ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN UND MEROMORPHEN FUNKTIONEN (I)

KEN'ITI KOSEKI

Es sei $w=f(z)$ eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ meromorphe und schlichte Funktion. Wenn die Laurentsche Entwickelung von $f(z)$ am Punkte $z=0$ die Form

$$w=f(z)=\frac{1}{z}+b_1z+b_2z^2+\cdots\quad+b_nz^n+\cdots \tag{1}$$

annimmt, so nennen wir die $f(z)$ eine normierte Funktion.

Wenn das Bildgebiet durch $w=f(z)$ den Punkt $w=0$ enthält, so addieren wir eine geeignete Konstante b_0 zu der Funktion $f(z)$, so dass das Bildgebiet durch

$$w=f_1(z)=f(z)+b_0=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\cdots\quad+b_nz^n+\cdots \tag{2}$$

nicht den Punkt $w=0$ enthält.

Wir nennen die Funktion $f_1(z)$ eine halbnormierte Funktion. Wenn eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ definierte Funktion $w=p(z)$ halbnormiert, schlicht nnd meromorph ist, so ist die Funktion $g(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ eine normierte, schlichte nnd reguläre, Funktion in $|z|<1$. Umgekehrt, wenn eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ definierte Funktion $w=g(z)$ normiert, schlicht und regulär ist, so ist die Funktion $p(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ eine halbnormierte, schlichte und meromorphe, Funktion in $|z|<1$.

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $w=f_1(z)$ in der Formel (2) halbnormiert, schlicht und meromorph in $|z|<1$ ist, und wir setzen

$$\frac{1}{f_1(z)}=g(z)=z+a_1z^2+\cdots\quad+a_{n-1}z^n+\cdots\,. \tag{3}$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$f_1(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{z(1+a_1z+\cdots\quad+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots)}=\frac{1}{z(1-\alpha)}$$
$$=\frac{1}{z}(1+\alpha+\cdots+\alpha^n+\cdots), \tag{4}$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= -(a_1 z + \cdots \quad + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots \quad) = -\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, \\
\alpha^2 &= \sum_{i=2}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{j_1=1 \\ (j_1+j_2=i)}}^{i-1} \sum_{j_2=1}^{i-1} a_{j_1} a_{j_2} \Big) z^i, \\
&\vdots \\
\alpha^n &= (-1)^n \sum_{i=n}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{j_1=1 \\ (j_1+j_2+\cdots+j_n=i)}}^{i-(n-1)} \sum_{j_2=1}^{i-(n-1)} \cdots \sum_{j_n=1}^{i-(n-1)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots \ a_{j_n} \Big) z^i, \quad (n \geqq 1).
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

ist.

Aus (2), (4) und (5) bekommen wir sofort

$$\left.\begin{aligned}
b_n &= -a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \Big(\sum_{j_1=1}^{n-(k-2)} \cdots \sum_{\substack{j_k=1 \\ (j_1+j_2+\cdots+j_k=n+1)}}^{n-(k-2)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots \ a_{j_k} \Big), \quad (n \geqq 1), \\
b_0 &= -a_1 \,.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Nun bilden die Koeffizienten $(d_1, d_2, \cdots, \ d_{n+1})$ von allen normierten, regulären und schlichten Funktionen $h(z) = z + d_1 z^2 \ + \cdots + d_{n-1} z^n + \cdots$ eine Menge S in dem $2(n+1)$ dimensionalen Euklidischen Raum. Nach der Formel (6) ist die b_n ein Polynom von $d_1, d_2, \cdots, d_{n+1}$, so nimmt der $\Re b_n$ seines Maximum an der Begrenzung von S an. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Funktion $g(z)$ in der Formel (3) das Maximum zu $\Re b_n$ gibt. Das Bildgebiet von der Kreisscheibe $|z|<1$ durch die Funktion $w=g(z)$ bezeichnen wir mit D. Es ist aber wohlbekannt, dass $D=$ die volle-w- Ebene — einige analytischen Kurven ist.

Folglich gibt es für $w=f_1(z)$ eine Schar von den schlichten Funktionen $w=g_n(z,t)=e^t\{z+g_1(t)z^2+\cdots+g_{n-1}(t)z^n+\cdots\}$ in $0 \leqq t < \infty$, welche der folgenden Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial g_n(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g_n(z,t)}{\partial z} z \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z} \qquad (7)$$

mit der Anfangsbedingung

$$g_n(z,0) = g(z) \qquad (8)$$

genügt, wo $\kappa(t)$ eine stuckweise stetige Funktion in $0 \leqq t < \infty$ darstellt und $|\kappa(t)|=1$ ist.

Es ist aber

$$g_n(t) = e^{nt} \Big[\Big\{ \Big(\int_s^t 2\kappa^n(s_1) e^{-ns_1} ds_1 + \sum_{i=2}^{n} \Big(\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&\int_s^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)\Big\} + \sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\\
&\Big\{\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2\cdots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1} p_{i-(\mu+1)}\\
&\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_2^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}\\
&+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_n(s)e^{-ns}\Big], \qquad (n\geqq 3),\\
&\quad g_2(t)=e^{2t}\Big\{\int_s^t 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1\\
&+2g_1(s)e^{-s}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_2(s)e^{-2s}\Big\},\\
&\quad g_1(t)=e^{t}\Big\{\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_1(s)e^{-s}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Wir setzen nun

$$
\begin{aligned}
&F(\varepsilon)=-\tilde g_{n+1}(0)+\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\Big(\sum_{\substack{j_1=1\\(j_1+j_2+\cdots}}^{n-(k-2)}\cdots\sum_{\substack{j_k=1\\+j_k=n+1)}}^{n-(k-2)}\tilde g_{j_1}(0)\tilde g_{j_2}(0)\cdots\tilde g_{j_k}(0)\Big),\\
&\tilde g_n(0)=\int_s^0 2\tilde\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\\
&\int_s^0 2\tilde\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-1}}2\tilde\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\\
&\Big\{\int_s^0 2\tilde\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-(\mu-1)}\\
&\int_s^0 2\tilde\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\tilde\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2ds_1\Big\}\\
&+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\tilde\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_n(s)e^{-ns}, \quad \text{für} \quad n\geqq 3,\\
&\quad\tilde g_2(0)=\int_s^0 2\tilde\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+2\int_s^0 2\tilde\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\tilde\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1\\
&\quad+2g_1(s)e^{-s}\int_s^0 2\tilde\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_2(s)e^{-2s},\\
&\quad\tilde g_1(0)=\int_s^0 2\tilde\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_1(s)e^{-s}.\\
&\quad\kappa(t)=e^{i\varphi(t)} \text{ und } \tilde\kappa(t)=e^{i[\varphi(t)+\varepsilon\eta(t)]},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

wo $\varphi(t)$ die bestimmte reelle Funktion und $\eta(t)$ eine beliebige reelle stetige Funktion darstellt und ε eine reelle Veränderliche ist.

Aus (10) folgt ohne weiteres

$$\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}=-\frac{d\tilde{g}_{n+1}(0)}{d\varepsilon}+\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\Big\{\underset{(j_1+j_2+\cdots+j_k=n+1)}{\sum_{j_1=1}^{n-(k-2)}\cdots\sum_{j_k=1}^{n-(k-2)}}\Big(\frac{d\tilde{g}_{j_1}(0)}{d\varepsilon}\cdot\tilde{g}_{j_2}(0)\cdots\tilde{g}_{j_k}(0)$$

$$+\tilde{g}_{j_1}(0)\frac{d\tilde{g}_{j_2}(0)}{d\varepsilon}\tilde{g}_{j_3}(0)\cdots\ \tilde{g}_{j_k}(0)+\cdots\ +\tilde{g}_{j_1}(0)\tilde{g}_{j_2}(0)\cdots\frac{d\tilde{g}_{j_k}(0)}{d\varepsilon}\Big)\Big\}. \tag{11}$$

Der reelle Teil von $\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ muss am Punkte $\varepsilon=0$ den Wert 0 annehmen.

Es ist aber nach meiner Arbeit

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}=i\Big[\int_s^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{t=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=t}^{n}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{t-1}=2}^{p_{t-2}-1}p_{t-1}$$

$$\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-1}}2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots\ ds_1+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\ \int_s^{s_{t-1}}2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots\ ds_1+\cdots$$

$$+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-1}}2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)(p_{t-1}-1)\eta(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots ds_1\Big)\Big\}+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)(n-\mu)\eta(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\sum_{t=\mu+2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=t}^{n}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{t-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{t-(\mu+2)}-1}p_{t-(\mu+1)}\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_s^{s_2}\cdots\ \int_s^{s_{t-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots\ ds_2ds_1$$

$$+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots\ ds_2ds_1+\cdots$$

$$+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{t-\mu})(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))\eta(s_{t-\mu})e^{-(p_{t-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{t-\mu}}ds_{t-\mu}\cdots$$

$$ds_2ds_1\Big)\Big\}+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big],\quad \text{für } n\geqq 3, \tag{12}$$

$$\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_s^0 2\kappa^2(s_1)2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2 ds_1 + 2$$

$$\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2 ds_1 + 2g_1(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big], \tag{13}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1. \tag{14}$$

Wenn die s unendlich wächst, so ergibt sich aus (12)

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon} = i\Big[\int_\infty^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}$$

$$\Big(\int_\infty^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_\infty^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i \cdots\ ds_1 + \int_\infty^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_\infty^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\ \int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1 + \cdots$$

$$+\int_\infty^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_\infty^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)\Big\}\Big]. \tag{15}$$

Ebenso ergeben sich aus (13) und (14)

$$\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_\infty^0 2\kappa^2(s_1)2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_\infty^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}$$

$$\int_\infty^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2 ds_1 + 2\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_2} 2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2 ds_1\Big], \tag{16}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\int_\infty^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1. \tag{17}$$

Da der reelle Teil von $\dfrac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ gleich der Null für alle stetigen Funktion $\eta(s)$ ist, so können wir nach dem Lebesgueschen Satz die Funktion $\eta(s)$ durch eine neue Funktion $\eta_1(s)$ ersetzen, so dass

$$\eta_1(s) = \eta(s) \quad \text{in} \quad 0 \leqq s < a$$

$$\eta_1(s) = 0 \qquad \text{in} \quad a < s < \infty$$

ist.

Für die $\eta_1(s)$ nimmt die $\dfrac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ die folgende Form an

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i\Big[\int_a^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}$$

$$\Big(\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1+\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\ \int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1$$

$$+\cdots\ +\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots$$

$$\int_a^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_1\Big)\Big\}\Big].$$

Wir differenzieren nun die rechte Seite der obigen Formel, und wir erhalten

$$\frac{d}{da}\Big(\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\Big)=-i\Big[2\kappa^n(a)n\eta(a)e^{-na}+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Big(2\kappa^{n-p_1+1}(a)(n-p_1+1)\eta(a)e^{-(n-p_1+1)a}\int_\infty^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(a)(p_1-p_2)\eta(a)e^{-(p_1-p_2)a}$$

$$\int_\infty^a 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\ \int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_3$$

$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\ \ +2\kappa^{p_{i-1}-1}(a)(p_{i-1}-1)\eta(a)e^{-(p_{i-1}-1)a}$$

$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots$$

$$\int_a^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots\ ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]. \tag{18}$$

Ebenfalls bekommen wir aus (16) und (17)

$$\frac{d}{da}\Big(\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\Big)=-i\Big[2\kappa^2(a)2\eta(a)e^{-2a}+4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_\infty^a 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+$$

$$4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_a^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\Big], \tag{19}$$

$$\frac{d}{da}\Big(\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}\Big)=-i2\kappa(a)\eta(a)e^{-a}. \tag{20}$$

Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\eta(a)\neq 0$ ist, so bekommen wir den folgenden

Satz 1. *Es sei*

$$w=f_1(z)=\frac{1}{z}+b_0+b_1z+\cdots\ \ +b_nz^n+\cdots$$

die halbnormierte, schlichte und meromorphe, Funktion in $|z|<1$, *so* *dass der reelle Teil der Koeffizient von z^n das Maximum annimmt. Es gibt dann an allen Punkten s in $0 \leqq s < \infty$, bis auf endlich viele Unstetigkeitspunte von $\kappa(s)$,*

$$\begin{aligned}
&\Im\Big[2\kappa^{n+1}(s)(n+1)e^{-(n+1)s}+\sum_{i=2}^{n+1}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n+1}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\\
&\Big(2\kappa^{n-p_1+2}(s)(n-p_1+2)e^{-(n-p_1+2)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\\
&\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}\\
&\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\ \int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_3\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\ +2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots\ ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]-\sum_{k=2}^{n+1}\Im(-1)^k\\
&\Big\{\sum_{j_1=1}^{n-(k-2)}\sum_{j_2=1}^{n-(k-2)}\cdots\sum_{j_k=1}^{n-(k-2)}\Big(\beta_{j_1}g_{j_2}(0)\cdots\ g_{j_k}(0)+g_{j_1}(0)\beta_{j_2}g_{j_3}(0)\cdots\ g_{j_k}(0)+\cdots\\
&+g_{j_1}(0)g_{j_2}(0)\cdots\ \beta_{j_k}\Big)\Big\}=0 \qquad (21)
\end{aligned}$$

für $n \geqq 2$, wo

$$\begin{aligned}
&\beta_j=2\kappa^j(s)je^{-js}+\sum_{i=2}^{j}\Big\{\sum_{p_1=i}^{j}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\\
&\Big(2\kappa^{j-p_1+1}(s)(j-p_1+1)e^{-(j-p_1+1)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\\
&\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}\\
&\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\ \int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\ ds_3\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\ +2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots\ ds_2ds_1,\quad (j\geqq 3)
\end{aligned}$$

$$\beta_2=2\kappa^2(s)e^{-2s}+4\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+4\kappa(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2,$$

$$\beta_1=2\kappa(s)e^{-s}$$

ist.

Für $n=1$ *gilt es an allen Punkten* s *in* $0 \leqq s < \infty$, *bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte von* $\kappa(s)$,

$$\Im\left[2\kappa^2(s)e^{-2s}+4\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+4\kappa(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\right]$$
$$-\Im 4\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1=0. \tag{22}$$

UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.

(*Eingegangen am 29. Dezember, 1961*)