

ÜBER DEN FATOUSCHEN SATZ (I)

KEN'ITI KOSEKI

Es sei $f(z)$ eine reguläre und beschränkte Funktion in der offenen Einheitskreisscheibe $|z| < 1$. Es ist dann als der Fatouschen Satz wohl bekannt, dass für fast alle θ in $[0, 2\pi]$ im Lebesgueschen Sinne $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ existiert entlang des Radius der Kreisscheibe. In der vorliegenden Arbeit will ich den Fatouschen Satz noch ausführlicher untersuchen.

Satz I. Es sei $w = f(z)$ eine reguläre Funktion in $|z| < 1$, derart dass die Ableitung $f'(z)$ beschränkt ist. Es existiert dann für alle $e^{i\theta}$ auf $|z| = 1$ $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ entlang des Radius der Kreisscheibe.

Beweis. Wir setzen $|f'(z)| < M$ und $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$. Es sei $\{r_n\} = s_n (n=1, 2, \dots)$ eine Folge der positiven Zahlen, so dass $r_n < 1$ ($n=1, 2, \dots$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 1$ ist und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta})$ (θ ist fest) existiert. Wir bezeichnen $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta})$ mit A_n und die Vereinigungsmenge $\cup A_n$ mit A . Die Menge A ist dann sicherlich ein Kontinuum. Wenn die Menge A aus einem einzigen Punkt besteht, so existiert $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ und vice versa.

Wir nehmen an, dass die Menge A die beiden Punkte B und C enthalten. Wir bezeichnen die Entfernung zwischen den beiden B und C mit d und den Kreis mit dem Mittelpunkt B bzw. C und dem Radius $\frac{d}{4}$ mit K_1 bzw. K_2 . Die Entfernung zwischen den beiden K_1 und K_2 ist dann offenbar gleich zu $\frac{d}{2}$.

Es gibt die beiden Folgen $\{r_n\}$ und $\{r'_n\}$ der positiven Zahlen, so dass $r_n < 1$ und $r'_n < 1$ ($n=1, 2, \dots$) und $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r'_n = 1$ ist, und dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = B$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r'_n e^{i\theta}) = C$ ist. Wir bezeichnen die die beiden Punkte $r_1 e^{i\theta}$ und $e^{i\theta}$ verbindende Strecke mit $\overline{r_1 e^{i\theta}, e^{i\theta}}$. Es gibt dann eine Zahl $\tilde{r}'_1$ aus der Folge $\{r'_n\}$, so dass der Punkt $\tilde{r}'_1 e^{i\theta}$ auf der Strecke $\overline{r_1 e^{i\theta}, e^{i\theta}}$ liegt. Es gibt ebenfalls eine Zahl $\tilde{r}_1$ aus der Folge $\{r_n\}$, so dass der Punkt $\tilde{r}_1 e^{i\theta}$ auf der Strecke $\overline{\tilde{r}'_1 e^{i\theta}, e^{i\theta}}$ liegt. Dieses Verfahren wiederholen wir unendlich, so bekommen wir die Teilfolge $\{\tilde{r}_n\}$ bzw. $\{\tilde{r}'_n\}$ von $\{r_n\}$ bzw. $\{r'_n\}$, derart dass die Ungleichung

$$\tilde{r}_1 (= r_1) < \tilde{r}'_1 < \tilde{r}_2 < \tilde{r}'_2 < \dots < \tilde{r}_n < \tilde{r}'_n < \dots$$

gilt. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Folge $\{\tilde{r}_n\}$ bzw. $\{\tilde{r}'_n\}$ mit $\{r_n\}$ bzw. $\{r'_n\}$.

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n e^{i\theta}) = B$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r'_n e^{i\theta}) = C$ ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit wiederum annehmen, dass jeder Wert $f(r_n e^{i\theta})$ ($n=1, 2, \dots$) in dem Inneren von K_1 und jeder $f(r'_n e^{i\theta})$ ($n=1, 2, \dots$) in dem Inneren von K_2 enthalten ist.

Wir bezeichnen die Länge des Bildes von der Strecke $\overline{r_1 e^{i\theta}, r'_1 e^{i\theta}}$ durch die Funktion $w=f(z)$ mit L_1 . Es gilt dann

$$L_1 = \int_{r_1}^{r'_1} \sqrt{\left(\frac{dP}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dr}\right)^2} dr. \quad (1)$$

Andererseits ist es

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{\partial P}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dr} = \cos \theta \frac{\partial P}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{dQ}{dr} &= \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{dx}{dr} + \frac{\partial Q}{\partial y} \frac{dy}{dr} = \cos \theta \frac{\partial Q}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial Q}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Daraus folgt es ohne weiteres

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dr}\right)^2 &= \cos^2 \theta \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \right\} + \sin^2 \theta \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 \right\} \\ &+ 2 \cos \theta \sin \theta \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} \right\} \leq M^2. \end{aligned}$$

Daraus und aus (1) besteht es

$$L_1 \leq M(r'_1 - r_1).$$

Ebenfalls bezeichnen wir die Länge des Bildes von der Strecke $\overline{r'_1 e^{i\theta}, r_2 e^{i\theta}}$ durch die Funktion $w=f(z)$ mit L'_1 . Auf ganz analoge Weise mit der obigen bekommen wir die Ungleichung

$$L'_1 \leq M(r_2 - r'_1).$$

Wir bezeichnen im allgemeinen die Länge des Bildes von der Strecke $\overline{r_n e^{i\theta}, r'_n e^{i\theta}}$ ($n=1, 2, \dots$) bzw. $\overline{r'_n e^{i\theta}, r_{n+1} e^{i\theta}}$ durch die Funktion $w=f(z)$ mit L_n bzw. L'_n . Es besteht dann die Ungleichung

$$\begin{aligned} L_n &\leq M(r'_n - r_n) \\ L'_n &\leq M(r_{n+1} - r'_n). \end{aligned}$$

Daraus folgt es ohne weiteres

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n + \sum_{n=1}^{\infty} L'_n \leq M(1 - r_1). \quad (3)$$

Andererseits, da $f(r_n e^{i\theta})$ in dem Inneren von K_1 und $f(r'_n e^{i\theta})$ in dem

Inneren von K_2 enthalten ist, ist es

$$L_n \geq \frac{d}{2}$$

$$L'_n \geq \frac{d}{2}.$$

Folglich kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} L_n + \sum_{n=1}^{\infty} L'_n$ nicht konvergent sein; dies widerspricht aber der Ungleichung (3). W. z. b. w.

N. B. Auch wenn die beiden $P(x, y)$ und $Q(x, y)$ stetig differenzierbar in bezug auf x und y und die $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ beschränkt sind, besteht der obige Satz wie er ist.

Satz II. Es sei $w = f(z)$ eine reguläre und beschränkte Funktion in $|z| < 1$. Es existiert dann $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_0}} \frac{F(z) - F(e^{i\varphi_0})}{z - e^{i\varphi_0}}$ bis auf eine Lebesguesche Nullmenge im $(0, 2\pi)$, wo wir $F(z) = \int_0^z f(z) dz$ und $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta})$ setzen.

Beweis. Da $f(z)$ in $|z| < 1$ beschränkt ist, gibt es eine Konstante M , so dass $|f(z)| < M$ in $|z| < 1$ ist. Wir setzen $F(z) = \int_0^z f(z) dz$. Es gibt dann

$$F(re^{i\theta}) - F(re^{i\varphi}) = ir \int_0^\theta f(re^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi$$

Wir nehmen eine endliche Anzahl von abgeschlossenen, zueinander punktfremden, Intervallen $[\theta_1, \theta_2]$, $[\theta_3, \theta_4]$, $\dots$, $[\theta_{2n-1}, \theta_{2n}]$ auf $[0, 2\pi]$ auf. Es ist dann

$$\begin{aligned} & |F(re^{i\theta_2}) - F(re^{i\theta_1})| + |F(re^{i\theta_4}) - F(re^{i\theta_3})| + \dots + |F(re^{i\theta_{2n}}) - F(re^{i\theta_{2n-1}})| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{\theta_{2i-1}}^{\theta_{2i}} r |f(re^{i\varphi})| d\varphi < r M \sum_{i=1}^n (\theta_{2i} - \theta_{2i-1}) < M \sum_{i=1}^n (\theta_{2i} - \theta_{2i-1}). \end{aligned} \quad (1)$$

Also ist $F(re^{i\theta}) - F(re^{i\varphi})$ eine total stetige Funktion von θ . Überdies ist diese total Stetigkeit die Äquistetigkeit in bezug auf r .

Anderseits existiert nach dem Satz I $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta})$ (θ ist fest) für alle θ in $[0, 2\pi]$. Wir setzen $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta})$.

Wenn in (I) der Wert r gegen 1 strebt, so entsteht es

$$\begin{aligned} & |F(e^{i\theta_2}) - F(e^{i\theta_1})| + |F(e^{i\theta_4}) - F(e^{i\theta_3})| + \dots + |F(e^{i\theta_{2n}}) - F(e^{i\theta_{2n-1}})| \\ & \leq M \sum_{i=1}^n (\theta_{2i} - \theta_{2i-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Folglich ist die Funktion $F(e^{i\theta}) - F(e^{i\varphi})$ auch total stetig und somit ist $F(e^{i\theta})$

auch total stetig. Da $F(e^{i\theta})$ total stetig ist, ist es fast überall differenzierbar. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $F(e^{i\theta})$ am Punkte $e^{i\theta}=1$ differenzierbar ist.

Wir setzen

$$\frac{F(z) - F(1)}{z - 1} - F'(1) = \gamma(z).$$

Die Funktion $\gamma(z)$ ist dann regulär in $|z| < 1$ und definiert auch in $|z| = 1$ ausser dem Punkte $z=1$. Diese Funktion ist stetig auf $|z| \leq 1$ ausser dem Punkte $z=1$ und $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \gamma(e^{i\varphi}) = 0$.

Wir bezeichnen die Häufungsmenge von $\gamma(z)$ am Punkte $z=1$ in bezug auf $|z|=1$ mit $S_{z_0}^{(e)}$ und die Häufungsmenge von $\gamma(z)$ am Punkte $z=1$ in bezug auf $|z| < 1$ mit $S_{z_0}^{(D)}$.

Die Menge $S_{z_0}^{(D)}$ besteht dann offenbar aus nur einem einzigen Punkt 0. Die Begrenzung von $S_{z_0}^{(D)}$ ist in $S_{z_0}^{(e)}$ enthalten. Folglich, wenn $S_{z_0}^{(D)}$ eine beschränkte Menge ist, so muss $S_{z_0}^{(D)}$ mit $S_{z_0}^{(e)}$ übereinstimmen. Andererseits ist $S_{z_0}^{(D)}$ eine beschränkte Menge, da die $\gamma(z)$ beschränkt¹⁾ ist. W. z. b. w.

Satz III. Es sei $w = f(z)$ eine reguläre und beschränkte Funktion in $|z| < 1$. Es existiert dann $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_0}} f(z)$ fast überall in $[0, 2\pi]$ (nicht im

Stoltzschen Gebiete). Verallgemeinerung von dem Fatouschen Satz.

Beweis. Wir setzen $F(z) = \int_0^z f(z) dz$ und $\lim_{r \rightarrow 1} F(re^{i\theta}) = F(e^{i\theta})$. Es ist dann nach der Cauchyschen Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Wir nehmen nun an, dass $F(e^{i\varphi})$ differenzierbar am Punkte $e^{i\varphi} = e^{i\varphi_0}$ ist, und wir setzen

$$\frac{F(\zeta) - F(e^{i\varphi_0})}{\zeta - e^{i\varphi_0}} - F'(e^{i\varphi_0}) = \gamma(\zeta).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} |f(z) - F'(e^{i\varphi_0})| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{F(e^{i\varphi_0}) + \gamma(\zeta)(\zeta - e^{i\varphi_0})}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\gamma(\zeta)(\zeta - e^{i\varphi_0})}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(\zeta - z) + (z - e^{i\varphi_0})}{(\zeta - z)^2} \gamma(\zeta) d\zeta \right| = \left| \gamma(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(z - e^{i\varphi_0})}{(\zeta - z)^2} \gamma(\zeta) d\zeta \right|. \end{aligned}$$

1). Die $\gamma(z)$ ist beschränkt, da $\left| \frac{F(z) - F(1)}{z - 1} \right| = \left| \int_1^z f(z) dz \right| < M$ ist.

2). Vgl. R. Nevanlinna. Uniformisierung. S. 138.

Andererseits ist es

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{(z - e^{i\varphi_0})}{(\zeta - z)^3} \gamma(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|z - e^{i\varphi_0}|}{|\zeta - z|^2} |\gamma(\zeta)| d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi} |z - e^{i\varphi_0}| \cdot \int_0^{2\pi} \frac{|\gamma(e^{i\varphi})| d\varphi}{1 + r^2 - 2r \cos(\varphi - \theta)} \rightarrow 0^0 (z \rightarrow e^{i\varphi_0}). \quad \text{W. z. b. w.}$$

Zusatz. Es besteht $\lim_{z \rightarrow e^{i\varphi_0}} \left\{ \frac{F(z) - F(e^{i\varphi_0})}{z - e^{i\varphi_0}} - f(z) \right\} / (z - e^{i\varphi_0}) = 0$ fast überall in $[0, 2\pi]$.

MATHEMATISCHES INSTITUTE
UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA

(Eingegangen am 24. Dezember 1967)