ÜBER DIE INTEGRALGLEICHUNGEN, WELCHE DURCH DIE SCHLICHTEN FUNKTIONEN GENÜGT WERDEN.

KEN'ITI KOSEKI

Es sei

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \quad + a_n z^n + \cdots \tag{1}$$

eine beliebige, innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ reguläre und schlichte Funktion. Die $(n-1)$-tuplen komplexen Zahlen $(a_2, \cdots, a_n)$ (n ist fest) bilden dann in dem $(2n-2)$-dimensionalen Euklidischen Raum eine Menge V_n, die mit der $(2n-2)$-dimensionalen Kugel homöomorph ist.[1] Es ist wohl bekannt, dass die den Grenzpunkten von V_n entsprechenden schlichten Funktionen der Schaeffer-Spencerschen[2] Differentialgleichung genügen.

In der vorliegenden Arbeit will ich eine neue Integralgleichung ableiten, die durch die den Grenzpunkten von V_n entsprechenden schlichten Funktionen genügt wird.

Es sei

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots \quad + a_n z^n + \cdots = z + g_1 z^2 + \cdots \quad + g_{n-1} z^n + \cdots \tag{2}$$

eine dem Grenzpunkte von V_n entsprechende schlichte Funktion. Das Bildgebiet von dem Kreise $|z|<1$ durch die Funktion $w=f(z)$ geht[3] aus der volle-w-Ebene dadurch hervor, dass wir letzteren längs einiger analytischen Kurven aufschneiden.

Es besteht[4] daher für die Funktion $w=f(z)$ die folgende Löwnersche Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial g(z,t)}{\partial z} z \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \\ g(z,0) &= f(z) \end{aligned}\right\}, \quad 0 \leqq t < \infty, \tag{3}$$

wo $\kappa(t)$ bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte in $0 \leqq t < \infty$ immer stetig ist und $|\kappa(t)|=1$ ist. Wir setzen $\kappa(t) = e^{i\varphi(t)}$.

Es sei $F = F(a_2, a_3, \cdots, a_n)$ eine in einer die V_n enthaltenden offenen Menge O definierte reelle Funktion mit den folgenden Eigenschaften

1). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. Coefficient Regions For Schlicht Functions. S. 12.

2). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. a. a. O. S. 36.

3). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. a. a. O. S. 88.

4). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN. (I) Journ. Okay. Univ. Vol. 9, No 2. 1960. S. 178.

1. Die F ist in O setetig differenzierbar in bezug auf $\Re(a_i)$ und $\Im(a_i)$. $(i=2, \cdots, n)$.

2. Das Maximum von F in V_n wird erreicht an einem Grenzpunkt von V_n.

Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{g}(z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{g}(z,t)}{\partial z} z \frac{1+\tilde{\kappa}(t)z}{1-\tilde{\kappa}(t)z} \\ \tilde{g}(z,t_1) &= g(z,t_1) \\ \tilde{\kappa}(t) &= e^{i(\varphi(t)+\varepsilon\eta(t))}\end{aligned}\right\}, \quad 0 \leqq t \leqq t_1,$$

wo $\eta(t)$ eine Funktion ist von der Art, dass es eine Folge der Zahlen $\{t_n\}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ gibt und $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ ist, und dass $\eta(t)$ eine Konstante ist in $t_{n+1} < t \leqq t_n (n=1, 2, \cdots)$ und $t_1 \leqq t < \infty$ und die $t_n (n=2, 3, \cdots)$ die Unstetigkeitspunkte von $\eta(t)$ sind. Die Funktion $\tilde{g}(z, 0)$ entspricht dann offenbar einem inneren Punkte von V_n.

Wir setzen nun

$$\tilde{g}(z,0) = z + \tilde{g}_1(0)z^2 + \cdots \quad + \tilde{g}_{n-1}(0)z^n + \cdots.$$

Nach der Eigenschaft 2 von der Funktion F gilt es

$$F(\tilde{g}_1(0), \cdots, \tilde{g}_{n-1}(0)) < F(g_1(0), \cdots, g_{n-1}(0)). \tag{4}$$

Indem wir die Funktion $F(\tilde{g}_1(0), \cdots, \tilde{g}_{n-1}(0))$ in bezug auf ε differenzieren, gewinnen wir

$$\Re\left(\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial a_3}\frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial \varepsilon} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial \tilde{g}_{n-1}}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0, \tag{5}$$

wo $\displaystyle \frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial F(\tilde{g}_1(0), \tilde{g}_2(0), \cdots, \tilde{g}_{n-1}(0))}{\partial \Re(a_i)}\bigg|_{\varepsilon=0} - i\,\frac{\partial F(\tilde{g}_1(0), \tilde{g}_2(0), \cdots, \tilde{g}_{n-1}(0))}{\partial \Im(a_i)}\bigg|_{\varepsilon=0}$ ist.

Es ist[5] aber

$$\frac{\partial \tilde{g}_p}{\partial \varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Bigg[\int_{t_1}^{0} 2\kappa^p(s_1)p\eta(s_1)e^{-ps_1}ds_1 + \sum_{i=2}^{p}\Bigg\{\sum_{p_1=i}^{p} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}\Bigg(\int_{t_1}^{0} 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)(p-p_1+1)\,\eta(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t_1}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t_1}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{t_1}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1 + \int_{t_1}^{0} 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}$$

$$\int_{t_1}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t_1}^{s_2}\cdots\int_{t_1}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1$$

5). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (III). Journ. Okay. Univ. Vol. II. 1962. S. 28.

$$+\cdots+\int_{t_1}^{0} 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t_1}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t_1}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{t_1}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1\Big)\Big\} + \sum_{\mu=1}^{p-2}(\mu+1)g_\mu(t_1)e^{-\mu t_1}$$

$$\int_{t_1}^{0} 2\kappa^{p-\mu}(s_1)(p-\mu)\eta(s_1)e^{-(p-\mu)s_1}ds_1 + \sum_{\mu=1}^{p-2}(\mu+1)g_\mu(t_1)e^{-\mu t_1}\sum_{i=\mu+2}^{p}\Big\{\sum_{p_1=i}^{p}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1} p_{i-(\mu+1)}\Big(\Big(\int_{t_1}^{0}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)(p-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t_1}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_{t_1}^{s_2}\cdots\int_{t_1}^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots\ ds_2ds_1+$$

$$\int_{t_1}^{0}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t_1}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t_1}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{t_1}^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots\ ds_2ds_1+\cdots$$

$$+\int_{t_1}^{0}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t_1}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t_1}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{t_1}^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))\eta(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots$$

$$ds_2ds_1\Big)\Big\} + pg_{p-1}(t_1)e^{-(p-1)t_1}\int_{t_1}^{0}2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]$$

für $p \gtreqless 3$. (6)

Wenn t_1 unendlich wächst, so ist[6] es

$$\lim_{t_1\to\infty}\frac{\partial\tilde g_p}{\partial\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_{\infty}^{0}2\kappa^p(s_1)p\eta(s_1)e^{-ps_1}ds_1+\sum_{i=2}^{p}\Big\{\sum_{p_1=i}^{p}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Big(\int_{\infty}^{0}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)(p-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(p+p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1+\int_{\infty}^{0}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}$$

$$\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots\ \int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1$$

$$+\cdots+\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)\Big\}\Big]. \tag{7}$$

6). K. Koseki. a. a. O. (III). S. 29.

Es sei a ein beliebiger, von 0 verschiedener, Stetigkeitspunkt von $\kappa(s)$. Wir nehmen die Funktion $\eta(s)$ von der Art an, dass $\eta(s)$ am Punkte a stetig ist.

Wir konstruieren eine neue Funktion $\eta_1(s)$, so dass

$$\eta_1(s) = \eta(s) \quad \text{in} \quad 0 \leqq s \leqq a$$
$$\eta_1(s) = 0 \quad \text{in} \quad a < s < \infty.$$

Wir ersetzen die Funktion $\eta(s)$ in der rechten Seite von (7) durch die Funktion $\eta_1(s)$, und wir differenzieren die rechte Seite von (7) in bezug auf a, so bekommen[7] wir

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{da}\left(\lim_{t_1\to\infty}\frac{\partial \tilde{g}_p(0)}{\partial \varepsilon_{\varepsilon=0}}\right) = -i\Big[2\kappa^p(a)n\eta(a)e^{-na} + \sum_{i=2}^{p}\Big\{\sum_{p_1=i}^{p} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \\
&\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}\Big(2\kappa^{p-p_1+1}(a)(p-p_1+1)\eta(a)e^{-(p-p_1+1)a}\int_\infty^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2} \\
&\int_\infty^{s_2}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_2 + 2\kappa^{p_1-p_2}(a)(p_1-p_2)\eta(a)e^{-(p_1-p_2)a} \\
&\int_\infty^a 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3 \\
&\int_a^0 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}ds_1 + \cdots + 2\kappa^{p_{i-1}-1}(a)(p_{i-1}-1)\eta(a)e^{-(p_{i-1}-1)a} \\
&\int_a^0 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots \\
&\int_a^{s_{i-2}} 2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2 ds_1\Big)\Big\}\Big] \quad (\text{für } p \geqq 3), \\
&\frac{d}{da}\left(\lim_{t_1\to\infty}\frac{\partial \tilde{g}_2(0)}{\partial \varepsilon_{\varepsilon=0}}\right) = -i\Big[2\kappa^2(a)2\eta(a)e^{-2a} + 4\kappa(a)\eta(a)e^{-a} \\
&\qquad \int_\infty^a 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2 + 4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_a^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\Big], \\
&\frac{d}{da}\left(\lim_{t_1\to\infty}\frac{\partial \tilde{g}_1(0)}{\partial \varepsilon_{\varepsilon=0}}\right) = -i2\kappa(a)\eta(a)e^{-a}.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Wir setzen (8) in (5) ein, so gewinnen wir

$$\sum_{p=1}^{n-1}\Im\left\{\frac{\partial F}{\partial a_{p+1}}\beta_p\right\} = 0, \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}
&\text{wo } \beta_p = 2\kappa^p(t)pe^{-pt} + \sum_{i=2}^{p}\Big\{\sum_{p_1=i}^{p} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \\
&\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}\Big(2\kappa^{p-p_1+1}(t)(p-p_1+1)e^{-(p-p_1+1)t}\int_\infty^t 2\kappa^{p-p_1}(s_2)e^{-(p-p_1)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots
\end{aligned}$$

7). K. Koseki. a. a. O. (III). S. 30.

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\infty}^{s_{l-1}} 2\kappa^{p_{l-1}-1}(s_l)e^{-(p_{l-1}-1)s_l}ds_l \cdots ds_2 + 2\kappa^{p_1-p_2}(t)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)t} \\
&\int_{\infty}^{t} 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_{\infty}^{s_3}\cdots \int_{\infty}^{s_{l-1}} 2\kappa^{p_{l-1}-1}(s_l)e^{-(p_{l-1}-1)s_l}ds_l \cdots \quad ds_3 \\
&\int_{t}^{o} 2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}ds_1 + \cdots \quad + 2\kappa^{p_{l-1}-1}(t)(p_{l-1}-1)e^{-(p_{l-1}-1)t}\int_{t}^{o} \\
&2\kappa^{p-p_1+1}(s_1)e^{-(p-p_1+1)s_1}\int_{t}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{t}^{s_2}\cdots \\
&\int_{t}^{s_{l-2}} 2\kappa^{p_{l-2}-p_{l-1}}(s_{l-1})e^{-(p_{l-2}-p_{l-1})s_{l-1}}ds_{l-1}\cdots \quad ds_2 ds_1\Big)\Big\}, \quad (\text{für } p \geqq 3) \\
&\qquad \beta_2 = 2\kappa^2(t)e^{-2t} + 4\kappa(t)e^{-t}\int_{\infty}^{t} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2 + 4\kappa(t)e^{-t}\int_{t}^{o} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2, \\
&\qquad \beta_1 = 2\kappa(t)e^{-t}
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ist. Die Integralgleichung (9) gilt offenbar auch für den Punkt $t=0$, wenn die Funktion $\kappa(t)$ stetig am Punkte $t=0$ ist. Die Gleichung (9) gilt daher für alle Stetigkeitspunkte von $\kappa(t)$ in $0 \leqq t < \infty$.

Wir können[8] noch die folgende Funktion als die Funktion F aufnehmen

$$F(b_2, b_3, \cdots, b_n) = \frac{1}{\sum_{v=2}^{n} |b_v - \alpha_v|^2}.$$

Die Gleichung (9) nimmt dann die folgende Form an.

$$\sum_{p=1}^{n-1} \Big\{(c_{p+1}-f_{p+1})\Re\beta_p + (d_{p+1}-g_{p+1})\Im\beta_p\Big\} = 0, \qquad (11)$$

wo $a_{p+1} = c_{p+1} + id_{p+1}$ und $\alpha_{p+1} = f_{p+1} + ig_{p+1}$ ist. Alle Koeffizienten $c_{p+1} - f_{p+1}$ und $d_{p+1} - g_{p+1} (p = 1, \cdots, n-1)$ können nicht gleichzeitig gleich der Null sein. Die Gleichung (11) gilt für alle Punkte von einer Menge S, die auf der Begrenzung von V_n liegt und überall dicht auf der Begrenzung von V_n ist.

Problemstellung

1. Welche Beziehung besteht zwischen der Schaeffer-Spencerschen Gleichung und der Gleichung (11) ?

2. Das Bildgebiet von dem Kreise $|z|<1$ durch eine Funktion $w = f(z)$, die dem Grenzpunkt von V_n entspricht, geht aus der volle-w- Ebene dadurch hervor, dass wir letzteren längs einiger analytischen Kurven aufschneiden. Können wir nicht diesen Satz unabhängig von D_n-Gleichung beweisen ?

8). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. a. a. O. S. 40—41.

3. Besteht die Gleichung (11) für alle Punkte auf der Begrenzung von V_n oder nicht ?

4. Unter welcher Bedingung entspricht die Lösung von (11) dem Punkte auf der Begrenzung von V_n ?

Wenn $n = 2$ ist, wird das Problem 4 bejagend beantwortet, unter der Bedingung, so dass $\kappa(t)$ in $0 \leqq t < \infty$ stetig ist. Die Gleichung (11) nimmt in der Tat die folgende Form an, wenn $n = 2$ ist.

$$h\Re\kappa(t) + k\Im\kappa(t) = 0,$$

wo $hk \neq 0$ ist. Da nach der Voraussetzung $\kappa(t)$ stetig ist, muss es $\kappa(t) =$ Konstante sein.

Das Problem 3 wird offenbar auch bejagend beantwortet, wenn $n = 2$ ist.

Ich denke an, dass für die Antwort auf das Problem 3 meine[9] Arbeit "BEITRÄGE ZUR THEORIE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN" von grosser Bedeutung ist.

MATEMATISCHES INSTITUT.
UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.

(*Eingegangen am 21. September, 1962*)

9). K. Koseki. BEITRÄGE ZUR THEORIE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN. Journ. Okay. Univ. Vol. 10. No. I, 1960.