Math. J. Okayama Univ. 31 (1989), 135–140

ZUR STRUKTUR NICHTKOMMUTATIVER RINGE

WALTER STREB

Einleitung. Sei $\mathbf{K}_x$ eine Klasse von Ringen, K_x die Teilklasse der nichtkommutativen Ringe aus $\mathbf{K}_x$ und $T, R \in K_x$. T heißt R-reduzierend genau dann, wenn $R_i \in K_x$, $0 \leq i \leq n$ existieren, so daß $R_0 = R$, $R_n = T$ und R_{i+1} Unterring oder (homomorphes) Bild von R_i, $0 \leq i < n$. (Hierbei ist nicht vorausgesetzt, daß $\mathbf{K}_x$ oder K_x selbst abgeschlossen ist bezüglich Bildung von Unterringen oder Bildern.) K_x^* heißt K_x-reduzierend genau dann, wenn $K_x^* \subset K_x$ und zu jedem $R \in K_x$ ein $T \in K_x^*$ existiert, so daß TR-reduzierend.

Dieser methodische Ansatz ist hilfreich, insbesondere beim Beweis von Kommutativitätssätzen:

Sei E eine für Ringe aus $\mathbf{K}_x$ erklärte Eigenschaft, welche sich innerhalb $\mathbf{K}_x$ auf Unterringe und Bilder vererbt und K_x^* K_x-reduzierend. Ist E für keinen Ring aus K_x^* erfüllt, so ist jeder Ring aus $\mathbf{K}_x$, welcher E erfüllt, kommutativ.

In dieser Note werden K_x^* angegeben, insbesondere zu folgenden Klassen $\mathbf{K}_x$ von Ringen R:

$\mathbf{K}_r : R$ beliebig; $\mathbf{K}_{lu} : R$ links-s-unitär; $\mathbf{K}_{ru} : R$ rechts-s-unitär; $\mathbf{K}_u : R$ s-unitär; $\mathbf{K}_{PI} : R$ PI-Ring; $\mathbf{K}_n : R$ mit R' (Kommutatorideal von R) n-torsionsfrei.

Für $\mathbf{K}_x$ sei $\mathbf{K}_{x,1}$ die Klasse aller $R \in \mathbf{K}_x$ mit $1 \in R$.

Notationen. Seien $\mathbf{Z}$ bzw. N die Menge der ganzen bzw. positiven ganzen Zahlen, P die Menge aller Primzahlen, F_p der Primkörper der Charakteristik p, $M_n(R)$ der Ring der n-n-Matrizen über dem Ring R, e_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ die zugehörigen Matrizeneinheiten und R_{nil} die Menge aller nilpotenten Elemente von R. Für $A, B \subset R$ sei $l_A(B) = \{a \in A : aB = 0\}$ bzw. $r_A(B) = \{a \in A : Ba = 0\}$. Für $a, b \in R$ bzw. $A, B \subset R$ sei $[a, b] = ab - ba$ bzw. $[A, B] = \{[a, b] : a \in A, b \in B\}$.

Wir bilden folgende Mengen von nichtkommutativen Unterringen T von $M_2(F_p)$:

$$M_e = \{T = e_{11}F_p + e_{12}F_p + e_{22}F_p : p \in P\};$$
$$M_l = \{T = e_{11}F_p + e_{12}F_p : p \in P\};$$
$$M_r = \{T = e_{12}F_p + e_{22}F_p : p \in P\};$$

$M_G =$ Menge aller $T = T_{p,q,k,\sigma} = \{ae_{11} + a^\sigma e_{22} + be_{12} : a, b \in F\}$, wobei $p, q \in P$, $k \in N$, F endlicher Körper mit p^{q^k} Elementen, L größter Unter-körper von F und $1 \neq \sigma \in \mathrm{Gal}\,(F:L)$ (Galoisgruppe von F über L);

$$M = M_G \cup M_l \cup M_r;\ M_1 = M_G \cup M_e.$$

Weiterhin bilden wir folgende Klassen von nichtkommutativen Ringen T:

E' = Klasse aller einfachen, radikalen und regulären T;

E'_1 = Klasse aller regulären T mit $1 \in T$, $T = \mathbf{Z}1 + T_1$ und $T_1 \in E'$;

E bzw. E_1 = Klasse aller T, wobei T Schiefkörper oder $T \in E'$ bzw. E'_1;

E_e = Klasse aller Schiefkörper von endlichem Grad;

C = Klasse aller $T = T_{p,k}$ mit $p \in P$, $k \in N$, $T'T = 0 = TT'$, $pT' = 0 = p^k T$, T endlich und nilpotent oder T_{nil} kommutatives nilpotentes Ideal von T;

C_1 = Klasse aller T mit $1 \in T$, $T = \mathbf{Z}1 + T_{p,k}$ mit $T_{p,k} \in C$ und $p^k 1 = 0$.

Wir zeigen zunächst

Satz. $K_r^* = M \cup E \cup C$; $K_{r,1}^* = M_1 \cup E_1 \cup C_1$.

Beweis. Sei $T \in K_r$ bzw. $K_{r,1}$ und $Z = Z(T)$ = Zentrum von T. Der Beweis stützt sich auf folgende Leitidee:

(*) Der jeweils aktuelle Ring T wird sukzessive durch einen T-reduzierenden Ring ersetzt. Führen Falldiskussionen auf $T \in K_r^*$ bzw. $K_{r,1}^*$, so ist der Beweis beendet. Anderenfalls realisieren wir der Reihe nach die folgenden Bedingungen (a—f) und beenden dann den Beweis.

Für $u, v \in T$ bezeichnet $\langle u, v\rangle$ den von u und v erzeugten Unterring von T ohne bzw. mit 1. Mittels (*) erhält man:

(a) T' ist kleinstes Ideal von $T = \langle a, b\rangle$ und T erfüllt ACC für Ideale.

Beweis. Seien $u, v \in T$ mit $[u, v] \neq 0$.

(A) Wähle ein Ideal I von $S = \langle u, v\rangle$ maximal unter der Eigenschaft $[u, v] \notin I$. Setze $T = \langle u, v\rangle / I$, $a = u + I$, $b = v + I$ und betrachte T/T' mit Hilbert's Basissatz.

Unsere weiteren Betrachtungen beziehen sich zunächst auf reguläre T. Ist $\mathrm{J}(T)$ (Jacobsonradikal von T) = 0, so erhält man über primitive Bilder einen T-reduzierenden Schiefkörper oder Matrizenring über einem Körper und dann ein Element aus K_r^* bzw. $K_{r,1}^*$. Sei andererseits $\mathrm{J}(T) \neq 0$, also $T' \subset \mathrm{J}(T)$. Da T regulär ist, gilt $[T', T'] \neq 0$, also $T' \in E$ bzw. $\mathbf{Z}1 + T' \in E_1$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit (O.E.) sei T nicht regulär. Mittels (*) erhält man

(b) $T'^2 = 0$

Beweis. O.E. sei $T'^2 \neq 0$, also T prim. Da T nicht regulär ist, existieren u, $v \in T$ mit $uv \neq 0$ und $vu = 0$. Wiederholt man nun Schritt (A), so erhält man (a—b). Mittels (*) erhält man

(c) $T' \not\subset Z$

Beweis. Anderenfalls ist $T' \subset Z$. Sei $V = l_T(T') = r_T(T')$. Wir führen zunächst die Annahme $[V, V] = 0$ zum Widerspruch: Sei $\bar{T} = T/V$. Zu r, $s \in T \backslash V$ existiert $t \in T'$, so daß $rt \neq 0$. Nach (a) gilt $Trt = T'$. Also existiert $u \in T$, so daß $urt = t$, somit $(sur - s)t = 0$, demnach $\bar{s}\bar{u}\bar{r} = \bar{s}$. Also ist $\bar{T}$ Körper. Nach [4 : Corollary 1, p. 255] ist $\bar{T}$ endlicher Körper mit char $(\bar{T}) = p \in P$ und p^r Elementen.

Für $V \not\subset Z$ bzw. $V \subset Z$ wähle $c \in T$ und $d \in V$ bzw. $d \in T$ mit $[c, d] \neq 0$. Für $f = x^{p^r} - x$ erhält man $0 = [f(c)c^2, d] = f(c)2c[c, d] + f'(c)c^2[c, d] = f'(c)c^2[c, d]$, also $\bar{c} = 0$, Widerspruch.

Also gilt $[V, V] \neq 0$. Man wählt nun u, $v \in V$ mit $[u, v] \neq 0$ und wiederholt Schritt (A). Es gilt $T' = \boldsymbol{Z} \cdot [a, b]$ und $p[a, b] = 0$ mit $p \in P$. Sei $T_i = \{c \in T : p^i c = 0\}$ für $i \in N$. Dann gilt $T_k = T_{k+1}$ mit $k \in N$. Wir zeigen $p^k T = 0$. Anderenfalls existiert $c \in T$ mit $p^k c = [a, b]$. Dann gilt $0 = p[a, b] = p^{k+1}c$, also $c \in T_{k+1} = T_k$, somit $0 = p^k c = [a, b]$, Widerspruch. T_{nil} ist nilpotentes Ideal von T wegen (a). Ist T_{nil} nicht kommutativ, so wählt man u, $v \in T_{\text{nil}}$ mit $[u, v] \neq 0$ und wiederholt Schritt (A). Schließlich gilt $T \in C$ bzw. C_1. Mittels (*) erhält man

(d) $T' = I_b$ (von b erzeugtes Ideal von T)

Beweis. Nach (c) existieren $u \in T$ und $v \in T'$, so daß $[u, v] \neq 0$. Nun wiederholt man Schritt (A), realisiert (c) und hat zusätzlich $I_b^2 = 0$. Für $u = a$ und $v = [a, b]$ gilt $[u, v] \neq 0$ nach (c). Für $S = \langle u, v \rangle$ ist S' Ideal von T, also $v \in T' = S'$. Nun wiederholt man Schritt (A).

(e) $I = l_T(b) \cap r_T(b) = T'$ und $T = \langle a \rangle \oplus T'$

Beweis. Es ist $I \cap \langle a \rangle$ Ideal von T, also $I \cap \langle a \rangle = 0$ nach (a). Wegen $T' \subset I$ gilt (e). Mittels (*) erhält man

(f) $l_T(b) = r_T(b) = T'$

Beweis. Anderenfalls existiert $u \in T$, so daß $ub \neq 0 = bu$ oder $ub = 0 \neq bu$. Man wiederholt für $v = b$ zunächst Schritt (A), realisiert (c—d) und erhält $T'a = 0$ oder $aT' = 0$. Sei exemplarisch $T'a = 0$ und $A = \langle a \rangle$. Wegen (e) ist T' einfacher und treuer A-Linksmodul, also A Körper. Nach [4 : Corollary 1, p. 255] ist A endlicher Körper mit char $(A) = p$. Mit $pT' = pAb = 0$ ist $pb = 0$. Für $1 \in T$ ist $p\boldsymbol{Z}1$ Ideal von T, also $p1 = 0$ wegen (a—e). Insgesamt gilt $pT=0$. T besitzt in diesem Fall einen Unterring aus M_l bzw. M_e. Für $aT'=0$ verfährt man analog.

Wir beenden nun den Beweis des Satzes: Sei $F=\langle a\rangle$, $C=C_F(T')$ (Zentralisator von T' in F) und $S=F\otimes_C F$. T' ist einfacher F-Bimodul, also einfacher und treuer $S/l_S(T')$-Linksmodul, also $S/l_S(T')$ Körper. Nach [4: Corollary 1, p.255] ist $S/l_S(T')$ endlicher Körper, also wegen (f) auch F. Nun ist S halbeinfach und T' einfacher Links-S-Modul. Demnach existiert $1\neq\sigma\in\mathrm{Gal}(F:C)$, so daß $(u\otimes v)b=uv^\sigma b$ für alle $u, v\in F$. Also besitzt T einen Unterring aus M_G.

Für das folgende Corollar benötigen wir weitere Klassen von nichtkommutativen Ringen T und R:

$$C_g = \text{Klasse aller } T\in C \text{ mit } T \text{ endlich und nilpotent;}$$
$$C_{g,1} = \text{Klasse aller } T=Z1+T_{p,k}\in C_1 \text{ mit } T_{p,k}\in C_g;$$
$$C_0 = \text{Klasse aller torsionsfreien } T;$$
$$C_{0,1} = C_0\cap K_{r,1};$$

K_f = Klasse aller R für die gilt: Zu jedem $a, b\in R$ existiert $f_{a,b}\in Z\{x, y\}$, so daß $f_{a,b}\to 0$ beim kanonischen Ringmorphismus $Z\{x, y\}\to Z[x, y]$, jedes Monom von $f_{a,b}$ eine Länge ≥ 3 hat und $[a, b]=f_{a,b}(a, b)$ gilt; (In der Tat ist $[a, b]=f_{a,b}(a, b)$ für $f_{a,b}=[x, y]$ bedeutungslos).

K_g = Klasse aller R für die gilt: Zu $a\in R$ existiert stets $f_a=x^k\sum_{1\leq i\leq m}n_ix^i\in Z[x]$, $0\leq k$, $0\neq n_i\in Z$, so daß $\{n_i: 1\leq i\leq m\}$ teilerfremd und $f_a(a)\in R_{nil}$. (Man sieht unmittelbar, daß stets o.E. $k=0$ gewählt werden kann). Wir zeigen nun

Corollar.

(1) $K_u^*=K_{r,1}^*$; *zu jedem* $R\in K_{iu}$ *existiert* $T\in M_G\cup M_i\cup E_i\cup C_i$ $(i\in\{l, r\})$, *so daß* T *homomorphes Bild eines Unterringes von* R *ist*;

(2) $K_{PI}^*=M\cup C\cup E_e$; $K_{PI,1}^*=M_1\cup C_1\cup E_e$;

(3) $K_n^*=(K_r^*\cap K_n)\cup C_0$; $K_{n,1}^*=(K_{r,1}^*\cap K_n)\cup C_{0,1}$;

(4) $K_f^*=M\cup E$; $K_{f,1}^*=M_1\cup E_1$;

(5) $K_g^*=M\cup E\cup C_g$; $K_{g,1}^*=M_1\cup E_1\cup C_{g,1}$.

Beweis. (1) Wir betrachten $R\in K_{lu}$. (in den anderen Fällen schließt man analog). O.E. existiere kein $T\in K_{r,1}$, welches R-reduzierend ist. Nach [3: Lemma 1, pp.109, 110] gilt dann $R'R=0$. Sei $0\neq v\in R'$ und $u\in R$ mit $uv=v$. Der Ring $\langle u, v\rangle$ ist nicht notwendig Element von K_{lu}. Wiederholt man jedoch Schritt (A), so erhält man $T=\langle a\rangle+bZ$, $ab=b$, $ba=0=b^2$

und $pb = 0$ mit $p \in P$. Nun ist $J = l_{\langle a \rangle}(b)$ Ideal von T mit $b \notin J$. Also gilt $J = 0$, somit pa, $a^2 - a \in J = 0$, demnach $T \in M_1$.

(2) O.E. betrachtet man $R \in E$. Nun schließt man mit [2 : 1.4.2, p.39].

(3) Sei $R \in K_n$, Q die Menge aller Primzahlteiler von n,

$t(R) = \{a \in R$: es existiert $k \in N$, so daß $ka = 0\}$ und für $p \in P$

$t_p(R) = \{a \in R$: es existiert $k \in N$, so daß $p^k a = 0\}$.

O.E. sei $R/t(R) \notin C_0$, also $R' \subset t(R)$, somit $R' = \bigoplus_{p \in P \setminus Q} t_p(R')$. Nun verfolgt man den Beweis des Satzes.

(4) Erhält man unmittelbar mit dem Satz.

(5) O.E. betrachtet man $T = T_{p,k} \in C$ mit $[T_{\text{nil}}, T_{\text{nil}}] = 0$. Zu $c \in T$ wähle $g_c(x) = \sum_{1 \le i \le m} n_i x^i \in Z[x]$. Wegen $pT \subset T_{\text{nil}}$ sei o.E. $p \nmid n_i$, $1 \le i \le m$ und weiterhin $n_1 = 1$. Wegen $[T_{\text{nil}}, T_{\text{nil}}] = 0$ ist $T \in K_f$, Widerspruch.

Wir erläutern die offensichtlichen Anwendungen dieser Überlegungen an drei Beispielen

Beispiel 1. Sei R ein Ring, so daß gilt: Für $a \in R$ existiert stets $f_a(x) \in Z[x]$, so daß $f_a(a)a^2 - a \in Z$. Nach [1] ist R kommutativ. Nach Corollar (4) ist die Aussage nach Überprüfung für Schiefkörper trivial.

Beispiel 2. Sei R Ring mit der Polynomidentität f, also $f(R) = 0$. Gilt $f(T) \neq 0$ für alle $T \in M \cup C$, so ist R nach Corollar (2) und [5 : 1.5.16, p.36; 2.3.33, p.131] kommutativ.

Beispiel 3. Sei E eine für beliebige Ringe erklärte Eigenschaft, welche sich auf Unterringe und Bilder vererbt und für keinen Ring aus $M \cup C$ erfüllt ist. Dann gilt für jeden Ring R mit der Eigenschaft E:

(1) Für alle $a, b \in R$ gilt: Mit $ab = 0$ ist $ba = 0$.

(2) $R_{\text{nil}} = \mathrm{P}(R)$ (Primradikal von R) $\subset Z$.

(3) Ist I kommutatives Rechtsideal von R, so gilt $I \subset Z$.

(4) $[R, R] \cap R_{\text{nil}} = 0$. Speziell ist R kommutativ, falls $[R, R] \subset R_{\text{nil}}$.

Beweis. (1) Angenommen es existieren $a, b \in R$ mit $ab \neq 0 = ba$. Dann besitzt $T = \langle a, b \rangle$ die Eigenschaft E und T' ist nilpotent. Mit dem Satz erhält man einen Widerspruch zu den Voraussetzungen.

(2) Für $a \in R$ mit $a^2 = 0$ gilt $a^2 R = 0$, also $aRa = 0$ nach (1), somit

$I_a^2 = 0$. Mittels Induktion erhält man: Für $a \in R_{\text{nil}}$ ist I_a nilpotent. Angenommen $a \notin Z$. Wähle $b \in R$ mit $[a, b] \neq 0$. Weiter schließt man wie bei (1).

(3) Es ist $0 = [IR, I] = I[R, I]$, also $[I, R]^2 = 0$. Angenommen es existieren $a \in I$ und $b \in R$ mit $[a, b] \neq 0$. Weiter schließt man wie bei (1).

(4) Seien $a, b \in R$ mit $[a, b] \in R_{\text{nil}} = \mathrm{P}(R)$. Weiter schließt man wie bei (1).

LITERATUR

[1] I. N. HERSTEIN: The structure of a certain class of rings, Amer. J. Math. **75** (1953), 864–871.
[2] I. N. HERSTEIN: Rings with Involution, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.
[3] H. KOMATSU: A commutativity theorem for rings, Math. J. Okayama Univ. **26** (1984), 109–111.
[4] S. LANG: Algebra, Addison-Wesley Publishing Company (1965), New York.
[5] L. H. ROWEN: Polynomial Identities in Ring Theory, Academic Press, New York, 1980.

FACHBEREICH 6, MATHEMATIK
UNIVERSITÄT-GHS-ESSEN
UNIVERSITÄTSSTRAßE 3, 4300 ESSEN 1
BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

(Received November 21, 1987)