

NUMERICAL COMPUTATION OF CARMICHAEL NUMBERS

MASATAKA YORINAGA

An integer n is said to be a Carmichael number (or an absolute pseudo-prime number), if it is a composite number and satisfies

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$$

for every a relatively prime to n . A property characterizing Carmichael numbers is given by

Theorem 1 (J. Chernick, [2]). *An integer n is a Carmichael number if and only if n may be expressed as a product of distinct odd prime numbers p_1, p_2, \dots, p_k , ($k > 2$) and $n \equiv 1 \pmod{p_i - 1}$ for $i = 1, 2, \dots, k$.*

This Chernick's Theorem makes it possible to seek numerically for Carmichael numbers on a computer. In order to carry out this plan suggested by Theorem 1 in the concrete, we have mainly adapted four methods.

The method I is a modification of Beeger's method and the method II is the method by universal forms due to Chernick. These two methods are fit for obtaining Carmichael numbers which consist of three or five prime factors. On the other hand, the method III fits to obtain Carmichael numbers which consist of many smaller prime factors. The method IV is exclusively used to obtain new Carmichael numbers from the already known ones. By combing these method we have found out about 700 Carmichael numbers in number.

Computation based on the method III was done on a computer HITAC 20 in the Department of Mathematics, Okayama University. And computation based on all of the methods other than the method III was done with a desk type computer SOBAX 2700.

1. Principle. In actual procedures, the following theorem is very usefull as a sieve.

Theorem 2. *If n is a Carmichael number and p is a prime factor of n , then n contains no prime factor of the form $px + 1$.*

N. G. W. H. Beeger [1] gave a method of computing Carmichael numbers of the form $n = pqr$ composed of three odd prime factors $p < q < r$. This Beeger's method can be immediately applied to the case where the first factor p is replaced by a product of two or three prime numbers. This is our method I.

The method II is as follows: In his paper [2], J. Chernick gave a one-parameter expression for a family of Carmichael numbers. More precisely, the product U_n of n odd distinct linear factors $a_iM + b_i$ ($n \geq 3$) is a universal form if it satisfies the set of congruences $U_n \equiv 1 \pmod{a_iM + b_i - 1}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) for every integral values of the parameter M . When each factor $a_iM + b_i$ is a prime number, then evidently U_n is a Carmichael number.

For the case of $n = 3$ or 4 , we can easily derive various universal forms. Hence, we may obtain fairly many Carmichael numbers by use of a table of prime numbers and a desk calculator.

If $p_1 = 3, p_2 = 5, \dots, p_t$ is the sequence of consecutive odd prime numbers, then a square-free number n corresponds one-to-one to a binary number $b = e_t e_{t-1} \dots e_2 e_1$ by the canonical representation of $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_t^{e_t}$ where $e_i = 0$ or $1, i = 1, 2, \dots, t$. By this correspondence, we can exhaustively produce a sequence of square-free odd numbers (composed of the first t odd primes).

When a square-free odd number n is given, we test n through the sieve based on Theorem 2. In actual process, this sieve is composed as a tree-diagram, each pass of which is selected according as the values of e_i is 0 or 1. Thus we can sieve n only the decision operation without use of other arithmetic operations. Candidates so obtained are checked by Chernick's Theorem 1. This is the principle of the method III.

The method IV is described in the following

Theorem 3 (J. Chernick [2]). *Let $n = p_1 p_2 \dots p_t$ ($p_1 < p_2 < \dots < p_t$) be a Carmichael number and $m_0 = \text{LCM}(p_1 - 1, p_2 - 1, \dots, p_t - 1)$. If m is a divisor of $n - 1$ such that*

- (i) m is divisible by m_0
- (ii) $m > p_t$
- (iii) $m + 1$ is a prime number,

then $c = n(m + 1)$ is a Carmichael number.

2. Results. Our results are listed in the following table. In the table, the marks [B], [C] and [S] designate that these data are already known in the literature of N. G. W. H. Beeger [1], J. Chernick [2], and W. Sierpiński [3], respectively.

Table of Carmichael Numbers

561 = 3 · 11 · 17	[B]	748657 = 7 · 13 · 19 · 433	
1105 = 5 · 13 · 17	[B]	825265 = 5 · 7 · 17 · 19 · 73	
1729 = 7 · 13 · 19	[B, C]	838201 = 7 · 13 · 61 · 151	
2465 = 5 · 17 · 29	[B, C]	852841 = 11 · 31 · 41 · 61	
2821 = 7 · 13 · 31	[B, C, S]	997633 = 7 · 13 · 19 · 577	
6601 = 7 · 23 · 41	[B, S]	1024651 = 19 · 199 · 271	[B]
8911 = 7 · 19 · 67	[B]	1033669 = 7 · 13 · 37 · 307	
10585 = 5 · 29 · 73	[B, S]	1050985 = 5 · 13 · 19 · 23 · 37	
15841 = 7 · 31 · 73	[B, S]	1082809 = 7 · 13 · 73 · 163	
29341 = 13 · 37 · 61	[B, S]	1152271 = 43 · 127 · 211	[B]
41041 = 7 · 11 · 13 · 41		1193221 = 31 · 61 · 631	[B]
46657 = 13 · 37 · 97	[B]	1461241 = 37 · 73 · 541	[B]
52633 = 7 · 73 · 103	[B]	1569457 = 17 · 19 · 43 · 113	
62745 = 3 · 5 · 47 · 89		1615681 = 23 · 199 · 353	[B]
63973 = 7 · 13 · 19 · 37		1773289 = 7 · 19 · 67 · 199	
75361 = 11 · 13 · 17 · 31		1857241 = 31 · 181 · 331	[B]
101101 = 7 · 11 · 13 · 101		1909001 = 41 · 101 · 461	[B]
115921 = 13 · 37 · 241	[B]	2100901 = 11 · 31 · 61 · 101	
126217 = 7 · 13 · 19 · 73		2113921 = 19 · 31 · 37 · 97	
162401 = 17 · 41 · 233	[B]	2433601 = 17 · 37 · 53 · 73	
172081 = 7 · 13 · 31 · 61	[C]	2455921 = 13 · 19 · 61 · 163	
188461 = 7 · 13 · 19 · 109		2508013 = 53 · 79 · 599	
252601 = 41 · 61 · 101	[B]	2531845 = 5 · 19 · 29 · 919	
278545 = 5 · 17 · 29 · 113	[C]	2628073 = 7 · 37 · 73 · 139	
294409 = 37 · 73 · 109	[B, C]	2704801 = 11 · 29 · 61 · 139	
314821 = 13 · 61 · 397	[B]	3057601 = 43 · 211 · 337	[B]
334153 = 19 · 43 · 409	[B]	3224065 = 5 · 13 · 193 · 257	
340561 = 13 · 17 · 23 · 67		3581761 = 29 · 113 · 1093	[B]
399001 = 31 · 61 · 211	[B]	3664585 = 5 · 29 · 127 · 199	
410041 = 41 · 73 · 137	[B]	3828001 = 101 · 151 · 251	
449065 = 5 · 19 · 29 · 163		4335241 = 53 · 157 · 521	
488881 = 37 · 73 · 181	[B]	4463641 = 7 · 13 · 181 · 271	
512461 = 31 · 61 · 271	[B]	4909177 = 7 · 13 · 73 · 739	
530881 = 13 · 97 · 421	[B]	5049001 = 31 · 271 · 601	[B]
552721 = 13 · 17 · 41 · 61		5148001 = 41 · 241 · 521	[B]
656601 = 3 · 11 · 101 · 197		5310721 = 13 · 37 · 61 · 181	
658801 = 11 · 13 · 17 · 271		5444489 = 29 · 197 · 953	[B]
670033 = 7 · 13 · 37 · 199		5481451 = 31 · 151 · 1171	[B]

5632705=5·13·193·449		17098369=113·337·449	
5968873=43·127·1093	[B]	17316001=53·157·2081	
6054985=5·53·73·313		18162001=11·13·17·31·241	
6189121=61·241·421		18307381=29·61·79·131	
6313681=11·17·19·1777		18900973=7·13·229·907	
6840001=7·17·229·251		19384289=89·353·617	
6868261=43·211·757	[B]	20964961=17·19·47·1381	
7207201=17·353·1201	[B]	21584305=5·17·197·1289	
7519441=41·241·761	[B]	22665505=5·17·97·2749	
7995169=7·13·103·853		23382529=97·193·1249	
8134561=37·109·2017	[B]	26280073=73·157·2293	
8341201=11·31·61·401		26474581=7·19·67·2971	
8719921=7·23·41·1321		26719701=3·29·197·1559	
8830801=7·19·67·991		26921089=13·37·97·577	
9439201=61·271·571		27062101=11·31·61·1301	
9494101=23·61·67·101		31146661=7·13·31·61·181	[C]
9582145=5·23·97·859		31405501=71·631·701	
9585541=7·31·163·271		31692805=5·47·157·859	
9890881=7·11·13·41·241		32914441=7·19·61·4057	
10024561=71·271·521		33302401=11·31·61·1601	
10267951=67·331·463		34901461=7·19·397·661	
10606681=31·43·73·109		35703361=61·277·2113	
10837321=11·31·61·521		36765901=37·613·1621	[B]
10877581=11·13·29·43·61		37280881=11·17·73·2731	
11119105=5·17·257·509		37354465=5·29·73·3529	
11205601=11·17·31·1933		39353665=5·13·193·3137	
11921001=3·29·263·521		41471521=7·13·31·61·241	
11972017=43·433·643	[B]	43286881=11·31·61·2081	
12261061=19·61·71·149		43331401=43·631·1597	[B]
12945745=5·19·29·37·127		43260409=7·19·157·2089	
13187665=5·17·113·1373		45318561=3·29·173·3011	
13696033=13·17·29·2137		47006785=5·7·17·199·397	
13992265=5·7·19·53·397		53711113=157·313·1093	
14469841=73·379·523		54767881=7·37·103·2053	
14676481=71·421·491		56052361=211·421·631	[C]
14913991=43·127·2731	[B]	60112885=5·7·443·3877	
15247621=61·181·1381		60957361=61·181·5521	
15403285=5·37·139·599		64377991=163·487·811	
15829633=43·547·673	[B]	65037817=13·19·73·3607	
15888313=7·19·67·1783		67902031=43·271·5827	[B]

68154001 = 151 · 601 · 751		216821881 = 331 · 661 · 991	[C]
72108421 = 7 · 11 · 191 · 4903		228842209 = 337 · 673 · 1009	[C]
75151441 = 17 · 19 · 29 · 71 · 113		230996949 = 3 · 53 · 317 · 4583	
75681541 = 13 · 19 · 61 · 5023		231194965 = 5 · 23 · 229 · 8779	
79624621 = 139 · 691 · 829		241242001 = 7 · 11 · 13 · 401 · 601	
84417985 = 5 · 29 · 577 · 1009		266003101 = 7 · 13 · 37 · 199 · 397	
88689601 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2161		275283401 = 71 · 701 · 5531	
90698401 = 103 · 647 · 1361		277241401 = 31 · 61 · 271 · 541	
93030145 = 5 · 13 · 257 · 5569		280761481 = 7 · 11 · 13 · 41 · 6841	
93614521 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2281		288120421 = 307 · 613 · 1531	
93869665 = 5 · 17 · 29 · 113 · 337	[C]	289766701 = 7 · 19 · 181 · 12037	
99036001 = 61 · 541 · 3001		295643089 = 7 · 157 · 367 · 733	
101957401 = 7 · 13 · 19 · 109 · 541		321197185 = 5 · 19 · 23 · 29 · 37 · 137	
104569501 = 47 · 1151 · 1933		328573477 = 199 · 397 · 4159	
104852881 = 7 · 31 · 271 · 1783		357277921 = 7 · 11 · 13 · 241 · 1481	
109577161 = 19 · 73 · 199 · 397		360067201 = 13 · 31 · 61 · 97 · 151	
115039081 = 157 · 313 · 2341		366652201 = 461 · 691 · 1151	
118901521 = 271 · 541 · 811	[C]	368113411 = 43 · 631 · 13567	[B]
127664461 = 71 · 421 · 4271		376785601 = 17 · 41 · 233 · 23201	
128697361 = 13 · 17 · 661 · 881		405739681 = 229 · 457 · 3877	
130032865 = 5 · 19 · 97 · 103 · 137		413631505 = 5 · 7 · 17 · 73 · 89 · 107	
133205761 = 13 · 17 · 41 · 61 · 241		417241045 = 5 · 13 · 19 · 23 · 37 · 397	
135556345 = 5 · 37 · 89 · 8233		434932961 = 41 · 881 · 12041	[B]
151530401 = 11 · 17 · 71 · 101 · 113		455106601 = 19 · 41 · 53 · 73 · 151	
151813201 = 41 · 61 · 101 · 601		471905281 = 31 · 991 · 15361	[B]
153927961 = 11 · 47 · 173 · 1721		473847121 = 11 · 31 · 1021 · 1361	
161035057 = 29 · 113 · 157 · 313		492559141 = 367 · 733 · 1831	
163954561 = 67 · 331 · 7393		496050841 = 11 · 13 · 19 · 41 · 61 · 73	
167979421 = 31 · 61 · 211 · 421		503758801 = 7 · 13 · 61 · 151 · 601	
170947105 = 5 · 7 · 647 · 7549		509033161 = 7 · 13 · 19 · 37 · 73 · 109	
171454321 = 163 · 811 · 1297		517937581 = 7 · 37 · 1291 · 1549	
172947529 = 307 · 613 · 919	[C]	542497201 = 263 · 787 · 2621	
178837201 = 59 · 1451 · 2089		547652161 = 7 · 17 · 709 · 6491	
180115489 = 163 · 487 · 2269		561481921 = 7 · 11 · 13 · 41 · 13681	
187188001 = 7 · 11 · 13 · 41 · 4561		577240273 = 19 · 29 · 73 · 113 · 127	
188689501 = 7 · 11 · 13 · 251 · 751		584357761 = 13 · 37 · 241 · 5041	
194675041 = 11 · 17 · 373 · 2791		597717121 = 71 · 911 · 9241	
200753281 = 71 · 631 · 4481		612816751 = 251 · 751 · 3251	
208969201 = 7 · 19 · 661 · 2377		633639097 = 7 · 13 · 37 · 307 · 613	
214852609 = 229 · 457 · 2053		652969351 = 271 · 811 · 2971	

672389641 = 7 · 11 · 37 · 53 · 61 · 73
 703995733 = 7 · 19 · 67 · 199 · 397
 717164449 = 23 · 43 · 67 · 79 · 137
 722923201 = 7 · 11 · 13 · 401 · 1801
 727083001 = 43 · 127 · 211 · 631
 771043201 = 401 · 1201 · 1601
 775368901 = 373 · 1117 · 1861
 776176261 = 7 · 61 · 853 · 2131
 781347841 = 29 · 61 · 79 · 5591
 798770161 = 7 · 73 · 1021 · 1531
 834720601 = 11 · 13 · 29 · 31 · 43 · 151
 842202361 = 7 · 11 · 13 · 41 · 20521
 854197345 = 5 · 19 · 23 · 313 · 1249
 863984881 = 307 · 613 · 4591
 902645857 = 47 · 3727 · 5153
 957044881 = 13 · 23 · 1193 · 2683
 958762729 = 47 · 3359 · 6073
 968553181 = 31 · 37 · 61 · 109 · 127
 1018928485 = 5 · 19 · 29 · 163 · 2269
 1074363265 = 5 · 19 · 37 · 53 · 73 · 79
 1090842145 = 5 · 17 · 673 · 19069
 1150270849 = 7 · 13 · 19 · 577 · 1153
 1152793621 = 7 · 31 · 271 · 19603
 1177800481 = 11 · 13 · 19 · 41 · 97 · 109
 1193229577 = 379 · 757 · 4159
 1200778753 = 293 · 877 · 4673
 1213619761 = 433 · 1297 · 2161
 1232469001 = 37 · 73 · 181 · 2521
 1256855041 = 13 · 29 · 31 · 41 · 43 · 61
 1257102001 = 337 · 1009 · 3697
 1269295201 = 349 · 1741 · 2089
 1299963601 = 601 · 1201 · 1801
 1420379065 = 5 · 7 · 53 · 619 · 1237
 1423668961 = 11 · 13 · 17 · 271 · 2161
 1504651681 = 13 · 31 · 61 · 97 · 631
 1515785041 = 331 · 991 · 4621
 1534274841 = 3 · 11 · 29 · 479 · 3347
 1592668441 = 7 · 13 · 37 · 199 · 2377
 1626167341 = 31 · 61 · 379 · 2269
 1632785701 = 547 · 1093 · 2731

[C]

1676203201 = 31 · 61 · 211 · 4201
 1676641681 = 11 · 13 · 19 · 43 · 113 · 127
 1726372441 = 307 · 1531 · 3673
 1784291041 = 13 · 97 · 421 · 3361
 1828377001 = 11 · 41 · 1801 · 2251
 1858395529 = 19 · 73 · 199 · 6733
 1894344001 = 11 · 31 · 1021 · 5441
 1899525601 = 211 · 2521 · 3571
 1976295241 = 19 · 109 · 691 · 1381
 1992841201 = 13 · 17 · 19 · 37 · 101 · 127
 2029554241 = 11 · 13 · 29 · 61 · 71 · 113
 2067887557 = 367 · 733 · 7687
 2170282969 = 373 · 1117 · 5209
 2230305949 = 499 · 997 · 4483
 2301745249 = 727 · 1453 · 2179
 2414829781 = 7 · 13 · 181 · 271 · 541
 2467813621 = 7 · 13 · 31 · 61 · 14341
 2479305985 = 5 · 13 · 193 · 257 · 769
 2489462641 = 41 · 1721 · 35281
 2494621585 = 5 · 37 · 47 · 379 · 757
 2509860961 = 41 · 73 · 137 · 6121
 2598933481 = 443 · 1327 · 4421
 2657502001 = 7 · 11 · 31 · 73 · 101 · 151
 2766901501 = 7 · 13 · 61 · 151 · 3301
 2806205689 = 7 · 23 · 37 · 67 · 79 · 89
 2942952481 = 7 · 31 · 433 · 31321
 3044238121 = 19 · 199 · 271 · 2971
 3105567361 = 13 · 17 · 37 · 113 · 3361
 3313196881 = 619 · 1237 · 4327
 3534510001 = 11 · 17 · 41 · 43 · 71 · 151
 3713287801 = 571 · 2281 · 2851
 3835537861 = 727 · 1453 · 3631
 4034969401 = 661 · 1321 · 4621
 4189909501 = 31 · 61 · 211 · 10501
 4210922233 = 7 · 37 · 1033 · 15739
 4215885697 = 577 · 1153 · 6337
 4354716961 = 7 · 37 · 73 · 139 · 1657
 4461725581 = 79 · 2237 · 25247
 4558134673 = 17 · 37 · 53 · 73 · 1873
 4562359201 = 673 · 2017 · 3361

[C]

[B]

4579461601 = 11 · 13 · 29 · 43 · 61 · 421
 4776665257 = 7 · 13 · 37 · 199 · 7129
 4852794241 = 433 · 1297 · 8641
 4897161361 = 547 · 1093 · 8191
 4922275501 = 11 · 13 · 37 · 61 · 101 · 151
 5120093089 = 23 · 199 · 353 · 3169
 5394826801 = 7 · 13 · 17 · 23 · 31 · 67 · 73
 5507520481 = 17 · 19 · 31 · 61 · 71 · 127
 5748693121 = 577 · 1153 · 8641
 6295936465 = 5 · 7 · 13 · 37 · 47 · 73 · 109
 6436473121 = 13 · 29 · 37 · 67 · 71 · 97
 6557296321 = 17 · 19 · 47 · 61 · 73 · 97
 6693621481 = 607 · 1213 · 9091
 6735266161 = 13 · 337 · 877 · 1753
 6820479601 = 13 · 31 · 41 · 67 · 101
 7103660473 = 7 · 13 · 19 · 109 · 37693
 7144929001 = 7 · 23 · 41 · 601 · 1801
 8047904257 = 577 · 1153 · 12097
 8251854001 = 1301 · 1951 · 3251
 8346731851 = 823 · 2467 · 4111
 8379420001 = 31 · 61 · 211 · 21001
 8614542601 = 7 · 19 · 31 · 101 · 137 · 151
 9030158341 = 967 · 1933 · 4831
 9293756581 = 853 · 2557 · 4261
 9334619281 = 13 · 31 · 41 · 71 · 73 · 109
 9624742921 = 1171 · 2341 · 3511
 9789244921 = 547 · 2731 · 6553
 9799928965 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 757
 9938059237 = 619 · 1237 · 12979
 10017782401 = 11 · 31 · 61 · 401 · 1201
 10238570497 = 23 · 199 · 353 · 6337
 10276596961 = 43 · 211 · 337 · 3361
 10277275681 = 659 · 2633 · 5923
 10761055201 = 13 · 29 · 41 · 61 · 101 · 113
 11193713785 = 5 · 37 · 67 · 73 · 89 · 109
 11342605609 = 1237 · 2473 · 3709
 11453249809 = 17 · 23 · 53 · 67 · 73 · 113
 11504500921 = 727 · 1453 · 10891
 12047929633 = 607 · 1213 · 16363
 12173703001 = 1481 · 2221 · 3701

13058894737 = 7 · 37 · 73 · 139 · 4969
 13062256705 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 1009
 13079177569 = 1297 · 2593 · 3889
 13402361281 = 17 · 29 · 47 · 67 · 89 · 97
 13577445505 = 5 · 13 · 17 · 19 · 59 · 97 · 113
 14496799681 = 7 · 13 · 73 · 739 · 2953
 15182481601 = 7 · 17 · 19 · 31 · 53 · 61 · 67
 15217092001 = 19 · 199 · 271 · 14851
 15920538901 = 31 · 61 · 211 · 39901
 16066911121 = 41 · 241 · 521 · 3121
 16159240945 = 5 · 17 · 29 · 73 · 89 · 1009
 16217236801 = 19 · 31 · 41 · 61 · 101 · 109
 16850343601 = 7 · 13 · 31 · 61 · 181 · 541 [C]
 18225237889 = 17 · 37 · 53 · 73 · 7489
 18245364481 = 673 · 2017 · 13441
 19904698081 = 17 · 37 · 41 · 73 · 97 · 109
 20801635681 = 61 · 241 · 421 · 3361
 21515221081 = 1531 · 3061 · 4591
 21595159873 = 7 · 67 · 157 · 313 · 937
 21812563201 = 11 · 13 · 17 · 31 · 241 · 1201
 22541365441 = 7 · 17 · 23 · 37 · 41 · 61 · 89
 22505004901 = 43 · 127 · 211 · 19531
 23000028481 = 727 · 3631 · 8713
 23196631391 = 13 · 17 · 23 · 67 · 68113
 23886452017 = 829 · 1657 · 17389
 24172484701 = 31 · 43 · 53 · 61 · 71 · 79
 25505418241 = 1021 · 3061 · 8161
 25749237001 = 1901 · 2851 · 4751
 25862624705 = 5 · 17 · 29 · 113 · 92849
 25923026641 = 953 · 2857 · 9521
 26131082461 = 11 · 29 · 61 · 139 · 9661
 26242929505 = 5 · 13 · 23 · 37 · 67 · 73 · 97
 27278026129 = 1657 · 3313 · 4969
 27405110161 = 11 · 13 · 19 · 37 · 41 · 61 · 109
 29182843801 = 787 · 3931 · 9433
 29373895405 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 2269
 30712480129 = 23 · 199 · 353 · 19009
 31040015617 = 13 · 37 · 97 · 577 · 1153
 31293845857 = 29 · 113 · 1093 · 8737
 31340027401 = 23 · 61 · 67 · 101 · 3301

31840678801 = 31 · 61 · 211 · 79801	78229242001 = 29 · 113 · 1093 · 21841
32071969801 = 31 · 151 · 1171 · 5851	80313963601 = 41 · 241 · 521 · 15601
32541803785 = 5 · 19 · 29 · 919 · 12853	82380774001 = 2801 · 4201 · 7001
34138047673 = 983 · 3929 · 8839	84954809611 = 7 · 19 · 67 · 1783 · 5347
34153717249 = 1069 · 4273 · 7477	85086850681 = 7 · 19 · 37 · 41 · 53 · 73 · 109
34296170401 = 41 · 241 · 761 · 4561	87015731617 = 23 · 199 · 353 · 53857
36713304937 = 823 · 4933 · 9043	87433760701 = 7 · 19 · 67 · 991 · 9901
37168482961 = 853 · 2557 · 17041	89099624593 = 7 · 199 · 4177 · 15313
37412632621 = 7 · 13 · 37 · 199 · 55837	91116455041 = 17 · 37 · 53 · 73 · 37441
39114024769 = 43 · 127 · 1093 · 6553	91839605761 = 1153 · 3457 · 23041
40460634865 = 5 · 7 · 17 · 53 · 79 · 109 · 149	93912375601 = 11 · 31 · 61 · 101 · 44701
41448925441 = 7 · 11 · 31 · 41 · 53 · 61 · 131	94001094001 = 23 · 61 · 67 · 101 · 9901
41594596297 = 1237 · 2473 · 13597	94737839041 = 41 · 47 · 53 · 73 · 97 · 131
41770740817 = 13 · 17 · 19 · 29 · 37 · 73 · 127	99976607641 = 29 · 43 · 61 · 79 · 127 · 131
42780070657 = 1213 · 3637 · 9697	102738451201 = 43 · 211 · 337 · 33601
42831065341 = 43 · 127 · 211 · 37171	109038862801 = 11 · 17 · 31 · 43 · 61 · 71 · 101
43721295751 = 7 · 19 · 67 · 991 · 4951	113267783377 = 7 · 19 · 67 · 1783 · 7129
46303659361 = 29 · 31 · 37 · 97 · 113 · 127	118186481089 = 1657 · 3313 · 21529
49237316749 = 1399 · 2797 · 12583	118450661473 = 17 · 37 · 53 · 73 · 48673
49817456833 = 1013 · 3037 · 16193	122160502081 = 43 · 127 · 2731 · 8191
49883286817 = 7 · 13 · 37 · 199 · 74449	122681205361 = 11 · 13 · 37 · 41 · 61 · 73 · 127
50163331681 = 67 · 331 · 673 · 3361	124778868481 = 61 · 241 · 321 · 20161
54157592161 = 967 · 4831 · 11593	131553268705 = 5 · 23 · 97 · 859 · 13729
56549585233 = 1163 · 4649 · 10459	138303503521 = 43 · 547 · 673 · 8737
56718791641 = 1237 · 2473 · 18541	141025770145 = 5 · 13 · 19 · 73 · 109 · 113 · 127
57259325761 = 11 · 17 · 29 · 41 · 43 · 53 · 113	141308002081 = 211 · 421 · 631 · 2521
59226547537 = 17 · 37 · 53 · 73 · 24337	143832608641 = 43 · 211 · 337 · 47041
60769467361 = 19 · 43 · 71 · 73 · 113 · 127	143873352001 = 17 · 29 · 31 · 37 · 43 · 61 · 97
63174284545 = 5 · 17 · 29 · 113 · 337 · 673 [C]	149992092361 = 1657 · 4969 · 18217
63280622521 = 1283 · 3847 · 12821	174029847553 = 23 · 199 · 353 · 107713
64467073441 = 1321 · 5281 · 9241	174858690601 = 7 · 19 · 67 · 991 · 19801
64705212721 = 37 · 73 · 541 · 44281	175467600001 = 23 · 41 · 67 · 601 · 4621
65320532641 = 7 · 13 · 17 · 67 · 73 · 89 · 97	180727470757 = 1627 · 3253 · 34147
66781063441 = 43 · 211 · 337 · 21841	191614761361 = 1987 · 7283 · 13241
67220090785 = 5 · 19 · 29 · 163 · 149689	192739365541 = 271 · 541 · 811 · 1621
67495942201 = 2621 · 3931 · 6551	193701843721 = 61 · 271 · 571 · 20521
69994934461 = 19 · 199 · 271 · 68311	207194042881 = 7 · 23 · 41 · 1321 · 23761
72720130561 = 13 · 23 · 29 · 41 · 43 · 67 · 71	208129325041 = 11 · 17 · 37 · 41 · 53 · 109 · 127
76778776801 = 23 · 199 · 353 · 47521	209982754081 = 19 · 199 · 271 · 204931
76940276401 = 1087 · 5431 · 13033	219893835421 = 13 · 19 · 29 · 37 · 47 · 127 · 139

227787487201 = 17 · 37 · 53 · 73 · 93601	522086311297 = 23 · 199 · 353 · 323137
243938280601 = 41 · 47 · 71 · 101 · 127 · 139	552285260605 = 5 · 13 · 19 · 23 · 37 · 525493
245997259201 = 37 · 109 · 2017 · 30241	522570258001 = 11 · 29 · 61 · 139 · 193201
246383448301 = 31 · 181 · 331 · 132661	570817526401 = 17 · 353 · 1201 · 79201
261043963489 = 23 · 199 · 353 · 161569	574694019901 = 19 · 29 · 31 · 43 · 61 · 101 · 127
261286481401 = 11 · 29 · 61 · 139 · 96601	582914585761 = 41 · 241 · 761 · 77521
263096955265 = 5 · 23 · 97 · 859 · 27457	611357597761 = 17 · 31 · 41 · 47 · 61 · 71 · 139
263609027137 = 17 · 19 · 29 · 37 · 53 · 113 · 127	615249583201 = 11 · 17 · 29 · 61 · 109 · 113 · 151
263610459505 = 5 · 29 · 73 · 3529 · 7057	630232823557 = 2467 · 4933 · 51787
282357472321 = 2161 · 8641 · 15121	641453995729 = 29 · 113 · 1093 · 179089
285107906161 = 13 · 29 · 31 · 47 · 61 · 67 · 127	649018777177 = 2143 · 12853 · 23563
306177962545 = 5 · 7 · 13 · 17 · 47 · 73 · 83 · 139	667783116001 = 43 · 211 · 337 · 218401
308374322881 = 2281 · 4561 · 29641	689702851201 = 7 · 13 · 17 · 23 · 31 · 41 · 101 · 151
329985846433 = 1319 · 11863 · 21089	696840473701 = 2551 · 5101 · 53551
333893086801 = 43 · 211 · 337 · 109201	701539152301 = 13 · 19 · 43 · 61 · 71 · 101 · 151
351551848033 = 1747 · 10477 · 19207	702712420201 = 11 · 37 · 43 · 61 · 71 · 73 · 127
358851891601 = 7 · 31 · 37 · 41 · 73 · 109 · 137	766366842241 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2161 · 8641
365799992041 = 11 · 29 · 61 · 139 · 135241	779766954001 = 7 · 17 · 229 · 251 · 114001
366451672861 = 43 · 127 · 2731 · 24571	852528627601 = 7 · 31 · 41 · 61 · 101 · 103 · 151
374026539601 = 11 · 13 · 17 · 71 · 113 · 127 · 151	870142775041 = 23 · 199 · 353 · 538561
414878851297 = 43 · 547 · 673 · 26209	881372567881 = 13 · 37 · 61 · 181 · 165961
435072195361 = 23 · 199 · 353 · 269281	919707221161 = 19 · 29 · 43 · 53 · 73 · 79 · 127
440688939301 = 13 · 37 · 61 · 181 · 82981	934895139361 = 43 · 211 · 337 · 305761
447563211481 = 19 · 29 · 31 · 37 · 73 · 89 · 109	955118046961 = 13 · 23 · 41 · 61 · 89 · 113 · 127
458193859201 = 13 · 17 · 31 · 61 · 89 · 97 · 127	961440783745 = 5 · 13 · 193 · 449 · 170689
459509799673 = 43 · 67 · 89 · 103 · 127 · 137	1012569679441 = 37 · 613 · 1621 · 27541
463503340801 = 31 · 271 · 601 · 91801	1045137811201 = 11 · 29 · 61 · 139 · 386401
470294134201 = 1987 · 9931 · 23833	1100091206413 = 3187 · 6373 · 54163
481858041601 = 41 · 241 · 521 · 93601	
1111586883121 = 11 · 13 · 17 · 31 · 37 · 43 · 73 · 127	
1335563174401 = 43 · 211 · 337 · 436801	
1422786039361 = 17 · 41 · 43 · 61 · 71 · 97 · 113	
1463191853761 = 11 · 29 · 61 · 139 · 540961	
1471186523521 = 11 · 13 · 19 · 31 · 37 · 61 · 71 · 109	
1560134656417 = 29 · 197 · 953 · 286553	
1724672994661 = 31 · 181 · 331 · 928621	
1762739825041 = 13 · 37 · 61 · 181 · 331921	
1812879653761 = 11 · 17 · 19 · 29 · 31 · 41 · 109 · 127	
1915784071201 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2161 · 21601	
1918150282945 = 5 · 13 · 17 · 29 · 43 · 97 · 113 · 127	

1936933484401 = 61 · 271 · 571 · 205201
1949584767571 = 7 · 19 · 67 · 991 · 220771
2051006968081 = 43 · 211 · 757 · 298621
2074750811281 = 43 · 631 · 1597 · 47881
2409269616001 = 41 · 241 · 521 · 468001
2623005016801 = 13 · 17 · 71 · 97 · 101 · 113 · 151
2739572924617 = 3463 · 20773 · 38083
3192107236081 = 61 · 241 · 421 · 515761
3831479452801 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2161 · 43201
3873857529601 = 61 · 271 · 571 · 410401
3939309223201 = 11 · 17 · 19 · 31 · 41 · 53 · 109 · 151
3974885651521 = 31 · 37 · 61 · 71 · 73 · 97 · 113
4055474664241 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2281 · 43321
4398128324161 = 11 · 13 · 17 · 31 · 241 · 242161
441699006001 = 41 · 241 · 521 · 858001
4457639007361 = 29 · 43 · 61 · 67 · 71 · 97 · 127
4847612022001 = 7 · 17 · 23 · 41 · 61 · 73 · 89 · 109
5186812031101 = 43 · 631 · 1597 · 119701
5300386977601 = 41 · 241 · 521 · 1029601
6743755776241 = 11 · 19 · 29 · 31 · 41 · 61 · 113 · 127
7420541356801 = 17 · 353 · 1201 · 1029601
7762073482801 = 11 · 71 · 73 · 79 · 101 · 113 · 151
7982563786561 = 7 · 13 · 31 · 41 · 67 · 73 · 103 · 137
8641716486481 = 13 · 19 · 31 · 41 · 47 · 71 · 73 · 113
9492223177801 = 7 · 13 · 31 · 37 · 67 · 89 · 101 · 151
10329847501681 = 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 73 · 127
10799855967601 = 17 · 19 · 29 · 41 · 43 · 61 · 71 · 151
12026646712081 = 17 · 19 · 29 · 31 · 61 · 71 · 73 · 131
12672844307641 = 7 · 23 · 41 · 1321 · 1453321
13158724130461 = 7 · 13 · 19 · 109 · 541 · 129061
13966038000685 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 1078813
14101881425281 = 13 · 37 · 61 · 181 · 2655361
14881694651461 = 11 · 19 · 37 · 43 · 53 · 61 · 109 · 127
15242640004801 = 11 · 19 · 31 · 37 · 61 · 73 · 109 · 131
15477125711041 = 17 · 19 · 31 · 37 · 41 · 71 · 113 · 127
17314586889601 = 17 · 353 · 1201 · 2402401
17827311625921 = 7 · 19 · 37 · 41 · 61 · 97 · 109 · 137
18621379685665 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 1438417
18842842075681 = 13 · 19 · 41 · 43 · 61 · 71 · 97 · 103
20881454586721 = 43 · 547 · 673 · 1319137
21339619302001 = 7 · 11 · 13 · 41 · 4561 · 114001

21990568972801 = 11 · 13 · 17 · 31 · 241 · 1210801
 22310639874601 = 13 · 29 · 31 · 41 · 43 · 71 · 101 · 151
 24465723528961 = 11 · 13 · 19 · 31 · 37 · 41 · 43 · 61 · 73
 26302468469761 = 11 · 17 · 31 · 61 · 71 · 73 · 113 · 127
 28300616062993 = 29 · 53 · 79 · 109 · 113 · 127 · 149
 30912473358481 = 11 · 13 · 17 · 29 · 31 · 41 · 43 · 71 · 113
 34830684315505 = 5 · 13 · 17 · 23 · 29 · 37 · 89 · 113 · 127
 35761007711521 = 17 · 29 · 37 · 41 · 53 · 71 · 97 · 131
 36413592521761 = 7 · 13 · 31 · 61 · 181 · 541 · 2161
 38018515483081 = 7 · 23 · 41 · 1321 · 4359961
 40192508827801 = 11 · 29 · 37 · 41 · 61 · 71 · 127 · 151
 41898088110565 = 5 · 19 · 29 · 37 · 127 · 3236437
 51620128928641 = 7 · 13 · 17 · 31 · 37 · 47 · 61 · 73 · 139
 63741163523401 = 7 · 13 · 19 · 31 · 41 · 47 · 61 · 67 · 151
 69725162944801 = 7 · 13 · 23 · 31 · 37 · 41 · 67 · 97 · 109
 74172530839681 = 17 · 31 · 41 · 43 · 73 · 79 · 109 · 127
 74590316287201 = 11 · 13 · 17 · 19 · 31 · 43 · 71 · 113 · 151
 78034608115201 = 23 · 31 · 37 · 41 · 61 · 89 · 97 · 137
 102967089120001 = 31 · 41 · 43 · 59 · 61 · 71 · 73 · 101
 109952772216001 = 11 · 13 · 17 · 31 · 241 · 6054001
 119206689636385 = 5 · 13 · 17 · 37 · 43 · 47 · 97 · 107 · 139
 120956962861801 = 11 · 31 · 37 · 73 · 79 · 101 · 109 · 151
 139160898661681 = 13 · 17 · 19 · 29 · 31 · 41 · 73 · 109 · 113
 147432785787001 = 11 · 13 · 19 · 29 · 41 · 43 · 61 · 127 · 137
 169875651141505 = 5 · 17 · 29 · 113 · 337 · 673 · 2689
 178512629481901 = 11 · 13 · 19 · 29 · 31 · 37 · 103 · 127 · 151
 348839041874905 = 5 · 29 · 73 · 3529 · 9338617
 379873505975041 = 13 · 17 · 19 · 31 · 61 · 67 · 71 · 89 · 113
 380398406850001 = 19 · 37 · 43 · 73 · 89 · 101 · 127 · 151
 426241485356401 = 11 · 13 · 19 · 29 · 43 · 73 · 101 · 113 · 151
 461246327743201 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2281 · 4927081
 483285864348001 = 11 · 13 · 19 · 31 · 71 · 73 · 97 · 101 · 113
 491253702030001 = 19 · 31 · 61 · 79 · 101 · 103 · 127 · 131
 558858740403601 = 11 · 17 · 19 · 43 · 53 · 59 · 61 · 127 · 151
 559570053878641 = 13 · 17 · 31 · 37 · 41 · 61 · 73 · 107 · 113
 681235705372321 = 11 · 17 · 29 · 31 · 41 · 71 · 97 · 113 · 127
 765112342881601 = 11 · 13 · 19 · 37 · 61 · 71 · 101 · 127 · 137
 942350011797601 = 11 · 17 · 19 · 37 · 61 · 71 · 97 · 113 · 151
 1039531253729141 = 7 · 13 · 19 · 109 · 541 · 10195741
 1276639008372001 = 31 · 41 · 71 · 73 · 97 · 101 · 131 · 151
 1400140374091201 = 17 · 19 · 29 · 31 · 61 · 71 · 73 · 101 · 151

[C]

[C, S]

1436697831295441 = 11 · 13 · 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 71 · 127
 1493812621027441 = 11 · 13 · 17 · 29 · 31 · 41 · 43 · 47 · 73 · 113
 1688041617225601 = 11 · 17 · 29 · 61 · 71 · 79 · 83 · 97 · 113
 2094319836529921 = 7 · 11 · 13 · 31 · 37 · 41 · 61 · 73 · 97 · 103
 2304390472599601 = 17 · 29 · 31 · 37 · 41 · 71 · 73 · 127 · 151
 2842648863161185 = 5 · 13 · 19 · 23 · 29 · 37 · 67 · 97 · 113 · 127
 3503934940306801 = 7 · 11 · 13 · 41 · 4561 · 18718801
 3844233106114401 = 7 · 11 · 13 · 41 · 2161 · 44344801
 5197655860316101 = 7 · 13 · 19 · 109 · 541 · 50978701
 5778659093725441 = 7 · 11 · 19 · 31 · 37 · 53 · 61 · 79 · 97 · 139
 7007869693425601 = 7 · 11 · 13 · 41 · 4561 · 37437601
 8015398984895401 = 11 · 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 61 · 71 · 151
 8084842432668001 = 7 · 11 · 13 · 37 · 41 · 59 · 61 · 97 · 101 · 151
 8119959733594801 = 29 · 31 · 41 · 47 · 53 · 71 · 73 · 113 · 151
 12300849473799601 = 11 · 13 · 19 · 29 · 37 · 41 · 71 · 101 · 113 · 127
 16166305446157945 = 5 · 13 · 29 · 37 · 43 · 47 · 73 · 89 · 127 · 139
 20187873898592401 = 23 · 31 · 53 · 61 · 73 · 79 · 89 · 113 · 151
 34795784213714161 = 11 · 17 · 29 · 37 · 53 · 61 · 71 · 73 · 79 · 131
 39108343499765281 = 7 · 19 · 37 · 41 · 47 · 53 · 73 · 79 · 103 · 131
 51116737346161201 = 11 · 13 · 19 · 29 · 61 · 71 · 73 · 107 · 127 · 151
 61754693922936001 = 13 · 17 · 19 · 31 · 37 · 61 · 97 · 113 · 127 · 151
 103183537035680641 = 17 · 19 · 23 · 41 · 67 · 71 · 73 · 89 · 97 · 113
 105083995864811041 = 13 · 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 43 · 61 · 67 · 71 · 97
 126708084584398801 = 11 · 16 · 31 · 37 · 41 · 61 · 109 · 113 · 127 · 151
 132819104923908481 = 13 · 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 37 · 43 · 67 · 113 · 127
 186551892579535561 = 13 · 19 · 31 · 43 · 61 · 71 · 73 · 103 · 127 · 137
 190232114399046721 = 17 · 23 · 29 · 37 · 43 · 71 · 79 · 113 · 127 · 131
 346413738355448401 = 11 · 29 · 37 · 43 · 53 · 61 · 101 · 109 · 127 · 151
 407527558081847281 = 13 · 17 · 23 · 31 · 37 · 41 · 43 · 61 · 67 · 89 · 109
 556237362582392401 = 19 · 29 · 31 · 41 · 61 · 71 · 73 · 127 · 131 · 151
 809050105303927201 = 11 · 13 · 19 · 29 · 31 · 41 · 43 · 97 · 101 · 127 · 151
 1222628719906994401 = 23 · 29 · 43 · 53 · 73 · 79 · 83 · 101 · 127 · 131
 1577459952719164801 = 7 · 17 · 19 · 31 · 41 · 61 · 73 · 89 · 97 · 109 · 131
 1613480821698249505 = 5 · 17 · 23 · 37 · 43 · 53 · 79 · 89 · 97 · 113 · 127
 1733598993808804761 = 11 · 19 · 29 · 31 · 37 · 43 · 53 · 79 · 97 · 109 · 131
 2233271947842018721 = 11 · 19 · 29 · 31 · 37 · 53 · 71 · 73 · 79 · 113 · 131
 3054307817286633601 = 17 · 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 97 · 101 · 109 · 151
 3478301972562740401 = 13 · 17 · 19 · 29 · 43 · 61 · 71 · 89 · 101 · 113 · 151
 3754859467531765321 = 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 53 · 61 · 73 · 109 · 131
 4332152648626165441 = 13 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 71 · 73 · 89 · 97 · 127
 4954039956700380001 = 17 · 37 · 53 · 71 · 73 · 101 · 113 · 127 · 131 · 151

7156857700403137441 = 11 · 13 · 17 · 19 · 29 · 37 · 41 · 43 · 61 · 97 · 109 · 127
 7600184156423410201 = 13 · 19 · 23 · 31 · 41 · 67 · 73 · 101 · 103 · 137 · 151
 9219669366496075201 = 11 · 13 · 17 · 19 · 29 · 37 · 41 · 61 · 71 · 73 · 113 · 127
 25760372669736394401 = 19 · 29 · 31 · 37 · 43 · 61 · 71 · 101 · 113 · 127 · 151
 39767232646388681281 = 17 · 19 · 23 · 29 · 31 · 37 · 41 · 67 · 71 · 73 · 89 · 127
 44313937163154489601 = 17 · 31 · 37 · 43 · 61 · 71 · 73 · 97 · 101 · 113 · 151
 80695327084233548401 = 11 · 13 · 19 · 31 · 37 · 41 · 43 · 61 · 103 · 113 · 137 · 151
 87782655453298092001 = 11 · 13 · 19 · 31 · 37 · 41 · 43 · 73 · 101 · 113 · 127 · 151
 228329593650164462401 = 11 · 41 · 43 · 71 · 73 · 97 · 101 · 107 · 113 · 127 · 151
 569818971593894786401 = 11 · 19 · 37 · 41 · 43 · 53 · 71 · 79 · 97 · 101 · 113 · 127
 975830318450826300001 = 19 · 23 · 29 · 37 · 41 · 43 · 61 · 97 · 101 · 103 · 127 · 151
 987564429504494281441 = 23 · 29 · 31 · 37 · 41 · 53 · 61 · 79 · 89 · 97 · 109 · 131
 1276077703199375709361 = 19 · 29 · 31 · 37 · 41 · 47 · 61 · 79 · 109 · 113 · 127 · 139
 1791562810662585767521 = 11 · 13 · 17 · 19 · 31 · 37 · 43 · 71 · 73 · 97 · 109 · 113 · 127
 9592484065882497823681 = 11 · 17 · 29 · 31 · 37 · 43 · 61 · 71 · 73 · 79 · 97 · 113 · 131
 43912378553560565368321 = 19 · 23 · 29 · 37 · 41 · 43 · 53 · 67 · 73 · 109 · 113 · 127 · 131
 105614537422583404101601 = 11 · 13 · 29 · 37 · 43 · 71 · 73 · 101 · 103 · 113 · 127 · 137 · 151
 110076823944752351425201 = 17 · 29 · 31 · 41 · 43 · 61 · 67 · 71 · 73 · 89 · 113 · 127 · 151
 163422130553403714115201 = 13 · 17 · 19 · 23 · 29 · 37 · 41 · 43 · 61 · 67 · 101 · 113 · 127 · 151
 230816502217407379996801 = 13 · 29 · 31 · 41 · 43 · 67 · 73 · 89 · 101 · 109 · 113 · 137 · 151
 443656337893445593609056001 = 11 · 29 · 31 · 37 · 41 · 43 · 61 · 71 · 73 · 79 · 97 · 113 · 127 · 131 · 151

REFERENCES

- [1] N. G. W. H. BEEGER : On composite numbers n for which $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ for every a prime to n . *Scripta Math.* **16** (1950), 133—135.
- [2] J. CHERNICK : On Fermat's simple theorem. *Bul. Amer. Math. Soc.* **45** (1939), 269—274.
- [3] W. SIERPIŃSKI : A selection of problems in the theory of numbers (English translation) Pergamon Press (1964).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received May 16, 1978)