NEUER BEWEIS DES HARTOGSSCHEN SATZES

KEN'ITI KOSEKI

In der vorliegenden Arbeit will ich den neuen Beweis des berühmten Hartogsschen Satzes ergeben, indem ich die engen Beziehungen zwischen dem Lebesgueschen Satz und dem Hartogsschen Satz betone.

Satz. *Es sei $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ eine Funktion auf einem Gebiete D in dem $2n$-dimensionalen Euklidischen Raums. Wenn $f(z_1, z_2 \cdots, z_n)$ an einem beliebigen Punkte in D analytisch in bezng auf jeder Veränderliche ist, so ist $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, als Funktion aller Veränderlichen betracntet, stetig in D.*

Beweis. Wir behandeln erstens den Fall, wo die Anzahl der Veränderlichen $=2$ ist. Es sei (a, b) ein Punkt in D, und

$$V: |z_1-a|<R, \quad |z_2-b|<S$$

sei ein in D enthaltenes Gebiet. Wir wählen die beiden Zahlen R_1 und S_1, derart dass $0<R_1<R$ und $0<S_1<S$ ist, und wir bezeichnen den Kreis $|z_1-a|=R_1$ bezw. $|z_2-b|=S_1$ mit K_1 bezw. K_2. Es gilt dann für beliebigen Punkt (z_1, z_2), wo z_1 in dem Inneren von K_1 und z_2 in dem Inneren von K_2 enthalten ist,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{K_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \int_{K_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{K_2} \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \int_{K_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 . \end{aligned} \tag{1}$$

Es sei $\{(a_n, b_n)\}(n=1, 2, \cdots)$ eine gegen (a, b) strebende Folge in D. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass alle a_n in dem Inneren des K_1 und alle b_n in dem Inneren des K_2 enthalten sind.

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $f(z_1, z_2)$ beschränkt in D ist. Nach der Formel (1) ist es

$$f(a_n, b_n) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{K_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1 - a_n} \int_{K_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - b_n} d\zeta_2 .$$

Es ist offenbar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\zeta_1 - a_n} = \frac{1}{\zeta_1 - a} . \tag{2}$$

Da die Funktion $f(z\cdot, z_2)$ beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta_2-b_n}=\frac{1}{\zeta_2-b}$ ist, so gibt es eine positive Zahl M, für die die Ungleichung $\left|\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b_n}\right|<\frac{M}{\frac{S_1}{2}}$ für fast alle n gilt. Daher ist nach dem Lebesgueschen[1] Satz

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b_n}d\zeta_2=\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b}d\zeta_2\ . \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt es

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\zeta_1-a_n}\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b_n}d\zeta_2=\frac{1}{\zeta_1-a}\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b}d\zeta_2.$$

Es ist aber $\left|\frac{1}{\zeta_1-a_n}\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b_n}d\zeta_2\right|<\frac{M}{\frac{R_1}{2}\cdot\frac{S_1}{2}}$ für fast alle n. Folglich ist nach dem Lebesgueschen Satz wiederum

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n, b_n)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int_{K_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-a}\int_{K_2}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2-b}d\zeta_2=f(a, b)\,.$$

Also ist die $f(z_1, z_2)$ stetig am Punkte (a, b).

Wir behandeln nun den Fall, wo die Funktion $f(z_1, z_2)$ nicht beschränkt in D ist. Wenn wir den Wert $z_2=z'_2$ in dem Inneren von K_2 fixieren, so ist $f(z_1, z'_2)$ regulär in $|z_1-a|\leqq R_1$ und damit beschränkt. Wir bezeichnen das Maximum von $|f(z_1, z'_2)|$ in $|z_1-a|\leqq R_1$ mit $M(z'_2)$ und die Menge aller Werte z_2 in dem Inneren von K_2, für die $M(z_2)\leqq i$ ist, mit P_i. Die Menge P_i ist dann offenbar eine abgeschlossene Menge in $|z_2-a|<S_1$ und das Innere von K_2 ist gleich der Vereinigungsmenge $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Das Innere von K_2 gehört aber nach dem Baireschen[2] Satz zu der zweiten Kategorie. Daher gibt es mindestens eine P_i, die nicht nirgendsdicht in der z_2 Ebene ist; d. h. die Menge P_i enthält eine Kreisscheibe.

Wir bekommen also eine im Inneren von K_2 enthaltene Kreisscheibe $|z_2-d|\leqq S'_1$, so dass die $f(z_1, z_2)$ in $|z_1-a|\leqq R_1$ und $|z_2-d|\leqq S'_1$ beschränkt ist. Es gibt also eine positive Konstante M, so dass $|f(z_1, z_2)|\leqq M$ in $|z_1-a|\leqq R_1$ und $|z_2-d|\leqq S'_1$ ist.

---

1) Vgl. S. Saks. Theory of the integral. 1937. S. 29.

2) S. Saks. a. a. O. S. 54.

Nun gibt es einen Kreis $|z_2-d|=T$, derart dass das Innere von $|z_2-d|=T$ in dem Inneren von K_2 enthalten ist und für jede Zahl U grösser als T das Innere von $|z_2-d|=U$ keineswegs in dem Inneren von K_2 enthalten ist. Für jeden festen Wert z_1 in dem Inneren von K_1 lässt sich die Funktion $f(z_1, z_2)$ in die Taylorsche Reihe folgendermassen entwickeln.

$$f(z_1, z_2)=\sum_0^\infty f_n(z_1)(z_2-d)^n \ . \tag{4}$$

Diese Reihe konvergiert mindestens in $|z_2-d|\leqq T$. Da die Koeffizient $f_n(z_1)$ gleich der $\frac{1}{n!}\frac{d^n f(z_1, z_2)}{dz_2^n}{}_{z_2=d}$ ist, ist es

$$f_n(z_1)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{|\zeta_2-d|=T}\frac{d\zeta_2}{(\zeta_2-d)^{n+1}}\int\limits_{|\zeta_1-a|=R_1}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1 \ . \tag{5}$$

Die $f_n(z_1)$ lässt sich auch folgendermassen beschreiben

$$f_n(z_1)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2\int\limits_{|\zeta_2-d|=S'_1}\frac{d\zeta_2}{(\zeta_2-d)^{n+1}}\int\limits_{|\zeta_1-a|=R_1}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1 \ .$$

Die Funktion $f_n(z_1)$ ist daher nach dem Lebesgueschen Satz regulär in $|z_1-a|<R_1$. Es ist ferner $|f_n(z_1)|\leqq\frac{R_1}{R_1-|z_1-a|}\cdot\frac{M}{(S'_1)^n}$. Wenn eine positive Zahl R'_1 kleiner als R_1 ist, so konvergiert die Reihe (4) gleichmässig in bezug auf z_2 auf jede abgeschlossenen Menge in der Kreisscheibe $|z_2-d|<S'_1$ und z_1 in $|z_1-a|\leqq R'_1$.

Folglich, für beliebige positive Zahl S''_1, die kleiner als S'_1 ist, gibt es die von z_1 unabhängige Nummer N, so dass für jeden Wert z_1 in $|z_1-a|\leqq R_1'$ die Ungleichung

$$|f_n(z_1)|<\frac{1}{(S_1'')^n} \qquad \text{für} \qquad n>N \tag{6}$$

besteht.

Es sei T' eine beliebbige Zahl, die kleiner als T ist. Für jeden Wert z_1 in $|z_1-a|\leqq R'_1$ gibt es die Nummer N_{z_1}, so dass die Ungleichung

$$|f_n(z_1)|<\frac{1}{(T')^n} \ \text{für} \ n>N_{z_1} \tag{7}$$

besteht. Die Nummer mag hierbei von dem Wert z_1 abhängig sein.

Wir nehmen nun an, dass alle $f_n(z_1)(n=1, 2, \cdots)$ keine Null-Stellen in

$|z_1-a|<R'_1$ haben. Wir setzen $\sqrt[n]{f_n(z_1)}=g_n(z_1)$, so ist die Funktion $g_n(z_1)$ regulär in $|z_1-a|<R'_1$. Aus (6) folgt es ohne weiteres

$$|g_n(z_1)|<\frac{1}{S''_1} \qquad \text{für } n>N \text{ und jeden } z_1 \text{ in } |z_1-a|\leqq R'_1.$$

Die Folge $\{g_n(z_1)\}$ ist also gleichmässig beschränkt in $|z_1-a|\leqq R'_1$ und damit äquistetig in $|z_1-a|\leqq R''_1(<R'_1)$, wo R''_1 eine beliebig nahe an R'_1 positive Zahl bedeutet. Folglich gibt es für gegebene positive Zahl ε eine positive Zahl δ, die von z_1 in $|z_1-a|\leqq R''_1$ und von n unabhängig ist, so dass die Ungleichung

$$|g_n(z_1)-g_n(z'_1)|<\varepsilon \text{ für alle } z_1 \text{ und } z'_1,$$
$$|z_1-z_1'|<\delta,\ |z_1-a|\leqq R''_1,\ |z'_1-a|\leqq R''_1, \text{ und alle } n$$

besteht. Daraus und aus (7) folgt es ohne weiteres

$$|\sqrt[n]{f_n(z'_1)}|<\frac{1}{T'}+\varepsilon \qquad \text{für alle } z'_1,\ |z_1-z'_1|<\delta, \text{ und } n>N_{z_1}. \tag{8}$$

Nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatze gibt es in dem $|z_1-a|\leqq R''_1$ eine endliche Anzahl von Werten $c_1, c_2, \cdots, c_p$, so dass die Vereinigungsmenge der δ-Umgebungen von den Werten $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_p$ die abgeschlossene Kreisscheibe $|z_1-a|\leqq R''_1$ überdeckt. Wir bezeichnen nun das Maximum von $N_{c_1}, N_{c_2}, \cdots\cdots, N_{c_p}$ mit Q, so gilt nach (8) die Ungleichung

$$|\sqrt[n]{f_n(z_1)}|<\frac{1}{T'}+\varepsilon \qquad \text{für alle } z_1 \text{ in } |z_1-a|\leqq R''_1 \text{ und } n>Q.$$

Daraus folgt es ohne weiteres

$$|f_n(z_1)|<\left(\frac{1}{T'}+\varepsilon\right)^n \qquad \text{für alle } z_1 \text{ in } |z_1-a|\leqq R''_1 \text{ und } n>Q.$$

Wenn eine positive Zahl T'' gegeben ist, die beliebig nah an T und kleiner als T ist, so können wir die Zahlen T' und ε derart wählen, dass

$$\left(\frac{1}{T'}+\varepsilon\right)T''<1$$

ist. Folglich konvergiert die Reihe (4) gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-a|\leqq R''_1$ und z_2 in $|z_2-d|\leqq T''$.

Wir nehmen zweitens an, dass eine $f_n(z_1)$ die Null-Stellen in $|z_1-a|<R'_1$ hat. Da die Funktion $f_n(z_1)$ regulär in $|z_1-a|<R_1(>R'_1)$ ist, ist die Anzahl der in der offenen Kreisscheibe $|z_1-a|<R'_1$ enthaltenen Null-Stellen von $f_n(z_1)$ endlich, wenn $f_n(z_1)\not\equiv 0$ ist. Diese Null-Stellen bezei-

chnen wir mit $a_1, a_2, \cdots\cdots a_p$, und wir setzen[3)]

$$f_n(z_1)\frac{R'^2_1-(z_1-a)(\bar{a}_1-\bar{a})}{R'_1(z_1-a_1)}\cdot\frac{R'^2_1-(z_1-a)(\bar{a}_2-\bar{a})}{R'_1(z_1-a_2)}\cdots$$

$$\cdot\ \frac{R'^2_1-(z_1-a)(\bar{a}_p-\bar{a})}{R'_1(z_1-a_p)}=h_n(z_1). \tag{9}$$

Die Funktion $h_n(z_1)$ ist dann offenbar regulär in $|z_1-a|\leqq R'_1$ und hat keine Null-Stellen in $|z_1-a|<R'_1$. Daher, wenn wir $\sqrt[n]{h_n(z_1)}=g_n(z_1)$ setzen, so ist die Funktion $g_n(z_1)$ regulär in $|z_1-a|<R'_1$ und stetig in $|z_1-a|\leqq R'_1$. Es gilt also für jeden Wert z_1 in $|z_1-a|<R'_1$

$$g_n(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta_1-a|=R'_1}\frac{g_n(\zeta_1)}{\zeta_1-z_1}d\zeta_1.$$

Daraus folgt es ohne weiteres

$$|g_n(z_1)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|g_n(\zeta_1)|}{|\zeta_1-z_1|}\cdot R'_1 d\vartheta. \tag{10}$$

Anderseits besteht es auf dem Kreise $|z_1-a|=R'_1$

$$|f_n(z_1)|=|h_n(z_1)|.$$

Nach dem Lebesgueschen[4)] Satze und (6) bekommen wir aus (10)

$$\limsup_{n\to\infty}|g_n(z_1)|\leqq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\limsup|g_n(\zeta_1)|}{R'_1-|z_1-a|}\cdot R'_1 d\vartheta$$

$$\leqq\frac{1}{T'}\,\frac{R'_1}{R'_1-|z_1-a|}\ .$$

Wenn wir eine positive Zahl δ genug klein wählen und den Wert z_1 in $|z_1-a|\leqq\delta$ fixieren, ist es

$$\frac{1}{T'}\cdot\frac{R'_1}{R'_1-|z_1-a|}<\frac{1}{T'}+\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Folglich besteht die Ungleichung

$$|g_n(z_1)|<\frac{1}{T'}+\varepsilon \qquad \text{für } n>N_{z_1} \text{ und } z_1 \text{ in } |z_1-a|\leqq\delta\ .$$

Es ist aber $|f_n(z_1)|=|h_n(z_1)|$ auf $|z_1-a|=R'_1$. Folglich ist die Folge $\{g_n(z_1)\}$ äquistetig in $|z_1-a|\leqq R''_1(<R'_1)$. Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty}|h_n(z_1)|\,|z_2-d|^n$ gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-a|\leqq\frac{\delta}{2}$ und z_2 in $|z_2-d|\leqq T''$.

---

3) Wenn $f_n(z_1)$ keine Null-Stellen in $|z_1-a|<R'_1$ hat, so setzen wir $f_n(z_1)=h_n(z_1)$.

4) S. Saks. a. a. O. S. 29.

Anderseits ist $|f_n(z_1)|\leqq|h_n(z_1)|$ in $|z_1-a|\leqq R'_1$. Damit konvergiert $\sum_{m=0}^{\infty} f_n(z_1)(z_2-d)^n$ gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-a|\leqq\frac{\delta}{2}$ und z_2 in $|z_2-d|\leqq T''$.

Es sei c ein beliebiger Wert in $|z_1-a|<R_1'$, so können wir uns auf ganz analoge Weise mit der obigen überzeugen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_1)(z_2-d)^n$ gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-c|\leqq\frac{\delta(c)}{2}$ und z_2 in $|z_2-d|\leqq T''$. Folglich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_1)(z_2-d)^n$ gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-a|\leqq R_1''$ und z_2 in $|z_2-d|\leqq T''$, wo $0<R_1''<R'_1$ ist.

Wenn η eine beliebig kleine positive Zahl ist, so ist die $f(z_1, z_2)$ regulär in $|z_1-a|\leqq K_1'$ und $|z_2-b|\leqq\eta$. Daher können wir den Wert d beliebig nah an dem Wert b auswählen. Wir können daher vorläufig den Wert d derart fixieren, dass $|d-b|<\frac{S_1}{2}$ ist, so enthält das Innere des Kreises $|z_2-d|=T$ den Wert b. Daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_1)(z_2-d)^n$ gleichmässig in bezug auf z_1 und z_2 in einer Umgebung von (a, b).

Wir gehen nun in den Fall über, wo die Anzahl der Veränderlichen $=n$ ist. Wenn $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ ein Punkt von D ist, so gibt es die positiven Zahlen $R_1, R_2, \cdots, R_n$, derart dass das abgeschlossene Zylindergebiet

$$V: |z_1-a_1|\leqq R_1,\ |z_2-a_2|\leqq R_2,\ \cdots\cdots,\ |z_n-a_n|\leqq R_n$$

in D enthalten ist. Wir bezeichnen den Kreis $|z_i-a_i|=R_i (i=1, 2, \cdots, n)$ mit K_i. Es gilt dann für beliebigen Punkt $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, wo $z_i\in K_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ist,

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n\int_{K_1}\frac{d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}\int_{K_2}\frac{d\zeta_2}{\zeta_2-z_2}\int_{K_3}\cdots\quad\int_{K_n}\frac{f(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n. \quad (11)$$

Es sei $\{(b_1^k, b_2^k, \cdots, b_n^k)\}$ $(k=1, 2, \cdots)$ eine gegen $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ strebende Folge in D. Wenn die Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ beschränkt in D ist, so entsteht es aus (11) nach dem Lebesgueschen Satz

$$\lim_{k\to\infty} f(b_1^k, b_2^k, \cdots, b_n^k)=f(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Die Diskussion läuft ganz analog wie im Falle, wo $n=2$ ist. Daher lassen wir die ausführliche Diskussion weg.

Wir nehmen nun an, dass der Satz bis zu $n-1$ richtig ist. Wir behandeln erstens den Fall, wo die Funktion $f(z_1, z_2 \cdots, z_n)$ nicnt beschränkt in D ist. Wenn wir den Wert $z_i = z'_i (i=2, 3, \cdots, n)$ in dem Inneren von K_i fixieren, so ist $f(z_1, z'_2, \cdots, z'_n)$ regulär in $|z_1 - a_1| \leqq R_1$ und damit beschränkt. Wir bezeichnen das Maximun von $|f(z_1, z'_2 \cdots, z'_n)|$ in $|z_1 - a_1| \leqq R_1$ mit $M(z'_2, \cdots, z'_n)$ und die Menge aller Punkte $(z_2, \cdots, z_n)$ in $|z_i - a_i| \leqq R_i$ $(i=2, \cdots, n)$, für die $M(z_2, \cdots, z_n) \leqq i$ ist, mit P_i. Daher gibt es beide abgeschlossenen Zylindergebiete

$$T' : |z_1 - a_1| \leqq R_1, \quad |z_2 - c_2| \leqq R'_2, \cdots \qquad , |z_n - c_n| \leqq R'_2$$
$$T'' : |z_1 - a_1| \leqq R_1, \quad |z_2 - c_2| \leqq R''_2, \cdots \qquad , |z_n - c_n| \leqq R''_2,$$

so dass das Gebiet T'' in dem V enthalten ist und die Ungleichung $|a_i - c_i| < R''_2 (i=2, 3, \cdots, n)$ besteht, und dass $R''_2 > R'_2$ ist und die Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ beschränkt in T' ist.

Für jeden festen Wert z_1 in dem Inneren von K_1 lässt sich die Funktion $f(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ in die Taylorsche Reihe folgendermassen entwickeln

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_n) = \sum_{p_2=0, \cdots, p_n=0}^{\infty} f_{p_2, \cdots, p_n}(z_1)(z_2 - c_2)^{p_2} \cdot (z_n - c_n)^{p_n}. \tag{12}$$

Diese Reihe konvergiert mindestens in $|z_i - c_i| < R_2''(i=2, \cdots, n)$. Die Funkticn $f_{p_2, \cdots, p_n}(z_1)$ ist regulär in $|z_1 - a_1| < R_1$. Es ist ferner $|f_{p_2 \cdots, p_n}(z_1)| \leqq \dfrac{R_1}{R_1 - |z_1 - a|} \dfrac{M}{(R'_2)^{p_2 + \cdot \cdot + p_n}}$. Die Diskussion läuft ganz analog wie im Falle, wo $n=2$ ist. Folglich konvergiert die Reihe (12) gleichmässig in bezug auf $z_i (i=2, \cdots, n)$ auf jede abgeschlossene Menge in dem $2n-2$-dimensionalen Gebiete $|z_i - c_i| < R_2'(i=2, \cdots, n)$ und z_1 in $|z_1 - a_1| \leqq R'_1$, wo $0 < R'_1 < R_1$ ist.

Folglich für beliebige positive Zahl S_2'', die kleiner als R_2' ist, gibt es von z_1 unabhängige Nummer N, so dass für jeden Wert z_1 in $|z_1 - a_1| \leqq R'_1$ die Ungleichung

$$|f_{p_2, \cdots, p_n}(z_1)| < \frac{1}{(S''_2)^{p_2 + \cdots + p_n}} \text{ für } p_2 + \cdots + p_n > N \tag{13}$$

besteht.

Es sei V' eine beliebige Zahl, die kleiner als R''_2 ist Für jeden Wert z_1 in $|z_1 - a| \leqq R'_1$ gibt es die Nummer N_{z_1}, so dass die Ungleichung

$$|f_{p_2, \cdots, p_n}(z_1)| < \frac{1}{(V')^{p_2 + \cdots + p_n}} \text{ für } p_2 + \cdots \quad + p_n > N_{z_1} \tag{14}$$

besteht.

Es sei R''_1 eine positive Zahl, die kleiner als R'_1 und beliebig nah an R'_1 ist. Es gibt dann eine von z_1 in $|z_1 - a_1| \leqq R''_1$ unabhängige Nummer N, so dass für jeden Wert z_1 in $|z_1 - a_1| \leqq R''_1$ die Ungleichung

$$|f_{p_2,\cdots,p_n}(z_1)|<\left(\frac{1}{V'}+\varepsilon\right)^{p_2+\cdots+p_n} \text{ für } p_2+\cdots\quad+p_n>N$$

besteht.

Die Diskussion läuft ganz analog wie im Falle, wo $n=2$ ist. Daher konvergiert die Reihe (12) gleichmässig in bezug auf z_1 in $|z_1-a_2|\leqq R''_1$ und $z_i(i=2,\cdots,n)$ in $|z_i-c_i|\leqq V''\left(<\dfrac{1}{\frac{1}{V'}+\varepsilon}\right)$.

W. z. b. w.

MATEMATISCHES INSTITUT.
UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.

(*Eingegangen am 15, April, 1966.*)