ÜBER DIE HÄUFUNGSMENGEN DER MEROMORPHEN FUNKTIONEN

KEN'ITI KOSEKI

Es sei C eine einfach geschlossene Jordan Kurve auf der erweiterten Ebene und D sei das durch C begrenzte Gebiet. z_0 sei ein Punkt auf C, und $f(z)$ sei eine meromorphe Funktion auf D. Die Häufungsmenge in bezug auf D von $f(z)$ am Punkte z auf C bezeichnen wir mit $S_z^{(D)}$. Es sei z ein Punkt auf C und l sei ein in C enthaltener und den Punkt z enthaltender Bogen. Die beiden Endpunkte von l bezeichnen wir mit x_1 und x_2. Die Entfernung zwischen den beiden Punkten z und x_1 bezw. z und x_2 bezeichnen wir mit $r_1>0$ bezw. $r_2>0$ und wir nehmen an, dass die grössere Zahl von r_1 und $r_2=r$ ist. Die Vereinigungsmenge $\bigcup_{z'\in l-z} S_{z'}^{(D)}$ bezeichnen wir mit M_r und den Durchschnitt $\bigcap_{r>0}\overline{M}_r$ bezeichnen wir mit $S_z^{(C)}$ und als die Häufungsmenge in bezug auf C von $f(z)$ am Punkte z.

Alle Komponenten von $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C)}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots\cdots$, so ist es wohl bekannt, dass in jedem $\mathfrak{K}_i (i=1, 2, \cdots)$ es höchstens zwei Ausnahmewerte von $f(z)$ im Picardschen Sinne gibt.

In der vorliegenden Arbeit will ich die notwendige Bedingung und die hinreichende Bedingung geben dafür, dass es in $\mathfrak{K}_i$ die Ausnahmewerte von $f(z)$ gibt.

Es sei l_1 ein einfacher Bogen auf C, derart dass die beiden Endpunkte von l_1 z_1 und z_0 sind, und dass die Punkte auf l_1 von z_0 aus zu z_1 im positiven Sinne laufen. Wir bezeichnen die Entfernung zwischen z_1 und z_0 mit r und die abgeschlossene Hülle von $\bigcup_{z'\in l_1-z_0} S_{z'}^{(D)}$ mit M_r^+ und $\bigcap_{r>0}\overline{M}_r^+$ mit $S_{z_0}^{+(C)}$. Ebenfalls können wir die Menge $S_{z_0}^{-(C)}$ definieren. Es gilt dann der folgende Satz.

Satz I. *Wenn $S_{z_0}^{(D)}$ nicht mit der vollen Ebene übereinstimmt, so ist es hinreichend, dafür, dass es in $\mathfrak{K}_i$ keine Ausnahmewerte von $f(z)$ gibt, dass sowohl $R\cap S_{z_0}^{+(C)}$ als auch $R\cap S_{z_0}^{-(C)}$ nicht eine Nullmenge ist und $R\cap S_{z_0}^{+(C)}$ und $R\cap S_{z_0}^{-(C)}$ keine Punkte gemein haben, wo R die Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ bedeutet.*

Beweis. Es ist klar, dass $S_{z_0}^{+(C)}+S_{z_0}^{-(C)}=S_{z_0}^{(C)}$ und sowohl $S_{z_0}^{+(C)}$ als $S_{z_0}^{-(C)}$ ein Kontinuum bildet. R ist in der Menge $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten, so ist $\mathfrak{K}_i$ nach der Annahme, dass $R\cap S_{z_0}^{+(C)}$ und $R\cap S_{z_0}^{-(C)}$ keine Punkte gemein haben, nicht einfach-zusammenhängend.

Da $S_{z_0}^{(D)}$ nach der Voraussetzung nicht mit der vollen Ebene übereinstimmt, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $S_{z_0}^{(D)}$ eine beschränkte Punktmenge ist.

Die Komponenten von R bezeichnen wir mit $R_1, R_2, \cdots$. Wir bezeichnen ferner die Komponenten von der Komplementärmenge von R_j mit $\mathfrak{G}_1^j, \mathfrak{G}_2^j, \cdots$. Es ist dann leicht einzusehen, dass $\mathfrak{R}_i$ in einem bestimmten von $\mathfrak{G}_1^j, \mathfrak{G}_2^j, \cdots$, etwa in $\mathfrak{G}_1^j$, enthalten ist. Wir beweisen nun, dass mindestens eines von $\mathfrak{G}_1^j (j=1, 2, \cdots)$ nicht beschränkt ist.

Angenommen in der Tat, dass $\mathfrak{G}_1^1$ beschränkt ist. Die Komplementärmenge von R_1 kann dann nicht aus einer einzigen Komponente bestehen und eines von $\mathfrak{G}_2^1, \mathfrak{G}_3^1, \cdots$, etwa $\mathfrak{G}_2^1$, ist nicht beschränkt.

$\mathfrak{G}_1^1$ ist als eine Komponente von der Komplementärmenge des Kontinuums R_1 ein einfach-zusammenhängendes Gebiet, aber $\mathfrak{R}_i$ ist nicht einfach-zusammenhängend. Daher können die beiden Gebiete $\mathfrak{R}_i$ und $\mathfrak{G}_1^1$ nicht miteinander identisch sein. Folglich ist ein Grenzpunkt c von $\mathfrak{R}_i$ in $\mathfrak{G}_1^1$ enthalten.

Der Punkt c ist in einem von $R_2, R_3 \cdots$, etwa in R_2, enthalten. Da R_2 ein Kontinuum ist, ist R_2 wie der Punkt c in $\mathfrak{G}_1^1$ enthalten.

Also ist R_2 nicht in $\mathfrak{G}_2^1$ enthalten. $\mathfrak{G}_2^1$ ist aber in einem von $\mathfrak{G}_1^2, \mathfrak{G}_2^2, \cdots$ enthalten, da $\mathfrak{G}_2^1$ ein Gebiet ist und nicht die Menge R_2 enthält. $\mathfrak{R}_i$ ist aber nach der Annahme in $\mathfrak{G}_1^2$ enthalten. Daher ist R_1 in $\mathfrak{G}_1^2$ enthalten. Die Begrenzung S von $\mathfrak{G}_2^1$ ist aber in R_1 enthalten. Folglich ist S in $\mathfrak{G}_1^2$ und damit ist $\mathfrak{G}_2^1$ auch in $\mathfrak{G}_1^2$ enthalten. Also ist $\mathfrak{G}_1^2$ nicht beschränkt.

R_2 ist in einem von $S_{z_0}^{+(C)}$ und $S_{z_0}^{-(C)}$, etwa in $S_{z_0}^{+(C)}$, und nicht in dem anderen $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten.

Angenommen in der Tat, dass sowohl $R_2 \cap S_{z_0}^{+(C)}$ als auch $R_2 \cap S_{z_0}^{-(C)}$ nicht eine leere Menge ist. Es gilt offenbar $R_2 = R_2 \cap S_{z_0}^{+(C)} + R_2 \cap S_{z_0}^{-(C)}$, $R_2 \cap S_{z_0}^{+(C)} \subset R \cap S_{z_0}^{+(C)}$, $R_2 \cap S_{z_0}^{-(C)} \subset R \cap S_{z_0}^{-(C)}$, $R \cap S_{z_0}^{+(C)} \cap S_{z_0}^{-(C)} = 0$; dies widerspricht aber der Tatsache, dass R_2 ein Kontinuum ist.

Da R_2 in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten ist, so müssen alle Punkte von R_1 in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten sein. Denn wir können eine einfach geschlossene Jordan Kurve L auf $\mathfrak{R}_i$ derart ziehen, dass R_1 in einem durch L begrenzten Gebiete $\mathfrak{F}_1$ und R_2 in dem anderen durch L begrenzten Gebiete $\mathfrak{F}_2$ enthalten ist. $S_{z_0}^{+(C)}$ ist aber ein Kontinuum, und daher kann $S_{z_0}^{+(C)}$ keine Punkte von R_1 enthalten. Da sowohl $S_{z_0}^{+(C)}$ als auch $S_{z_0}^{-(C)}$ ein Kontinuum ist, so ist $S_{z_0}^{+(C)}$ in $\mathfrak{F}_2$ und $S_{z_0}^{-(C)}$ in $\mathfrak{F}_1$ enthalten. Damit haben $S_{z_0}^{+(C)}$ und $S_{z_0}^{-(C)}$ keine Punkte gemeinsam.

Angenommen nun, dass d ein auf $\mathfrak{R}_i$ liegender Ausnahmewert von

$f(z)$ ist. Es gibt dann nach dem Noshiroschen Satze einen Einschnitt P auf D derart, dass P einen Punkt e von D mit z_0 verbindet und $\lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\in P}} f(z) = d$ ist.

Wir verbinden den Punkt e auf P mit einem Punkte a auf C durch einen einfachen Bogen Q derart, dass $Q-e-a$ in $D-P$ enthalten ist. Die Kurve C wird durch die beiden Punkte z_0 und a in die beiden einfachen Bögen C_1 und C_2 zerlegt, und es gilt $C_1 \cap C_2 = z_0 + a$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Punkte auf C_1 von dem Punkte z_0 aus zu dem Punkte a im positiven Sinne laufen. Das durch die beiden einfachcn Bögen C_1 und $P+Q$ begrenzten Teilgebiet von D bezeichnen wir mit D_1. Die Funktion $f(z)$ ist dann meromorph auf D_1.

Wir definieren $S_{z_0}^{(D_1)}$, $S_{z_0}^{+(C_1+P+Q)}$ und $S_{z_0}^{-(C_1+P+Q)}$, so gilt es $S_{z_0}^{+(C_1+P+Q)} = S_{z_0}^{+(C)}$. Es ist leicht einzusehen, dass $S_{z_0}^{-(C_1+P+Q)}$ aus einem einzigen Punkt d besteht und $S_{z_0}^{(D_1)} \subset S_{z_0}^{(D)}$ ist.

Da $S_{z_0}^{(D)}$ eine beschränkte Menge ist, so ist eine einzige Komponente von der Komplementärmenge von $S_{z_0}^{(D)}$ nicht beschränkt. Diese Komponente bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$. Die Begrenzung T von $\mathfrak{P}$ ist dann ein Kontinuum, da $\mathfrak{P}$ als eine Komponente von der Komplementärmenge von dem Kontinuums $S_{z_0}^{(D)}$ einfach-zusammenhängend ist.

T ist dann in der Begrenzung von $S_{z_0}^{(D)}$ enthalten. Die Begrenzung von $S_{z_0}^{(D)}$ ist aber nach dem Beurling-Kunuguischen Satze in $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten. Damit ist T in $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten.

T kann aber nicht in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten sein. Wir ziehen in der Tat eine einfach geschlossene Jordan Kurve L auf $\mathfrak{R}_i$ derart, dass R_1 in einem durch L begrenzten Gebiete $\mathfrak{F}_1$ und R_2 in dem anderen durch L begrenzten Gebiete $\mathfrak{F}_2$ enthalten ist. $S_{z_0}^{-(C)}$ ist aber ein Kontinuum, und daher sind keine Punkte von $S_{z_0}^{-(C)}$ in $\mathfrak{F}_2$ enthalten.

$\mathfrak{F}_1$ ist dann nicht beschränkt. Angenommen in der Tat, dass $\mathfrak{F}_1$ beschränkt ist. So muss $\mathfrak{F}_2$ nicht beschränkt sein. Da $\mathfrak{G}_1^2$ nicht beschränkt ist, so muss mindestens ein Punkt p von $\mathfrak{G}_1^2$, der nicht in $\mathfrak{R}_i$ enthalten ist, in $\mathfrak{F}_2$ enthalten sein. $\mathfrak{R}_i$ ist aber in $\mathfrak{G}_1^2$ enthalten. Folglich können wir den Punkt p mit einem Punkte q auf L durch einen einfachen Bogen L' anf $\mathfrak{G}_1^2$ verbinden. Es gibt dann auf L' einen bestimmten Punkt q_1, so dass, wenn wir den die beiden Punkte p und q_1 als Endpunkte besitzenden Teilbogen von L' mit L_1 bezeichnen, alle Punkte auf L_1-q_1 nicht auf L liegen und der Punkt q_1 selbst auf L liegt. L_1-q_1 ist dann in $\mathfrak{F}_2$ enthalten und L_1 enthält keine Punkte von R_1. Da R_2 ist in der Komplementärmenge von $\mathfrak{G}_1^2$ enthalten, so enthält[1] L_1 keine Punkte von R. Dies widerspricht aber der Tatsache, dass $\mathfrak{K}_i$ ein Gebiet ist. Also ist $\mathfrak{F}_1$ nicht beschränkt. Folglich ist $\mathfrak{F}_2$ beschränkt.

Da $\mathfrak{P}$ nicht beschränkt ist, so ist $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{F}_1$ enthalten. Damit ist die Begrenzung von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{F}_1$ enthalten. Da $\mathfrak{F}_1$ keine Punkte von $S_{z_0}^{+(C)}$ enthält, so ist T in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten.

$(\mathfrak{K}_i-d)+S_{z_0}^{-(C)}+\mathfrak{P}$ bildet eine zusammenhängende Menge und hat mit $S_{z_0}^{+(C)}+d=S_{z_0}^{(C_1+P+Q)}$ keine Punkte gemeinsam. $S_{z_0}^{(D_1)}$ bildet ein Kontinuum und enthält $S_{z_0}^{(C_1+P+Q)}$, und die Begrenzung von $S_{z_0}^{(D_1)}$ ist in $S_{z_0}^{(C_1+P+Q)}$ enthalten. Folglich[2] muss $(\mathfrak{K}_i-d)+S_{z_0}^{-(C)}+\mathfrak{P}$ in $S_{z_0}^{(D_1)}$ enthalten sein. Dies ist aber unmöglich, da $S_{z_0}^{(D)}$ eine beschränkte Menge ist und $S_{z_0}^{(D_1)}$ in $S_{z_0}^{(D)}$ enthalten ist. Also gelangen wir unter der Annahme, dass es in $\mathfrak{K}_i$ einen Ausnahmewert von $f(z)$ gibt, zu einem Widerspruch. Folglich gibt es keine Ausnahmewerte in $\mathfrak{K}_i$, wenn $R\frown S_{z_0}^{+(C)}$ und $R\frown S_{z_0}^{-(C)}$ keine Punkte gemein haben. W. z. b. w.

Zusatz I. *Es sei $\mathfrak{K}_i$ eine Komponente von $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C)}$. Wenn $\mathfrak{K}_i$ nicht einfach-zusammenhängend ist, so ist $\mathfrak{K}_i$ sicherlich zweifach-zusammenhängend. $S_{z_0}^{(D)}$ mag hierbei mit der vollen Ebene übereinstimmen oder nicht.*

Beweis. Der Beweis ist bereits im Beweise des Satzes I gezeigt. Wir bezeichnen die Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ mit R_i. Angenommen, dass $\mathfrak{K}_i$ weder einfach-zusammenhängend noch zweifach-zusammenhängend ist. R besteht dann aus mindestens drei Komponenten R_1, R_2 und R_3. Wir ziehen eine einfach geschlossene Jordan Kurve L auf $\mathfrak{K}_i$ derart, dass ein durch L begrenztes Gebiet die Menge R_1 enthält und das andere durch L begrenztes Gebiet die Menge R_2 enthält. Wenn ein Punkt von R_1 in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten ist, so müssen alle Punkte von R_2 in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten sein, da $S_{z_0}^{+(C)}$ ein Kontinuum ist. Folglich müssen alle Punkte von R_1 in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten sein.

Auf ganz analoge Weise, wenn R_1 in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten ist, so müssen R_3 in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten sein. Anderseits, daraus, dass R_2 in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten ist, müssen R_3 in $S_{z_0}^{+(C)}$ enthalten sein; dies ist aber offenbar ein Widerspruch. W. z. b. w.

Zusatz II. *Es sei $\mathfrak{K}_i$ eine Komponente von $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C)}$. Wenn $S_{z_0}^{(D)}$ nicht mit der vollen Ebene übereinstimmt, und wenn $\mathfrak{K}_i$ zweifach-zusammenhängend ist, so gibt es in $\mathfrak{K}_i$ keine Ausnahmewerte von $f(z)$.*

Beweis. Wir bezeichnen die Komponenten von der Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ mit R_1 und R_2. Eines von den beiden R_1 und R_2, etwa R_1, ist in $S_{z_0}^{+(C)}$ und das andere R_2 ist in $S_{z_0}^{-(C)}$ enthalten. Daher gibt es nach dem Satze I

1) R besteht aus R_1 und R_2. Vgl. Zusatz I.

2) Nach dem Iversen- Lindelöfschen Satze enthält $S_{z_0}^{(D_1)}$ eine Umgebung von d.

in $\mathfrak{K}_i$ keine Ausnahmewerte von $f(z)$. W. z. b. w.

Bemerkung. $f_1(z)$ sei eine auf einem Gebiet D_1 definierte meromorphe Funktion, und D_1 sei einfach-zusammenhängend. Es gilt dann der analoge Satz mit dem obigen, wenn wir die Häufungsmenge für Primenden im Carathéodoryschen Sinne behandeln.

Satz II. *Wenn $f(z)$ in einer geeigneten Umgebung $U(z_0)$ von z_0 auf C nicht die zu $S_{z_0}^{(C)}$ gehörigen Werte annimmt und die Ableitung $f'(z)$ in $U(z_0)$ keine Null Stellen hat, und wenn $S_{z'}^{(D)}(z'\neq z_0,\ z'\in U(z_0)\frown C)$ in $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten ist und die Vereinigungsmenge $\sum_{i=1}^{n} S_{z_i}^{(C)}$ für jede endlichen Anzahl der Punkte $z_1, z_2, \cdots, z_n (z_j\neq z_0)$ auf $U(z_0)\frown C$ nicht mit $S_{z_0}^{(C)}$ übereinstimmt, und wenn $R\frown S_{z_0}^{+(C)}$ und $R\frown S_{z_0}^{-(C)}$ die gemeinsamen Punkte enthalten, so gibt es in $\mathfrak{K}_i$ die Ausnahmewerte von $f(z)$, wo $\mathfrak{K}_i$ die Komponente von $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C)}$ und R die Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ bedeutet.*

Beweis. Wir ziehen einen Kreis K mit dem Mittelpunkt z_0 derart, dass K in $U(z_0)$ liegt. Unter den Komponenten von dem Durchschnitte (das Innere von $K)\frown D$ gibt es eine bestimmte Komponente, die als Grenzpunkte den Punkt z_0 enthält. Diese Komponente bezeichnen wir mit E.

Die Begrenzung von E besteht aus einem Teilbogen von K, den wir mit K_1 bezeichnen, und einem Teilbogen von C, den wir mit C' bezeichnen. Der Bogen C' wird durch den Punkt z_0 in die beiden Teilbögen C_1 und C_2 zerlegt, und es gilt $C_1\frown C_2=z_0$. Den Durchschnitt $K_1\frown C_1$ bezw. $K_1\frown C_2$ bezeichnen wir mit a_1 bezw. a_2. Nach der Voraussetzung des Satzes stimmt sowohl $\limsup\limits_{\substack{z\to a_2\\ z\in K_1^2}} f(z)$ als auch $\limsup\limits_{\substack{z\to a_1\\ z\in K_1^1}} f(z)$[3] nicht mit $S_{z_0}^{(C)}$ überein.

Anderseits stimmt R mit $S_{z_0}^{(C)}$ überein. Denn, wenn $S_{z_0}^{(C)}$ einen nicht zu R gehörigen Punkt p enthält, so ist p nicht in $\mathfrak{K}_i$ enthalten. Es gibt daher eine Umgebung $U(p)$ von p, derart dass $U(p)$ nicht mit der abgeschlossenen Hülle $\overline{\mathfrak{K}}_i$ keine Punkte gemein hat. Das Bild von E durch $f(z)$ bezeichnen wir mit $f(E)$, so enthält $f(E)$ mindestens einen Punkt von $U(p)$. $f(E)$ enthält auch mindestens einen zu $\mathfrak{K}_i$ gehörigen Punkt, und $f(E)$ ist eine zusammenhängende Menge. Folglich muss $f(E)$ einen zu R gehörigen Punkt enthalten. Dies ist aber unmöglich, da $f(z)$ nicht die zu $S_{z_0}^{(C)}$ gehörigen Werte annimmt in $U(z_0)$. Damit stimmt R mit $S_{z_0}^{(C)}$ überein. Ebenfalls können wir beweisen, dass $S_{z_0}^{(D)}-S_{z_0}^{(C)}$ aus einem einzigen Gebiete $\mathfrak{K}_i$ besteht.

Es gibt aber in $\mathfrak{K}_i$ höchstens einen einzigen asymptotischen Wert von

---

3) $\limsup\limits_{\substack{z\to a_1\\ z\in K_1^1}} f(z)$ ist die Vereinigungsmenge der Mengen aller Häufungspunkte der Punktfolge $\{f(z_n)\}$, wo z_n in K_1 enthalten ist und $\{z_n\}$ gegen a_1 strebt.

$f(z)$ am Punkte z_0. Denn, wenn es die beiden asymptotischen Werte von $f(z)$ am Punkte z_0 gibt, so nimmt nach dem Iversen-Lindelöfschen Satze die Funktion $f(z)$ in der Menge $U(z_0)\frown D$ alle Werte ausser höchstens zwei Werten von der vollen Ebene an.

Anderseits ist $S_{z_0}^{(C)}$ ein mindestens zwei Punkte enthaltendes Kontinuum daraus, dass $S_{z'}^{(P)}(z'\neq z_0, z'\in U(z_0)\frown C)$ in $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten ist und nicht mit $S_{z_0}^{(C)}$ übereinstimmt. Die Funktion $f(z)$ nimmt nicht die zu $S_{z_0}^{(C)}$ gehörigen Werte an in $U(z_0)$. Daher gibt es höchstens einen einzigen asymptotischen Wert von $f(z)$ am Punkte z_0

Durch $f(K_1)$ wird $\mathfrak{R}_i$ in die höchstens abzählbar vielen Gebiete $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_n, \cdots$ zerlegt. Da R mit $S_{z_0}^{(C)}$ übereinstimmt, stimmt $\limsup\limits_{\substack{z\to a_1\\ z\in K_1^1}} f(z)+\limsup\limits_{\substack{z\to a_2\\ z\in K_1^2}} f(z)$ nicht mit R überein. Somit gibt es einen Punkt d auf R, so dass d auf der Begrenzung von einem unter $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \cdots, \mathfrak{H}_n, \cdots$ etwa von $\mathfrak{H}_1$, liegt und erreichbar von $\mathfrak{H}_1$ aus ist.

Wir ziehen einen Einschnitt L von $\mathfrak{H}_1$, der einen d_1 von $\mathfrak{H}_1$ mit d verbindet und mit $f(K_1)$ keine Punkte gemein hat. Wenn es in $\mathfrak{H}_1$ einen asymptotischen Wert von $f(z)$ am Punkte z_0 gibt, wählen wir als d_1 den asymptotischen Wert von $f(z)$.

Da sowohl $S_{z_0}^{+(C)}$ als auch $S_{z_0}^{-(C)}$ ein Kontinuum ist und $S_{z_0}^{+(C)}$ und $S_{z_0}^{-(C)}$ die gemeinsamen Punkte haben, so ist die Vereinigungsmenge $S_{z_0}^{+(C)}+S_{z_0}^{-(C)}$ $=S_{z_0}^{(C)}$ ein Kontinuum. Die Begrenzung R von $\mathfrak{R}_i$ stimmt mit $S_{z_0}^{(C)}$ überein. Somit ist $\mathfrak{R}_i$ einfach-zusammenhängend. Da $S_{z'}^{(P)}(z'\neq z_0, z'\in U(z_0)\frown C)$ nicht mit $S_{z_0}^{(C)}$ übereinstimmt, so kann R nicht aus einem einzigen Punkt bestehen. Es gibt daher eine topologische Abbildung T von dem Inneren des Kreises $|\zeta|=1$ auf $\mathfrak{R}_i$ derart, dass $T^{-1}(L)$ ein Radius $\zeta=x, 0\leqq x<1$ von $|\zeta|<1$ ist, wo $\zeta=x+iy$ ist.

Wir nehmen nun an, dass es in $\mathfrak{R}_i$ keine Ausnahmewerte von $f(z)$ gibt. Wir wählen einen Punkt t von der Art, dass $f(t)=d_1$ und t in E enthalten ist, und wir bezeichnen das umgekehrte Element von $f(z)$ mit $\mathfrak{P}(w, T(0))$, wo $T(0)=d_1$ den Elementmittelpunkt bedeutet. Wir setzen $\mathfrak{P}(w, T(0))$ analytisch längs L fort, so gibt es auf L nicht einen singulären Punkt. Ist in der Tat $T(x_0)(0<x_0<1)$ ein singulärer Punkt auf L, so dass der Prozess der analytischen Fortsetzung längs der Teilbogen $T(x, 0\leqq x\leqq x_1)$ $(x_1<x_0)$ sich ausführen lässt und dies aber von $T(x_0)$ ab aufhört. Wir bezeichnen dasjenige Element mit dem Mittelpunkt $T(x)$, welches durch analytische Fortsetzung längs L aus Anfangselement $\mathfrak{P}(w, T(0))$ entsteht, mit $\mathfrak{P}(w, T(x))$. Das Bild N von $T(x, 0\leqq x<x_0)$ durch $\mathfrak{P}(w, T(x))$ kann mit K_1 keine Punkte gemein haben, da $f(K_1)$ und L keine Punkte gemein haben.

$\limsup_{x\to x_0} N$ kann mit $C'-z_0$ keine Punkte gemein haben. Denn, wenn $\limsup_{x\to x_0} N$ einen Punkt z_1 von $C'-z_0$ enthält, so muss $S_{z_1}^{(D)}$ den Punkt $T(x_0)$ enthalten; dies ist aber unmöglich, da $S_{z_1}^{(D)}$ nach der Annahme in $S_{z_0}^{(C)}$ cnthalten ist.

$\limsup_{x\to x_0} N$ bildet ein Kontinuum. Folglich, wenn $\limsup_{x\to x_0} N$ nicht aus einem einzigen Punkt besteht, so gibt es in dem Durchschnitt $E \cap \limsup_{x\to x_0} N$ keinen isolierten Punkt $f(z)$ muss dann gleich der Konstante sein in D; dies ist aber unmöglich. Daher besteht $\limsup_{x\to x_0} N$ aus einem einzigen Punkt.

Wenn $\limsup_{x\to x_0} N$ mit z_0 übereinstimmt, so ist $T(x_0)$ ein asymptotischer Wert von $f(z)$ und N ist ein asymptotischer Weg; dies ist aber offenbar unmöglich, da es in $\mathfrak{R}_i$ höchstens einen einzigen asymptotischen Wert von $f(z)$ am Punkte z_0 gibt. Es gibt daher auf L keine singulären Punkte.

Wir bezeichnen das Bild von L durch $\mathfrak{P}(w, T(x))$ mit N. Auf ganz analoge Weise mit der obigen können wir beweisen, dass $\limsup_{x\to 1} N$ ein Kontinuum ist und in C' enthalten ist. Daher bildet N einen allgemeinen[4] Einschnitt von D.

Wir setzen $\mathfrak{P}(w, T(x))$ längs der Kurve $T(|\zeta|=r, 0<r<1)$ im positiven Sinne fort bis zu singulären Punkten, bedingt dass das Bild von $T(|\zeta|=r)$ durch $\mathfrak{P}(w)$ in D enthalten ist Wir bezeichnen das Bild von $T(|\zeta|=r)$ durch die analytischen Elemente $\mathfrak{P}(w)$ mit $N(r)$.

Wir wollen nun beweisen, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$[5] ein Kontinuum ist und mindestens einen Punkt von den beiden a_1 und a_2 enthält. Angenommen in der Tat, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$ nicht ein Kontinuum ist, so kann $\limsup_{r\to 1} N(r)$ in die beiden zueinander punktfremden abgeschlossenen Mengen M_1 und M_2 zerlegt werden.

Wir ziehen eine einfach geschlossene Jordan Kurve F auf der z Ebene, so dass die Kurve F mit M_1+M_2 keine Punkte gemein hat und sowohl ein G_1 von den beiden durch F bestimmten Gebieten als auch das andere G_2 die Punkte von M_1+M_2 enthält. Wir bezeichnen den Durchschnitt $G_1\cap(M_1+M_2)$ bezw. $G_2\cap(M_1+M_2)$ mit M'_1 bezw. M'_2. Da $\limsup_{x\to 1} N$ ein Kontinuum und in $\limsup_{r\to 1} N(r)$ enthalten ist, so muss $\limsup_{x\to 1} N$ in einer einzigen von den beiden Mengen M'_1 und M'_2, etwa in M'_1, enthalten sein.

Es gibt dann eine Folge $\{N(r_n)\}$, wo $0<r_n<1$ ist und die Folge $\{r_n\}$

---

4) K. Koseki. Über die Begrenzung eines besonderen Gebietes II. Jap. Journ. Math. XIX (1948)

5) $\limsup_{r\to 1} N(r)$ ist die Vereinigungsmenge der Mengen aller Häufungspunkte der Punktfolge $\{a_n\}$, wo a_n in $N(r_n)$ enthalten ist und $\{r_n\}$ gegen 1 strebt.

gegen 1 konvergiert, und die Punktfolge $\{b_n\}$, derart dass der Punkt b_n auf $N(r_n)$ liegt und $\{b_n\}$ gegen einen Punkt p auf M'_2 konvergiert. Abgesehen von höchstens endlicher Anzahl müssen alle Mengen $N(r_n)$ in G_2 enthalten sein. Denn andernfalls würde unendlich Anzahl von $\{N(r_n)\}$ mit der Kurve F die gemeinsamen Punkte haben. Das ist aber unmöglich, da $\limsup_{r\to 1} N(r)$ und F zueinander punktfremd sind.

Anderseits enthält $N(r_n)$ einen auf N liegenden Punkt. Daher muss die Menge M'_2 die Punkte von $\limsup_{x\to 1} N$ enthalten; dies ist aber unmöglich, da $\limsup_{x\to 1} N$ nach der Annahme in M_1' enthalten ist. Also gelangen wir unter der Annahme, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$ nicht ein Kontinuum ist, zu einem Widerspruch. Damit ist $\limsup_{r\to 1} N(r)$ ein Kontinuum.

$\operatorname{Limsup}_{r\to 1} N(r)$ hat mit K_1 die gemeinsamen Punkte. Wenn es in der Tat auf $T(|\zeta|=r)$ einen singulären Punkt gibt, so muss $N(r)$ die Punkte von K_1 enthalten, da $S_{z'}^{(D)}(z'\neq z_0,\ z'\in U(z_0)\cap C)$ in $S_{z_0}^{(C)}$ enthalten ist.

Angenommen zweitens, dass es auf $T(|\zeta|=r)$ keine singulären Punkte gibt. Es gibt dann eine positive Zahl δ_1, so dass es auf $T(|\zeta|=r',\ r-\delta_1< r'<r+\delta_1)$ keine singulären Punkte gibt. Wenn $\limsup_{r\to 1} N(r)$ mit K_1 keine Punkte gemein hat, so gibt es eine positive Zahl η, derart dass es auf $T(|\zeta|=r,\ \eta<r<1)$ keine singulären Punkte gibt und $N(r)$ mit K_1 keine Punkte gemein hat. Wir bezeichnen die untere Grenze von allen Zahlen η mit η_1 derart, dass es auf $T(|\zeta|=r,\ \eta<r<1)$ keine singulären Punkte gibt und $N(r)$ mit K_1 keine Punkte gemein hat.

Wir nehmen erstens an, dass $\eta_1>0$ ist. Wenn es auf $T(|\zeta|=\eta_1)$ keine singulären Punkte gibt, so muss $N(\eta_1)$ mit K_1 die gemeinsamen Punkte haben. Wenn das Bild von $T(\zeta=\eta_1 e^{i\theta})$ auf K_1 liegt, so kann $\theta=2\pi$ nicht sein. Daher gibt es eine Zahl $\theta_1(\theta_1<2\pi)$, so dass das Bild von $T(\zeta=\eta_1 e^{i\theta_1})$ durch $\mathfrak{P}(w)$ auf $D-\overline{E}$ liegt. Wir können dann eine Zahl $\delta>0$ derart wählen, dass das Bild von $T(\zeta=\mu e^{i\theta_1},\ \eta_1-\delta<\mu<\eta_1+\delta)$ durch $\mathfrak{P}(w)$ auf $D-\overline{E}$ liegt. Dies widerspricht aber der Eigenschaft von η_1.

Wenn es auf $T(|\zeta|=\eta_1)$ die singulären Punkte gibt, so gibt es eine Zahl θ_1, derart dass das Bild von $T(\zeta=\eta_1 e^{i\theta_1})$ auf $D-\overline{E}$ liegt und es auf $T(\zeta=\eta_1 e^{i\theta},\ 0\leqq\theta\leqq\theta_1)$ keine singulären Punkte gibt. Wir können dann eine positive Zahl $\delta>0$ derart wählen, dass das Bild von $T(\zeta=\mu e^{i\theta_1},\ \eta_1-\delta<\mu< \eta_1+\delta)$ in $D-\overline{E}$ enthalten ist; dies ist aber unmöglich.

Wir nehmen zweitens an, dass $\eta_1=0$ ist. Für geeignete $\delta>0$ ist das Bild von $T(\zeta=\eta e^{2\pi i},\ 0<\eta<\delta)$ durch $\mathfrak{P}(w)$ mit dem Bild von $T(\zeta=\eta e^{0i})$ identisch. Wenn das Bild von $T(\zeta=\mu e^{2\pi i})$ mit dem Bild von $T(\zeta=\mu e^{0i})$ nicht übereinstimmt, so können wir eine Zahl $\delta>0$ so wählen, dass das

Bild von $T(\zeta=\nu e^{2\pi i}, \mu-\delta<\nu<\mu+\delta)$ mit dem Bild von $T(\zeta=\nu e^{0i})$ nicht übereinstimmt. Ebenfalls, wenn das Bild von $T(\zeta=\mu e^{2\pi i})$ mit dem Bild von $T(\zeta=\mu e^{0i})$ übereinstimmt, so können wir eine $\delta>0$ derart wählen, dass das Bild von $T(\zeta=\nu e^{2\pi i}, \mu-\delta<\nu<\mu+\delta)$ mit dem Bild von $T(\zeta=\nu e^{0i})$ übereinstimmt. Daher, wenn $\gamma_1=0$ ist, stimmt das Bild von $T(\zeta=\mu e^{2\pi i}, 0<\mu<1)$ mit dem Bild von $T(\zeta=\mu e^{0i})$ überein. Folglich ist $\mathfrak{K}_l$ durch alle analytischen Elemente $\mathfrak{P}(w)$ ein und eindeutig in D abgebildet. Die Begrezung von dem Bild von $\mathfrak{K}_l$ durch $\mathfrak{P}(w)$ ist offenbar in $\limsup_{r\to 1} N(r)$ enthalten.

$\limsup_{r\to 1} N(r)$ kann nicht die Punkte von E enthalten. Angenommen in der Tat, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$ einen in E enthaltenen Punkt p enthält Es gibt dann eine Folge $\{r_n\}$ und eine Punktfolge $\{p_n\}$, so dass $r_1<r_2<\cdots$ ist und die Folge $\{r_n\}$ gegen 1 konvergiert, und dass p_n auf $N(r_n)$ liegt und $\{p_n\}$ gegen p konvergiert und die Folge $\{f(p_n)\}$ konvergent ist. Die Folge $\{f(p_n)\}$ konvergiert dann gegen einen in der Begrenzung von $\mathfrak{K}_l$ enthaltenen Punkt q (möglicherweise ∞). $f(p)$ muss mit q übereinstimmen; dies ist aber nach der Voraussetzung des Satzes unmöglich. Damit kann $\limsup_{r\to 1} N(r)$ nicht die Punkte von E enthalten.

Da $\limsup_{r\to 1} N(r)$ nicht die Punkte von E enthält, so enthält die Begrenzung von dem Bild von $\mathfrak{K}_l$ durch $\mathfrak{P}(w)$ nicht die Punkte von E. Folglich muss das Bild von $\mathfrak{K}_l$ durch $\mathfrak{P}(w)$ das Gebiet E enthalten. Dies ist aber unmöglich. Also kann $\gamma_1=0$ nicht sein.

Also haben wir bewiesen, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$ mit der Menge K_1 die gemeinsamen Punkte hat. Auf ganz analoge Weise wie oben ist es leicht einzusehen, dass $\limsup_{r\to 1} N(r)$ nicht die Punkte von $K_1-(a_1+a_2)$ enthalten kann. Damit ist $\limsup_{r\to 1} N(r)$ ein Kontinuum und hat mit K_1 mindestens einen Punkt gemeinsam und mit $K_1-(a_1+a_2)$ keine Punkte gemeinsam.

Wir wählen eine Zahl $r(0<r<1)$, so dass $N(r)$ mit K_1 die gemeinsamen Punkte hat. Es gibt dann eine Zahl θ, derart dass das Bild von $T(\zeta=re^{i\varphi}, 0\leqq\varphi<\theta)$ durch $\mathfrak{P}(w)$ in E enthalten ist und das Bild von $T(\zeta=re^{i\theta})$ auf K_1 liegt. Wir bezeichnen das Bild von $T(\zeta=re^{i\theta})$ durch $\mathfrak{P}(w)$ mit c und das Bild von $T(\zeta=re^{i0})$ mit g und das Bild von $T(\zeta=re^{i\varphi}, 0\leqq\varphi\leqq\theta)$ mit S. Den Teilbogen von K_1, der als Endpunkte die beiden Punkte c und a_1 hat, bezeichnen wir mit S_1 und den allgemeinen Einschnitt von D, der als ein Endpunkt den Punkt g hat und in N enthalten ist, bezeichnen wir mit S_2. Das durch S_1+S_2+S+ Teilkontinuum von C_1+C_2 begrenzte Teilgebiet von E bezeichnen wir mit E_1. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass für geeignete kleine $\theta(0<\theta<2\pi)$ alle Bilder von $T(\zeta=se^{i\theta}, r<s<1)$ durch $\mathfrak{P}(w)$ in E_1 enthalten ist.

Es sei $t'(\neq t)$ ein Punkt von der Art, dass $f(t')=d_1$ und t' in E enthalten ist, und wir bezeichnen das umgekehrte Elemente von $f(z)$ mit $\mathfrak{P}'(w, T(0))$. Wir setzen $\mathfrak{P}'(w, T(0))$ analytisch längs L fort, und wir bezeichnen analytische Elemente längs L mit $\mathfrak{P}'(w, T(x))$, $(0\leqq x<1)$. Das Bild von L durch $\mathfrak{P}'(w, T(x))$ bezeichnen wir mit N'.

Wir können $\mathfrak{P}'(w)$ ebenso wie $\mathfrak{P}(w)$ konstruieren. Wir bezeichnen das Bild von $T(|\zeta|=r)$ duroh $\mathfrak{P}'(w)$ mit $N'(r)$. Wir wählen eine Zahl $r'(0<r'<1)$, so dass $N(r')$ mit K_1 die gemeinsamen Punkte hat. Es gibt dann eine Zahl θ', derart dass das Bild von $T(\zeta=r'e^{i\varphi}, 0\leqq\varphi<\theta')$ durch $\mathfrak{P}'(w)$ in E enthalten ist und das Bild von $T(\zeta=r'e^{i\theta'})$ auf K_1 liegt. Wir bezeichnen das Bild von $T(\zeta=r'e^{i\theta'})$ durch $\mathfrak{P}'(w)$ mit c' und das Bild von $T(\zeta=r'e^{i0})$ mit g' und das Bild von $T(\zeta=r'e^{i\varphi}, 0\leqq\varphi\leqq\theta')$ mit S'. Den Teilbogen, der als Endpunkte die beiden Punkte c' und a_1 hat, bezeichnen wir mit S'_1 und den allgemeinen Einschnitt von E, der als ein Endpunkt den Punkt g' hat und in N' enthalten ist, bezeichnen wir mit S_2'. Das durch $S_1'+S'_2+S'+$ Teilkontinuum von C_1+C_2 begrenzte Teilgebiet von E bezeichnen wir mit E_1'.

E_1 enthält E_1' oder E_1' enthält E_1, da $f'(z)\neq 0$ in $D\cap U(z_0)$ ist Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass E_1' das Gebiet E_1 enthält.

Es gibt eine Folge $\{r_n\}$, so dass $r_1<r_2<\cdots$ ist und $\{r_n\}$ mit $n\to\infty$ gegen 1 konvergiert, und dass $N'(r_n')$ mit K_1 die gemeinsemen Punkte hat. Es gibt dann eine Zahl θ'_n, so dass das Bild von $T(\zeta=r_n'e^{i\theta'_n})$ durch $\mathfrak{P}'(w)$ auf K_1 liegt und das Bild von $T(\zeta=r_n'e^{i\theta}, 0\leqq\theta<\theta_n')$ durch $\mathfrak{P}'(w)$ in E enthalten ist.

Wir bezeichnen das Bild von $T(\zeta=r_ne^{i\theta}, 0\leqq\theta\leqq\theta_n')$ durch $\mathfrak{P}'(w)$ mit L_n'. L_n' ist dann in $\overline{E}_1'$ enthalten, da bei der Abbildung durch analytische Funktion der Drehsinn des Winkels unverändert bleibt.

L_n' kann nicht mit $S+S_2$ keine Punkte gemein haben Folglich muss L_n' in $E_1'-E_1$ enthalten sein. $\underset{n\to\infty}{Limsup}\ L_n'$ muss dann einen auf K_1 liegenden und in $\overline{E_1'-E_1}$ enthaltenen Punkt a enthalten. Der Punkt a kann dann offenbar weder mit a_1 noch mit a_2 übereinstimmen; dies ist aber unmöglich, da $\underset{n\to\infty}{limsup}\ L'_n$ in $\underset{r\to 1}{limsup}\ N'(r)$ enthalten ist und $\underset{r\to 1}{limsup}\ N'(r)$ mit $K_1-(a_1+a_2)$ keine Punkte gemein hat.

Also gelangen wir unter der Annahme, dass es in $\mathfrak{K}_t$ keine Ausnahmewerte von $f(z)$ gibt, zu einem Widerspruch. Folglich existieren in $\mathfrak{K}_t$ die Ausnahmewerte von $f(z)$. W. z. b. w.

MATEMATISCHES INSTITUT,
UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.

(*Eingegangen am 22, März, 1966*)

ERRATA

IMBEDDINGS OF DOLD MANIFOLDS

(This journal Vol. 12, pp. 71—80)

Takuo FUKUDA

I made an error in the theorem 1 in the paper. I use the same notations as before. The error is in the proof of the theorem, where I attached $D^{m+1}\times PC(n)$ to $\overline{V}$ in the $(k+1)$-space. But this is concerned with the isotopy classes of imbeddings of $S^m\times PC(n)$ into the euclidean spaces, so the theorem is not true in general. In conclusion, I have to abbreviate the theorems 1 and 2, because the theorem 2 is due to the theosem 1. I am much obliged to Dr. J. J. Ucci for his kind advice.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY

(Received June 15, 1967)