Math. J. Okayama Univ. 26 (1984), 129–131

SUR CERTAINES CONDITIONS POUR LA COMMUTATIVITÉ DES ANNEAUX DIFFÉRENTIELS SEMI-PREMIERS

ANDRZEJ TRZEPIZUR

Soit A un anneau différentiel avec la dérivation $'$. Nous reprenons les notations et les définitions de l'article [2]. $C(A)$ désigne le sous-anneau des constantes de A, $Z(A)$ le centre de A. On pose $A^{(k)} = \{a^{(k)} : a \in A\}$ pour $k \geq 0$. Un sous-ensemble $Y \subset A$ est appelé *commutatif* si $ab = ba$ pour tout $a, b \in Y$. Considérons les conditions suivantes:

a) A est commutatif.

b) A' est commutatif.

c) $A'' \subset Z(A)$.

Pour la classe des anneaux premiers de caracteristique $\neq 2$ avec $C(A) \neq A$ Chung et Luh [1] ont démontré que toutes les trois conditions sont équivalentes. Est-ce qu'on peut dire la même chose pour les anneaux semi-premiers? Il est bien connu que dans ces cas on utilise le théorème sur la structure des anneaux semi-premiers : tout anneau semi-premier est isomorphe au produit sous-direct d'une famille $(A_t)_{t \in T}$ d'anneaux premiers, mais nous ne pouvons pas ici appliquer ce théorème puisque en général les anneaux A_t ne sont pas différentiels.

Dans cet article on propose une méthode qui permet de généraliser ces résultats aux anneaux semi-premiers. On a suivant :

Théorème. *Si A est semi-premier et $2A = A$, alors les conditions* b) *et* c) *sont équivalentes. De plus si $C(A)$ est commutatif, toutes les trois conditions* a), b) *et* c) *sont équivalentes.*

Soit A un anneau différentiel. Rappelons certaines définitions de l'article [2]. Nous dirons que A est d-premier s'il vérifie une des conditions équivalentes :

1) $a^{(k)}Ab^{(l)} = 0$ pour $k, l \geq 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

2) $aAb^{(l)} = 0$ pour $l \geq 0 \Rightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

3) Quels que soient I, J idéaux différentiels bilatères de A, la relation $IJ = 0$ implique $I = 0$ ou $J = 0$.

On dira qu'un idéal différentiel bilatère P de A est d-premier si l'anneau quotient A/P est d-premier. L'intersection des idéaux d-premiers de A sera appelée le radical d-premier de A. On dira que A est d-semi-premier si le radical d-premier de A est 0. On a

Proposition 1 (Proposition 1 dans [2]). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *A est d-semi-premier.*

2) *A ne contient pas d'idéaux différentiels bilatères nilpotents non nuls.*

3) *A est isomorphe (c'est-à-dire il existe un isomorphisme différentiel) à un produit sous-direct différentiel d'anneaux différentiels d-premiers.*

Remarque. Tout anneau différentiel semi-premier est d-semi-premier.

Proposition 2. *Si A est d-premier, $C(A) \neq A$ et $[x,x'] = 0$ pour tout $x \in A$, l'anneau A est commutatif.*

Démonstration. D'après le Lemma (b) dans [2] on a $x^{(k)}A[y,x] = 0$ pour $k \geq 1$ et x, $y \in A$. L'anneau A étant d-premier il en résulte $A \subset C(A) \cup Z(A)$ et par suite $A \subset C(A)$ ou $A \subset Z(A)$.

Lemme 1. *Si A est d-semi-premier, $2A = A$ et $A'' = 0$, alors $A' = 0$.*

Démonstration. En vertu de la Proposition 1 il suffit de se limiter au cas où A est d-premier. Quels que soient x, $y \in A$ on a $0 = (xy)'' = x''y + 2x'y' + xy''$. Donc $x'y' = 0$ pour tout x, $y \in A$. La relation $x'zy' = (xz)'y' - xz'y'$ donne $x'Ay^{(l)} = 0$ pour $l \geq 1$. Comme A est d-premier, $A' = 0$.

Théorème 1. *Si A est d-semi-premier on a l'implication:* b) $\Rightarrow$ c). *De plus si $2A = A$, les conditions* b) *et* c) *sont équivalentes.*

Démonstration. Il est évident (Proposition 1) que nous pouvons se limiter au cas où A est d-premier.

Nous allons prouver b) $\Rightarrow$ c). L'identité $(x'y)'z' = z'(x'y)'$ donne $x''yz' = x''z'y$ et ensuite $x''(yw)z' = x''z'(yw) = x''yz'w$. Nous avons donc montré $x''A[w,z'] = 0$ et par suite $x''A[w,z']^{(l)} = 0$ pour $l \geq 0$. L'anneau A étant d-premier on obtient $A'' = 0$ ou $[x,z'] = 0$ pour tout x, $z \in A$. Si $A'' = 0$ la condition c) est évidente. Supposons $[x,z'] = 0$ pour x, $z \in A$. D'après la Proposition 2 on a $A' = 0$ ou A commutatif et donc dans tous les deux cas la condition c) est satisfaite.

Supposons maintenant $2A = A$. Nous allons montrer l'implication c) $\Rightarrow$ b). Soient x, y des éléments de A. D'après c) on a $(x'y')''x' = x'(x'y')''$ et ensuite $x^{(3)}[y',x'] = 0$ ce qui donne $x^{(3)}A[y',x'] = 0$ ce qui donne $x^{(3)}A[y',x'] = 0$. Comme $z'' \in Z(A)$ pour tout $z \in A$ on déduit $x^{(3)}A[y',x']^{(l)} = 0$ pour $l \geq 0$. L'anneau A étant d-premier nous avons $A^{(3)} = 0$ ou la condition b). Soit $A^{(3)} = 0$. La relation $(xy')''x' = x'(xy')''$ donne $x''[y',x'] = 0$ et par conséquent $x''A[y',x']^{(l)} = 0$ pour $l \geq 0$. Il en résulte $A'' = 0$ et ensuite $A' = 0$ en vertu du Lemme 1 ou encore une fois la condition b). La condition b) est donc vérifiée dans tous les cas.

Théorème 2. *Soit A un anneau différentiel d-semi-premier avec $2A = A$. Si $C(A)$ est commutatif, alors toutes les trois conditions* a), b) *et* c) *sont équivalentes.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'implication : b) $\Rightarrow$ a).

D'abord nous allons montrer que tout anneau différentiel d-semi-premier A satisfaisant à la condition b) vérifie $xx' = x'x$ pour tout $x \in A$. Il est évident qu'il suffit de prouver au cas où A est d-premier. Comme dans la première part de la démonstration du Théorème 1 (la preuve de l'implication : b) $\Rightarrow$ c)) on obtient $x''A[x,z']^{(l)} = 0$ pour $l \geq 0$ ce qui donne $A'' = 0$ (donc $A' = 0$ en vertu du Lemme 1) ou $[x,z'] = 0$ pour $x,\ z \in A$.

Nous avons ainsi montré $xx' = x'x$ pour tout $x \in A$. La commutativité de l'anneau A découle alors du Théorème dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] L.O. CHUNG et J. LUH : Derivations of higher order and commutativity of rings, Pacific J. Math. **99** (1982), 317–326.

[2] A. TRZEPIZUR : Sur la commutativité des anneaux différentiels, Comm. Algebra, 12 (1984), 889–895.

UNIVERSITÉ DE CRACOVIE, MATHEMATIQUES
UL. REYMONTA 4, CRACOVIE, POLOGNE

(*Received March 1, 1984*)