田富雄，古田孝臣 (名大)，戸田宏，松村英之 (京大)，浅野啓三，小野孝，原田学 (大阪市大)，山本幸一 (九大) の17名で，プログラムは谷山豊氏の病気欠席等もあり多少変更されて次のようになった．

22日：午前 10.00～12.00

服部　昭：Homology 代数学の二三の面について．

午後 1.30～5.00

都筑俊郎：射影加群について，

松村英之：抽象代数幾何学における cohomology 環の幾何学的性質，

伊藤　昇：有限群論での二三の話題について．

23日：午前 9.30～12.00

高須　達：Supplemented algebra の relative homology，

戸田　宏：Steenrod algebra．

午後 1.30～4.00

原田　学：環および多元環の dimension，

玉河恒夫：代数体上定義される代数群の整数論．

24日：午前 9.30～12.00

高橋秀一：Homotopy 群の導入について，

小野　孝：代数群の有理指標と単数定理．

午後 2.00～4.00

久保田富雄：因子団と norm 剰余記号，

山本幸一：局所類体論の一構成法．

かなり盛り沢山に見えるが，休憩時間等も十分にとり，楽しみながら，このプログラムを完了することができた．

以下講演のあらましを紹介しよう．

まず homological algebra に関するものは服部，都筑，高須，原田の諸氏のもので，服部氏は中山教授より寄せられた '序文' の代読から始められた．この序文は homology 代数の初めから最近の話題に至るまでを簡潔に要領よくまとめたもので，終りには感嘆の声がもれる程であった．氏の講演は ring R，さらに一般にそのイデアル $\mathfrak{m}$ による quotient ring $R/\mathfrak{m}$ の R-algebra による free resolution の構成問題と，relative cohomology の二つに話題をしぼり，最近の結果までわかりやすく説明されたもので，ことに前者は簡単な idea にもかかわらず，Betti 数の評価や Abel 群の complex の標準化に応用され見事な結果を生むのには驚ろかされた．

高須氏のは氏独特の方法で relative homology を定義するのであるが，これと Hochschild 等との関係は服部氏の講演でのべられた．特に応用として，non-normal な拡大体に関する類体論の '終結定理' が cohomology 論的に出されるのは面白いと思った．

原田氏は dimension に関する多くの結果を要領よく話された．これは中山教授の '序文' の解説でもあった．

都筑氏の講演は名大で得られた結果の紹介で，G を p 次 cyclic group，$Z[G]$ をその有理整数環 Z 上の group ring とするとき，$Z[G]$-projective で free でない module が円分体 $Q(\sqrt[p]{1})$ の類数 h より1少ない数だけあるという話で，群 G の整数表現との関係から出したものである．整数表現は Speiser の本と Diederichsen の論文 (Hamb. Abh. 13) がある位の未開の分野で，複素表現 (無限素点)，modular 表現 (有限素点) 等の local 表現より in the large の表現としての整数表現とは考えられないだろうか．

代数群の整数論は玉河，小野の両氏により講演され，最も大きな興味が持たれたのではないかと思う．Levi 分解に従って，玉河氏は simple group，小野氏は solvable group と分かれた．G を代数数体 k 上で define された algebraic group とすれば，その '$\mathfrak{p}$-進拡大' $G_{\mathfrak{p}}$ が任意の素点 $\mathfrak{p}$ で定義され，'idèle' が定義されることは自然であろう．それに位相を入れること，Haar measure がはいること等は数体とほぼ同じといって良いであろう．このとき G は idèle group $\tilde{G}$ の discrete subgroup となる．そのとき homogeneous space $\tilde{G}/G$ の volume $v(\tilde{G}/G)<+\infty$? が玉河氏の話題で，実例では有理整数になっている．また多くの場合 ($SL(n)$，$Sp(2n)$，$O^+(n)$，Spin(n)，$PL(n)$ 等) は covering の枚数になっているが反例もある．これらは Siegel の2次形式に関する一連の研究から得られるのであるが玉河氏は特に $PL(n)$ のときに $v(\tilde{G}/G)=n$ となることを Siegel の結果に reduce する考えで実際に証明された．

小野氏は solvable に限定して，これが代数数体の直接の拡張になるとの見地より，'Dirichlet の単数定理' を証明された．この立脚点から r_1+r_2-1 をながめると面白いことを氏独特のユーモアを交えて話された．Siegel の2次形式論が simple group の数論とすれば，代数群を考えることにより Gauss 以来分岐した代数体論と2次形式論がまた Levi 分解で統一されるわけで，