Math. J. Okayama Univ. 28 (1986), 109–113

DERIVATIONS ALGEBRIQUES SUR UN IDEAL DANS LES ANNEAUX SEMI-PREMIERS

ANDRZEJ TRZEPIZUR

Introduction. Soit R un anneau différentiel avec la dérivation $d : x \to x'$, $C(R)$ le centre de R et $K(R) = \{x \in R : x' = 0\}$ le sous-anneau des constantes de R. Par $R[X, d]$ (l'extension de Ore de R) désignons l'anneau des polynômes différentiels gauches avec addition usuelle et multiplication définie par relation $Xr = rX + r'$. Pour $f(X) \in R[X, d]$, $f(X) = t_0 + t_1 X + \cdots + t_k X^k$ et pour un élément $r \in R$ on pose $f(X)(r) = t_0 r + t_1 r' + \cdots + t_k r^{(k)}$. On a $(f(X)+g(X))(r) = f(X)(r) + g(X)(r)$ et $(f(X)g(X))(r) = f(X)(g(X)(r))$ pour tout $f(X)$, $g(X) \in R[X, d]$ et $r \in R$.

L. O. Chung et J. Luh dans [1] ont montré : si R est premier et J est un idéal non nul de R tel que $J^{(n)} = 0$ pour un entier $n \geq 1$, alors $R^{(n)} = 0$. De plus, dans [4] A. Leroy et J. Matczuk ont obtenu le résultat suivant : si R est premier, J est un idéal non nul de R, $f(X) \in R[X, d]$ est tel que $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$, alors $f(X)(r) = 0$ pour tout $r \in R$. En appliquant la méthode de Leroy et Matczuk nous généralisons ce théorème aux anneaux d-premiers et ensuite d-semi-premiers (pour les définitions voir par example [3]), donc aussi aux anneaux semi-premiers. Finalement, en utilisant ces résultats nous donnons certaine généralisation d'un théorème de Hirano et Yamakawa (Théorème 4 dans [2]).

1. Pour un anneau premier R Martindale a donné la construction de l'anneau Q ([5]) (appelé anneau des quotients de Martindale à gauche). Nous allons modifier cette construction pour les anneaux d-premiers.

Soit R un anneau d-premier. Désignons par M_d l'ensemble des pairs (I, f) où I est un idéal différentiel non nul de R et $f : I \to R$ un homomorphisme de R-module à gauche. La relation $(I, f) \sim (J, g)$ si et seulement s'il existe un idéal différentiel non nul $K \subset I \cap J$ tel que $f(v) = g(v)$ pour tout $v \in K$, est une équivalence sur M_d. Par Q_d désignons l'ensemble des classes d'équivalence. On introduit les opérations suivantes :

$$[(I, f)] + [(J, g)] = [(I \cap J, f+g)]$$
$$[(I, f)][(J, g)] = [(JI, g \circ f)]$$
$$[(I, f)]' = [(I, d \circ f - f \circ d)].$$

Q_d avec ces opérations devient un anneau différentiel (on dénote par $\bar{d}$ la dérivation de Q_d) ; grâce au monomorphisme différentiel $R \ni r \to [(R, |x \to xr|)] \in Q_d$ on peut traiter R comme un sous-anneau différentiel de Q_d.

On montre facilement la

Proposition. (i) *Si I est un idéal différentiel non nul de R et $a \in Q_d$, alors $Ia = 0$ implique $a = 0$.*

(ii) *Pour tout $a_1, \dots, a_n \in Q_d$ il existe un idéal différentiel non nul I de R tel que $Ia_j \subset R$ pour $1 \leq j \leq n$.*

(iii) *Q_d est un anneau d-premier.*

(iv) *$C(Q_d) \cap K(Q_d)$ est un corps commutatif.*

Si R est premier (donc aussi d-premier), on a $R \subset Q_d \subset Q$. L'inclusion $Q_d \subset Q$ peut être stricte (par example nous avons $Q_d = K[X] \subsetneqq K(X) = Q$ pour $R = K[X]$, où K est un corps commutatif de caractéristique 0).

Soit R un anneau différentiel, S un sous-anneau de R et E un sous-ensemble de R. On dit que la dérivation d est *S-algébrique sur E* s'il existe un polynôme différentiel non nul $f(X) \in S[X, d]$ tel que $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in E$. Dans ce cas le plus petit nombre naturel m pour lequel il existe un polynôme non nul $g(X) \in S[X, d]$ de degré m tel que $g(X)(u) = 0$ pour tout $u \in E$, s'appelle *le degré de S-algébricité* de la dérivation d sur E.

En utilisant Proposition (ii) on montre aisément le

Lemme 1. *Soit R un anneau d-premier et J un idéal différentiel non nul de R. Si m est le degré de R-algébricité de d sur J, alors m est aussi le degré de Q_d-algébricité de $\bar{d}$ sur J.*

Lemme 2 (cf. [4, Lemme 1.1]). *Soit R un anneau d-premier et J un idéal différentiel non nul de R. Soit m le degré de R-algébricité de d sur J. Alors il existe un et un seul polynôme unitaire $g(X) \in Q_d[X, \bar{d}]$ de degré m tel que $g(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$. De plus, dans ce cas $g(X) \in K(Q_d)[X, \bar{d}]$.*

Démonstration. L'unicité découle évidemment du Lemme 1. Par L désignons l'ensemble de $r_m \in R$ tels qu'il existe $r_0, \dots, r_{m-1} \in R$ satisfaisant $r_0 u + r_1 u' + \cdots + r_{m-1} u^{(m-1)} + r_m u^{(m)} = 0$ pour tout $u \in J$. Il est facile de voir que L est un idéal différentiel non nul de R. Posons $f_i : L \to R$, $i = 0, 1, \dots, m$, où $f_i(r_m) = r_i$. Les applications f_i sont bien définies et chaque f_i est un homomorphisme de R-module à gauche. Désignons $a_i = [(L, f_i)] \in Q_d$ (on a $a_m = 1$). On obtient $f_0(r_m)u+f_1(r_m)u'+\cdots+f_{m-1}(r_m)u^{(m-1)}+f_m(r_m)u^{(m)} = 0$ pour $u \in J$, $r_m \in L$, d'où il vient $L(a_0u+a_1u'+\cdots+a_mu^{(m)}) = 0$ et ensuite $a_0u+\cdots+a_mu^{(m)} = 0$ pour tout $u \in J$. Nous montrerons que $a_i \in K(Q_d)$. Effectivement, on a

$$0 = (\textstyle\sum_{i=0}^{m-1} a_iu^{(i)}+u^{(m)})' = \sum_{i=0}^{m-1} a_iu^{(i+1)}+\sum_{i=0}^{m-1} a_i'u^{(i)}+u^{(m+1)},$$

d'autre part u' appartenant à J (J est différentiel), on a $0 = \sum_{i=0}^{m-1} a_iu^{(i+1)}+u^{(m+1)}$. Il en résulte $\sum_{i=0}^{m-1} a_i'u^{(i)} = 0$ pour tout $u \in J$ et d'après le Lemme 1 on obtient $a_i' = 0$ pour $i = 0,1,\dots,m-1$.

Théorème 1 (cf. [4, Théorème 1.9]). *Soit R un anneau d-premier, J un idéal différentiel non nul de R et $f(X) \in R[X, d]$. Si $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$, alors $f(X)(r) = 0$ pour tout $r \in R$.*

Démonstration. Soit m le degré de R-algébricité de d sur J. Soit $g(X) \in R[X, d]$, $g(X) = s_0+s_1X+\cdots+s_mX^m$, $s_m \neq 0$ tel que $g(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$. Évidemment $m \leq n =$ degré de $f(X)$. R étant d-premier, il existe $u_0 \in J$ tel que $s_mu_0 \neq 0$. On obtient $s_0(u_0r)+s_1(u_0r)'+\cdots+s_m(u_0r)^{(m)} = 0$ pour tout $r \in R$. Il en résulte que d est R-algébrique sur R. Il est claire que m est aussi le degré de R-algébricité de d sur R. D'après le Lemme 2 il existe $a_0,\dots,a_m \in Q_d$ ($a_m = 1$) tels que $a_0r+a_1r'+\cdots+a_mr^{(m)} = 0$ pour $r \in R$. Comme le polynôme $k(X) = a_0+a_1X+\cdots+a_mX^m \in Q_d[X, \bar{d}]$ est unitaire, il existe $h(X)$, $r(X) \in Q_d[X, \bar{d}]$ tels que le degré de $r(X) < m$ et $f(X) = h(X)k(X)+r(X)$. Donc $r(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$. Le nombre m étant le degré de Q_d-algébricité de $\bar{d}$ sur J (Lemme 1), on a $r(X) = 0$. Il en résulte $f(X) = h(X)k(X)$ ce qui donne $f(X)(r) = h(X)(k(X)(r)) = 0$ pour tout $r \in R$.

Dans certaines cas on peut omettre la condition "J est différentiel".

Corollaire 1. *Soit R d-premier, J un idéal non nul de R et $f(X) \in K(R)[X, d]$. Si $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$, alors $f(X)(r) = 0$ pour tout $r \in R$.*

Démonstration. Il suffit d'utiliser le Théorème 1 pour l'idéal différentiel non nul $\hat{J}$ de R, où $\hat{J} = \{u_0+u_1'+\cdots+u_s^{(s)} : s \geq 1, u_i \in J$ pour $0 \leq i \leq s\}$.

Remarque 1. En particulier nous avons : si R est d-premier, $n \geq 1$

et J un idéal non nul de R, alors $J^{(n)} = 0$ implique $R^{(n)} = 0$.

2. **Théorème 2.** *Soit R un anneau d-semi-premier, J un idéal différentiel de R tel que $l(J) = 0$* et *$f(X) \in R[X, d]$. Si $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$, alors $f(X)(r) = 0$ pour tout $r \in R$.*

Démonstration. On sait que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = 0$, où P_λ sont des idéaux différentiels d-premiers de R tels que $J \not\subset P_\lambda$. L'anneau quotient $R_\lambda = R/P_\lambda$ est d-premier et l'idéal $J_\lambda = (J+P_\lambda)/P_\lambda$ est différentiel non nul. Soit $f(X) = t_0 + t_1X + \cdots + t_nX^n$, $t_i \in R$. Il vient $g(X)(v) = 0$ pour tout $v \in I_\lambda$, où $g(X) = \bar{t}_0 + \bar{t}_1X + \cdots + \bar{t}_nX^n \in R_\lambda[X, d_\lambda]$ ($d_\lambda : x \to \overline{d(x)}$ la dérivation de R_λ). D'après le Théorème 1 $g(X)(w) = 0$ pour tout $w \in R_\lambda$ et ensuite $f(X)(r) \in P_\lambda$ pour tout $r \in R$, $\lambda \in \Lambda$. Cela achève la démonstration du théorème.

Corollaire 2. *Soit R un anneau d-semi-premier, J un idéal de R tel que $l(J) = 0$ et $f(X) \in K(R)[X, d]$. Si $f(X)(u) = 0$ pour tout $u \in J$, alors $f(X)(r) = 0$ pour tout $r \in R$.*

Remarque 2. a) Théorème 2 et Corollaire 2 sont vrais en particulier pour R semi-premiers.

b) Du Corollaire 2 il vient : si R est semi-premier, $n \geq 1$ et J est un idéal de R d'annulateur nul, alors $J^{(n)} = 0$ implique $R^{(n)} = 0$.

Soit R un anneau différentiel et E un sous-ensemble de R. On dira que *d est nil (nilpotente) sur E* si pour chaque $u \in E$ il existe $n = n(u) \geq 1$ tel que $u^{(n)} = 0$ (il existe $n \geq 1$ tel que $u^{(n)} = 0$ pour tout $u \in E$). Y. Hirano et H. Yamakawa ([2, Théorème 4]) ont démontré :

Théorème A. *Soit R un PI-anneau semi-premier avec la dérivation d telle que $d(C(R)) = 0$ et soit E un sous-ensemble de R. Si d est nil sur E, alors d est nilpotente sur E.*

Hirano et Yamakawa formulent le théorème pour $E = R$, mais la même technique permet de l'obtenir pour E quelconque. Nous allons donner une version plus générale :

Théorème 3. *Soit R un PI-anneau semi-premier avec la dérivation d telle que $d(C(R)) = 0$. Soit J un idéal de R tel que $l(J) = 0$ et $f(X) \in C(R)[X, d]$. Si d est nil sur $f(J) = \{f(X)(u) : u \in J\}$, alors d est nilpotente* *sur* $f(R)$.

Démonstration. La dérivation d étant nil sur $f(J)$, d'après le théorème de Hirano et Yamakawa elle est nilpotente sur $f(J)$, c'est-à-dire il existe $s \geq 1$ tel que $(f(X)(u))^{(s)} = 0$ pour tout $u \in J$. Donc $(X^s f(X))(u) = 0$ pour tout $u \in J$ et en vertu du Corollaire 2 on a $(X^s f(X))(r) = 0$ pour tout $r \in R$, d'où d est nilpotente sur $f(R)$.

Corollaire 3. *Soit R un PI-anneau semi-premier avec la dérivation d telle que $d(C(R)) = 0$. Si d est nil sur un idéal de R d'annulateur nul, alors d est nilpotente.*

Bibliographie

[1] L. O. Chung et J. Luh : Nilpotency of derivations on an ideal, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 211–214.

[2] Y. Hirano et H. Yamakawa : On nil and nilpotent derivations, Math. J. Okayama Univ. **26** (1984), 137–141.

[3] Y. Hirano et H. Tominaga : Some commutativity theorems for prime rings with derivations and differentially semiprime rings, Math. J. Okayama Univ. **26** (1984), 101–108.

[4] A. Leroy et J. Matczuk : Dérivations et Automorphismes Algébriques d'Anneaux Premiers, Comm. Algebra **13** (1985), 1245–1266.

[5] W. S. Martindale, III : Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, J. Algebra **12** (1969), 576–584.

Université Jagellone
ul. Reymonta 4, Cracovie
Pologne

(Received December 2, 1985)
(Revised August 7, 1986)