情報数学 レポート 3
円周率が無理数であることの証明

xxxxxxx ○○ ○○

岡山大学理学部数学科

2017 年 6 月 20 日

背景

- 有理数でない実数を無理数という.
- 高校の「数学 I」の教科書には,

  「$\sqrt{2}$ や π は無理数であることが知られている」

  と書かれている.
- $\sqrt{2}$ が無理数であることは, 背理法を用いて高校生でも証明することができる.
- 一方, π が無理数であることの証明は高校では習わない.

背景

- 有理数でない実数を無理数という.
- 高校の「数学 I」の教科書には,

  「$\sqrt{2}$ や π は無理数であることが知られている」

  と書かれている.
- $\sqrt{2}$ が無理数であることは, 背理法を用いて高校生でも証明することができる.
- 一方, π が無理数であることの証明は高校では習わない.

背景

- 有理数でない実数を無理数という．
- 高校の「数学 I」の教科書には，

  「$\sqrt{2}$ や π は無理数であることが知られている」

  と書かれている．
- $\sqrt{2}$ が無理数であることは，背理法を用いて高校生でも証明することができる．
- 一方，π が無理数であることの証明は高校では習わない．

背景

- 有理数でない実数を無理数という.
- 高校の「数学 I」の教科書には,

  「$\sqrt{2}$ や π は無理数であることが知られている」

  と書かれている.
- $\sqrt{2}$ が無理数であることは, 背理法を用いて高校生でも証明することができる.
- 一方, π が無理数であることの証明は高校では習わない.

定理

定理

円周率 π は無理数である.

この定理を

Ivan Niven, A simple proof that π is irrational,
Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), 509

に従って証明する.

Wikipedia: 円周率の無理性の証明

も参考にした.

定理

定理

円周率 π は無理数である.

この定理を

Ivan Niven, A simple proof that π is irrational,
Bulletin of the American Mathematical Society, 53 (1947), 509

に従って証明する.

Wikipedia: 円周率の無理性の証明

も参考にした.

定理の証明

π が有理数であると仮定する．このとき互いに素な自然数の組 a, b が存在して

$$\pi = \frac{a}{b}$$

と書くことができる．

自然数 n に対して，実数値関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n$$

で定める．さらに

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

とおく．ただし $f_n^{(k)}$ は f_n の k 階微分を表す．
定理を証明するために補題を 3 つ用意する．

定理の証明

π が有理数であると仮定する．このとき互いに素な自然数の組 a, b が存在して

$$\pi = \frac{a}{b}$$

と書くことができる．
自然数 n に対して，実数値関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n$$

で定める．さらに

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

とおく．ただし $f_n^{(k)}$ は f_n の k 階微分を表す．
定理を証明するために補題を 3 つ用意する．

定理の証明

π が有理数であると仮定する．このとき互いに素な自然数の組 a, b が存在して

$$\pi = \frac{a}{b}$$

と書くことができる．
自然数 n に対して，実数値関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(a - bx)^n$$

で定める．さらに

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{(2)}(x) + f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)$$

とおく．ただし $f_n^{(k)}$ は f_n の k 階微分を表す．
定理を証明するために補題を 3 つ用意する．

補題 1

補題 1

任意の自然数 n に対して $F_n(\pi) = F_n(0)$ が成り立つ.

Proof.

簡単な計算によって $f_n(\pi - x) = f_n(x)$ が得られるから，この両辺を k 階微分すると

$$f_n^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$$

が成り立つ．特に k が偶数のときは $f_n^{(k)}(\pi - x) = f_n^{(k)}(x)$ であるから，$F_n(x)$ の定義から

$$F_n(\pi - x) = F_n(x)$$

が成り立つ．特に $x = 0$ とすると補題を得る． □

補題 1

補題 1

任意の自然数 n に対して $F_n(\pi) = F_n(0)$ が成り立つ.

Proof.

簡単な計算によって $f_n(\pi - x) = f_n(x)$ が得られるから，この両辺を k 階微分すると

$$f_n^{(k)}(\pi - x) = (-1)^k f_n^{(k)}(x)$$

が成り立つ. 特に k が偶数のときは $f_n^{(k)}(\pi - x) = f_n^{(k)}(x)$ であるから，$F_n(x)$ の定義から

$$F_n(\pi - x) = F_n(x)$$

が成り立つ. 特に $x = 0$ とすると補題を得る. □

補題 2

補題 2

任意の自然数 n に対して $F_n(0)$ は整数である.

Proof.

二項定理により

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i a^{n-i} b^i x^{n+i}$$

を得る. $f_n(x)$ に x の n 次未満の項は存在しないので, $k < n$ ならば $f_n^{(k)} = 0$ である. また, $n \leqq k \leqq 2n$ のとき

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}{}_nC_{k-n} a^{2n-k} b^{k-n}$$

であるが, $n \leqq k$ であるから $k!/n!$ は整数であり, 二項係数 ${}_nC_{k-n}$ も整数であるから $f_n^{(k)}(0)$ も整数である. 従って $F_n(0)$ も整数である. $\square$

補題 2

補題 2

任意の自然数 n に対して $F_n(0)$ は整数である.

Proof.

二項定理により

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i a^{n-i} b^i x^{n+i}$$

を得る. $f_n(x)$ に x の n 次未満の項は存在しないので, $k < n$ ならば $f_n^{(k)} = 0$ である. また, $n \leqq k \leqq 2n$ のとき

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!} {}_nC_{k-n} a^{2n-k} b^{k-n}$$

であるが, $n \leqq k$ であるから $k!/n!$ は整数であり, 二項係数 ${}_nC_{k-n}$ も整数であるから $f_n^{(k)}(0)$ も整数である. 従って $F_n(0)$ も整数である. □

補題 3

補題 3

任意の自然数 n に対して次が成り立つ.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin x dx = F_n(0).$$

Proof.

$f_n(x)$ が x の $2n$ 次式であることから $F_n''(x) + F_n(x) = f_n(x)$ が成り立つことが分かる．このことから $(F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)' = f_n(x)\sin x$ を得る．よって

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin x dx = \frac{1}{2}\left[F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(F_n(\pi) + F_n(0)\right)$$

となるが, 補題 1 によりこの右辺は $F_n(0)$ に等しい. □

補題 3

補題 3

任意の自然数 n に対して次が成り立つ.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin x dx = F_n(0).$$

Proof.

$f_n(x)$ が x の $2n$ 次式であることから $F_n''(x) + F_n(x) = f_n(x)$ が成り立つことが分かる．このことから $(F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x)' = f_n(x)\sin x$ を得る．よって

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} f_n(x)\sin x dx = \frac{1}{2}\left[F_n'(x)\sin x - F_n(x)\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(F_n(\pi) + F_n(0)\right)$$

となるが, 補題 1 によりこの右辺は $F_n(0)$ に等しい. □

定理の証明

$0 < x < \pi$ のとき $f_n(x) > 0$ かつ $\sin x > 0$ であるから，補題 2 と補題 3 により $F_n(0)$ は正の整数である．任意の実数 x に対して

$$x(\pi - x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

であることから $f_n(x) = \dfrac{b^n}{n!}(x(\pi - x))^n \leqq \dfrac{b^n}{n!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2n}$ となるので，

$$\begin{aligned} F_n(0) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi f_n(x)\sin x dx \\ &\leqq \frac{1}{2}\int_0^\pi f_n(x) dx \\ &\leqq \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} dx = \frac{b^n}{n!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

が任意の自然数 n に対して成り立つ．しかしこの右辺は十分大きな n に対して 1 より小さくなるから，$F_n(0)$ が正の整数であることに矛盾する． □

進んだ結果と未解決問題

- 整数係数の n 次方程式の解になる複素数 (あるいは実数) を代数的数という. 例えば有理数 a/b は 1 次方程式 $bz - a = 0$ を満たすので代数的数であり, n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ も n 次方程式 $z^n - a = 0$ を満たすので代数的数である. 代数的でない複素数 (あるいは実数) を超越数という. 実は π は無理数であるだけでなく, 超越数であることが知られている (F. Lindemann, 1882).
- π 以外にも, 自然対数の底 e も超越数であることが知られている (C. Hermite, 1873).
- 代数的数全体の集合は可算集合であり, 超越数全体の集合は非可算集合である.
- 与えられた数が超越数であるかどうかを調べる問題は難しい. 例えば $\pi + e$ が超越数かどうかは未解決問題である ($\pi + e$ は有理数であるか無理数であるかも未解決問題である).

進んだ結果と未解決問題

- 整数係数の n 次方程式の解になる複素数 (あるいは実数) を代数的数という．例えば有理数 a/b は 1 次方程式 $bz - a = 0$ を満たすので代数的数であり，n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ も n 次方程式 $z^n - a = 0$ を満たすので代数的数である．代数的でない複素数 (あるいは実数) を超越数という．実は π は無理数であるだけでなく，超越数であることが知られている (F. Lindemann, 1882).
- π 以外にも，自然対数の底 e も超越数であることが知られている (C. Hermite, 1873).
- 代数的数全体の集合は可算集合であり，超越数全体の集合は非可算集合である．
- 与えられた数が超越数であるかどうかを調べる問題は難しい．例えば $\pi + e$ が超越数かどうかは未解決問題である ($\pi + e$ は有理数であるか無理数であるかも未解決問題である).

進んだ結果と未解決問題

- 整数係数の n 次方程式の解になる複素数 (あるいは実数) を代数的数という．例えば有理数 a/b は 1 次方程式 $bz-a=0$ を満たすので代数的数であり，n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ も n 次方程式 $z^n-a=0$ を満たすので代数的数である．代数的でない複素数 (あるいは実数) を超越数という．実は π は無理数であるだけでなく，超越数であることが知られている (F. Lindemann, 1882).
- π 以外にも，自然対数の底 e も超越数であることが知られている (C. Hermite, 1873).
- 代数的数全体の集合は可算集合であり，超越数全体の集合は非可算集合である．
- 与えられた数が超越数であるかどうかを調べる問題は難しい．例えば $\pi+e$ が超越数かどうかは未解決問題である ($\pi+e$ は有理数であるか無理数であるかも未解決問題である).

進んだ結果と未解決問題

- 整数係数の n 次方程式の解になる複素数 (あるいは実数) を代数的数という．例えば有理数 a/b は 1 次方程式 $bz-a=0$ を満たすので代数的数であり，n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ も n 次方程式 $z^n-a=0$ を満たすので代数的数である．代数的でない複素数 (あるいは実数) を超越数という．実は π は無理数であるだけでなく，超越数であることが知られている (F. Lindemann, 1882).
- π 以外にも，自然対数の底 e も超越数であることが知られている (C. Hermite, 1873).
- 代数的数全体の集合は可算集合であり，超越数全体の集合は非可算集合である．
- 与えられた数が超越数であるかどうかを調べる問題は難しい．例えば $\pi+e$ が超越数かどうかは未解決問題である ($\pi+e$ は有理数であるか無理数であるかも未解決問題である).