

ÜBER DIE ABLEITUNGEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (I)

KENITI KOSEKI

Es sei

$$\varphi = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (1)$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion.
In dieser Arbeit will ich die Koeffizienten der Funktion $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ behandeln.

Aus (1) bekommen wir ohne weiteres

$$\left. \begin{aligned} f'(z) &= 1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1} + \dots = 1 + A \\ f''(z) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + \dots + n(n-1)a_n z^{n-2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{f''(z)}{f'(z)} &= \{2a_2 + 3 \cdot 2a_3 z + \dots + n(n-1)a_n z^{n-2} + \dots\} \{1 - A + A^2 - \dots \\ &\quad + (-1)^n A^n + \dots\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Andererseits können wir aus $A = \sum_{i=2}^{\infty} i a_i z^{i-1}$ leicht berechnen

$$\begin{aligned} A^2 &= (2a_2 z + \dots + i a_i z^{i-1} + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots)^2 \\ &= (2 \cdot 2a_2 a_2) z^2 + (2 \cdot 3a_2 a_3 + 3 \cdot 2a_3 a_2) z^3 + \dots + \{2i a_2 a_i + 3(i-1)a_3 a_{i-1} \\ &\quad + \dots + i2a_i a_2\} z^i + \dots = \sum_{i=2}^{\infty} \left\{ 2i a_2 a_i + 3(i-1)a_3 a_{i-1} + \dots + i2a_i a_2 \right\} z^i \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} \left(\sum_{j_1=2}^i \sum_{j_2=2}^i j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} \right) z^i. \end{aligned} \quad (4)$$

$(j_1 + j_2 = i + 2)$

Wir nehmen nun an, dass es im allgemeinen

$$A^p = \sum_{i=p}^{\infty} \left(\sum_{j_p=2}^{i-p+2} \sum_{j_{p-1}=2}^{i-p+2} \dots \sum_{j_1=2}^{i-p+2} j_1 j_2 \dots j_p a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_p} \right) z^i \quad (5)$$

$(j_1 + j_2 + \dots + j_p = i + p)$

besteht. Daraus folgt

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p \cdot A = \sum_{i=p}^{\infty} \left(\sum_{j_p=2}^{i-p+2} \sum_{j_{p-1}=2}^{i-p+2} \dots \sum_{j_1=2}^{i-p+2} j_1 j_2 \dots j_p a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_p} \right) z^i \cdot \\ &\quad \sum_{i=2}^{\infty} i a_i z^{i-1} = \sum_{i=p+1}^{\infty} \left(\sum_{j_{p+1}=2}^{i-p+1} \sum_{j_p=2}^{i-p+1} \dots \sum_{j_1=2}^{i-p+1} j_1 j_2 \dots j_{p+1} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_{p+1}} \right) z^i. \end{aligned}$$

$(j_1 + j_2 + \dots + j_{p+1} = i + p + 1)$

Folglich gilt die Formel (5) für alle $p \geq 2$.

Wir wollen nun die Koeffizient von z^n der Taylorschen Entwicklung von

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} = 2a_2 + C_1 z + \dots + C_n z^n + \dots \quad (6)$$

berechnen. Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} & - \{ 2 \cdot 1 \cdot (n+1) a_2 a_{n+1} + 3 \cdot 2 \cdot n a_3 a_n + \dots + (n+1) n 2 a_{n+1} a_2 \} = \\ & - \sum_{\substack{j_1=1 \\ (j_1+j_2=n+2)}}^n \sum_{j_2=2}^{n+1} (j_1+1) j_1 j_2 a_{j_1+1} a_{j_2} \\ & 2 \cdot 1 \cdot a_2 \sum_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n+2)}}^n \sum_{j_1=2}^n j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} + 3 \cdot 2 a_3 \sum_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n+1)}}^{n-1} \sum_{j_1=2}^{n-1} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} + 4 \cdot 3 a_4 \sum_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=n)}}^{n-2} \sum_{j_1=2}^{n-2} j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} \\ & + \dots + n(n-1) a_n \sum_{\substack{j_2=2 \\ (j_1+j_2=4)}}^2 \sum_{j_1=2}^2 j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} = \sum_{\substack{j_3=1 \\ (j_1+j_2+j_3=n+3)}}^{n-1} \sum_{j_2=2}^n \sum_{j_1=2}^n (j_3+1) j_3 j_1 j_2 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3+1} \\ & - \{ 2 \cdot 1 \cdot a_3 \sum_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=n+3)}}^{n-1} \sum_{j_2=2}^{n-1} \sum_{j_1=2}^{n-1} j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} + 3 \cdot 2 \cdot a_3 \sum_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=n+2)}}^{n-2} \sum_{j_2=2}^{n-2} \sum_{j_1=1}^{n-2} j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \\ & + \dots + (n-1)(n-2) a_{n-1} \sum_{\substack{j_3=2 \\ (j_1+j_2+j_3=6)}}^2 \sum_{j_2=2}^2 \sum_{j_1=2}^2 j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} = - \sum_{\substack{j_4=1 \\ (j_1+j_2+j_3+j_4=n+4)}}^{n-2} \sum_{j_3=2}^{n-1} \sum_{j_2=2}^{n-1} \sum_{j_1=2}^{n-1} \\ & (j_4+1) j_4 j_1 j_2 j_3 a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} a_{j_4+1} \\ & \vdots \\ & (-1)^n \left\{ 2 a_2 \sum_{j_1=2}^2 \sum_{j_{n-1}=2}^2 \dots \sum_{j_1=2}^2 j_1 j_2 \dots j_n a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_n} \right\} = (-1)^n \\ & \sum_{j_{n+1}=1}^1 \sum_{j_n=2}^2 \dots \sum_{j_1=2}^2 j_1 j_2 \dots j_n (j_{n+1}+1) j_{n+1} a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_{n+1}+1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Nach (3) und (7) ist es die Koeffizient

$$C_n = (n+2)(n+1) a_{n+2} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sum_{\substack{j_{k+1}=1 \\ (j_1+j_2+\dots+j_{k+1}=n+k+1)}}^{n-k+1} \sum_{j_k=2}^{n-k+2} \dots \sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1 j_2 \dots \right. \\ \left. j_k j_{k+1} (j_{k+1}+1) a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_k} a_{j_{k+1}+1} \right). \quad (8)$$

Wenn wir $\rho = e^{i\theta}$ und $\frac{1}{\rho} f(\rho z) = g(z)$ setzen, so ist die Koeffizient von z^n von $g(z)$ gleich der $\rho^{n+1} C_n$. Daher können wir das Maximum der reellen Teile von C_n statt das Maximum von $|C_n|$ behandeln.

Nun bilden¹⁾ die Koeffizienten $(d_2, d_3, \dots, d_{n+2})$ von allen normierten, regulären und schlichten Funktionen $h(z) = z + d_2 z^2 + \dots + d_n z^n + \dots$ eine Menge S in dem $2(n+1)$ dimensionalen Euklidischen Raum, die mit der

1). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer, Coefficient Regions For Schlicht Functions, S. 12.

$2(n+1)$ dimensionalen Kugel homöomorph ist. Da die C_n in der Formel (8) ein Polynom von $a_2, a_3, \dots, a_{n+2}$ ist, so nimmt der $\Re C_n$ seines Maximum an der Begrenzung von S an.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Funktion $f(z)$ in der Formel (1) das Maximum zu $\Re C_n$ gibt. Das Bildgebiet von der Kreisscheibe $|z| < 1$ durch die Funktion $\varphi = f(z)$ bezeichnen wir mit D . Es ist aber wohlbekannt²⁾, dass $D =$ die volle- φ -Ebene — einige analytischen Kurven ist.

Folglich gibt³⁾ es für die $\varphi = f(z)$ eine Schar von den schlichten Funktionen $\varphi = g_n(z, t) = e^t \{z + g_1(t)z^2 + \dots + g_{n-1}(t)z^n + \dots\}$ in $0 \leq t < \infty$, welche der folgenden Löwnerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial g_n(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial g_n(z, t)}{\partial z} z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} \quad (9)$$

mit der Anfangsbedingung

$$g_n(z, 0) = f(z) \quad (10)$$

genügt, wo $\kappa(t)$ eine stückweise stetige Funktion in $0 \leq t < \infty$ darstellt und $|\kappa(t)| = 1$ ist.

Es gilt aber für $n \geq 3$ nach meiner Formel⁴⁾

$$\begin{aligned} g_n(t) = e^{nt} & \left[\left\{ \int_s^t 2\kappa^n(s_1) e^{-ns_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \dots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \right. \right. \\ & \int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \\ & \left. \left. \left. \int_s^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i ds_{i-1} \dots ds_1 \right) \right\} + \sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) g_\mu(s) e^{-\mu s} \right. \\ & \left\{ \int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \dots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1} p_{i-(\mu+1)} \right. \right. \\ & \int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \\ & \left. \left. \left. \int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \dots ds_2 ds_1 \right) \right\} \right. \\ & \left. + n g_{n-1}(s) e^{-(n-1)s} \int_s^t 2\kappa(s_1) e^{-s_1} ds_1 + g_n(s) e^{-ns} \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

Wir setzen nun

2). A. C. Schaeffer and D. C. Spencer. a. a. O. S. 144.

3). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN. S. 179.

4). K. Koseki. a. a. O. S. 184.

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon) &= (n+1)(n+2) \tilde{g}_{n+1}(0) + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left(\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1} \sum_{j_k=2}^{n-k+2} \sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2} \dots \right. \\
&\quad \left. \sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} (j_{k+1}+1) \tilde{g}_{j_1-1}(0) \tilde{g}_{j_2-1}(0) \dots \tilde{g}_{j_{k-1}-1}(0) \tilde{g}_{j_{k+1}}(0) \right) \\
&\quad \left(j_1 + j_2 + \dots + j_k + j_{k+1} = n+k+1 \right) \\
\tilde{g}_n(0) &= \int_s^0 2\tilde{\kappa}^n(s_1) e^{-ns_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \dots \sum_{p_{i-1}=3}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \\
&\quad \left. \int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_{i-1}-1} 2\tilde{\kappa}^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \dots ds_1 \right) + \sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) g_\mu(s) e^{-\mu s} \\
&\quad \left\{ \int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-\mu}(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \dots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1} p_{i-(\mu+1)} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\tilde{\kappa}^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_i) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_i} ds_i \dots ds_1 \right) \right\} \\
&\quad + n g_{n-1}(s) e^{-(n-1)s} \int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1) e^{-s_1} ds_1 + g_n(s) e^{-ns}, \quad \text{für } n \geq 3, \\
\tilde{g}_2(0) &= \int_s^0 2\tilde{\kappa}_2(s_1) e^{-2s_1} ds_1 + 2 \int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1) e^{-s_1} \int_s^{s_1} 2\tilde{\kappa}(s_2) e^{-s_2} ds_2 ds_1 + 2g_1(s) e^{-s} \\
&\quad \int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1) e^{-s_1} ds_1 + g_2(s) e^{-2s}, \\
\tilde{g}_1(0) &= \int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1) e^{-s_1} ds_1 + g_1(s) e^{-s}, \\
\kappa(t) &= e^{i\varphi(t)} \quad \text{und} \quad \tilde{\kappa}(t) = e^{i\{\varphi(t) + \varepsilon\eta(t)\}},
\end{aligned} \tag{12}$$

wo $\varphi(t)$ die bestimmte reelle Funktion und $\eta(t)$ eine beliebige reelle stetige Funktion darstellt und ε eine reelle Veränderliche ist.

Aus (12) folgt es ohne weiteres

$$\begin{aligned}
\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= (n+2)(n+1) \frac{d\tilde{g}_{n+1}(0)}{d\varepsilon} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \left[\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1} \sum_{j_k=2}^{n-k+2} \sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2} \dots \sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1 j_2 \dots \right. \\
&\quad \left. j_k j_{k+1} (j_{k+1}+1) \left\{ \frac{d\tilde{g}_{j_1-1}(0)}{d\varepsilon} \cdot \tilde{g}_{j_2-1}(0) \dots \tilde{g}_{j_{k-1}-1}(0) \cdot \tilde{g}_{j_{k+1}}(0) + \tilde{g}_{j_1-1}(0) \cdot \frac{d\tilde{g}_{j_2-1}(0)}{d\varepsilon} \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \tilde{g}_{j_3-1}(0) \dots \cdot \tilde{g}_{j_k-1}(0) \cdot \tilde{g}_{j_{k+1}}(0) + \dots + \tilde{g}_{j_1-1}(0) \dots \cdot \tilde{g}_{j_{k-1}}(0) \cdot \frac{d\tilde{g}_{j_{k+1}}(0)}{d\varepsilon} \right\} \right]. \tag{13}
\end{aligned}$$

Der reelle Teil von $\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ muss am Punkte $\varepsilon=0$ den Wert 0 annehmen.

Es ist aber nach meiner Arbeit⁵⁾

5). K. Koseki. a. a. O. S. 185.

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} &= i \left[\int_s^0 2\kappa^n(s_1) \cdot n\gamma(s_1) e^{-n\varepsilon_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-2}=2}^{p_{i-1}-1} p_{i-1} \right. \right. \\
&\quad \left(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) (n-p_1+1) \gamma(s_1) e^{-(n-p_1+1)\varepsilon_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 + \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) (p_1-p_2) \gamma(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_s^{s_2} \dots \int_s^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots \right. \\
&\quad \left. ds_1 + \dots + \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) (p_{i-1}-1) \gamma(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 \right\} + \sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) g_\mu(s) e^{-\mu\varepsilon} \\
&\quad \int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1) (n-\mu) \gamma(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) g_\mu(s) e^{-\mu\varepsilon} \sum_{i=\mu+2}^n \left\{ \sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \right. \\
&\quad \left. \sum_{p_{i-(\mu+2)}=2}^{p_{i-(\mu+1)}-1} p_{i-(\mu+1)} \left(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) (n-p_1+1) \gamma(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \right. \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_2} \dots \int_s^{s_{i-(\mu+1)}-1} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \cdots ds_2 ds_1 + \right. \\
&\quad \left. \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) (p_1-p_2) \gamma(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_{i-(\mu+1)}-1} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \cdots ds_2 ds_1 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_s^{s_2} \dots \right. \\
&\quad \left. \int_s^{s_{i-(\mu+1)}-1} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu}) (p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)) \gamma(s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \cdots \right. \\
&\quad \left. ds_2 ds_1 \right\} + n g_{n-1}(s) e^{-(n-1)\varepsilon} \int_s^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-\varepsilon_1} ds_1 \Big], \quad \text{für } n \geq 3, \quad (14).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} &= i \left[\int_s^0 2\kappa^2(s_1) \cdot 2\gamma(s_1) e^{-2\varepsilon_1} ds_1 + 2 \int_s^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-\varepsilon_1} \int_s^{s_1} 2\kappa(s_2) e^{-\varepsilon_2} ds_2 ds_1 \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_s^0 2\kappa(s_1) e^{-\varepsilon_1} \int_s^{s_1} 2\kappa(s_2) \gamma(s_2) e^{-\varepsilon_2} ds_2 ds_1 + 2 g_1(s) e^{-\varepsilon} \int_s^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-\varepsilon_1} ds_1, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i \int_s^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-\varepsilon_1} ds_1. \quad (16)$$

Wenn die s unendlich wächst, so ergibt sich aus (14)

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} &= i \left[\int_{-\infty}^0 2\kappa^n(s_1) n \gamma(s_1) e^{-n\varepsilon_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-2}=2}^{p_{i-1}-1} p_{i-1} \right. \right. \\
&\quad \left(\int_{-\infty}^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) (n-p_1+1) \gamma(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_{-\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)\varepsilon_2} \int_{-\infty}^{s_2} \dots \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 + \int_{\infty}^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \\
& \int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) (p_1-p_2) \gamma(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \cdots \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 + \cdots \\
& + \int_{\infty}^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \cdots \\
& \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) (p_{i-1}-1) \gamma(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 \Big\} \Big]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Ebenso ergeben sich aus (15) und (16)

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} &= i \left[\int_{\infty}^0 2\kappa^2(s_1) \cdot 2\gamma(s_1) e^{-2s_1} ds_1 + 2 \int_{\infty}^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-s_1} \int_{\infty}^{s_1} 2\kappa(s_2) e^{-s_2} ds_2 ds_1 \right. \\
& \left. + 2 \int_{\infty}^0 2\kappa(s_1) e^{-s_1} \int_{\infty}^{s_1} 2\kappa(s_2) \gamma(s_2) e^{-s_2} ds_2 ds_1 \right]. \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} = i \int_{\infty}^0 2\kappa(s_1) \gamma(s_1) e^{-s_1} ds_1. \quad (19)$$

Da der reelle Teil von $\frac{dF(\varepsilon)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ gleich der 0 für alle stetigen Funktionen $\gamma(s)$ ist, so können wir nach dem Lebesgueschen Satz die Funktion $\gamma(s)$ durch eine neue Funktion $\eta_1(s)$ ersetzen, so dass

$$\begin{aligned}
\eta_1(s) &= \gamma(s) \quad \text{in } 0 \leq s < a \\
\eta_1(s) &= 0 \quad \text{in } a < s < \infty
\end{aligned}$$

ist.

Für die $\eta_1(s)$ nimmt die $\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$ die folgende Form an

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} &= i \left[\int_a^0 2\kappa^n(s_1) n \gamma(s_1) e^{-ns_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \right. \\
& \left. \left(\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) (n-p_1+1) \gamma(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_{\infty}^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \cdots \right. \right. \\
& \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 + \int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \\
& \int_a^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) (p_1-p_2) \gamma(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \cdots \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 + \cdots \\
& + \int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_a^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_a^{s_2} \cdots \\
& \left. \left. \int_a^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) (p_{i-1}-1) \gamma(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 \right\} \right].
\end{aligned}$$

Wir differenzieren nun die rechte Seite der obigen Formel, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da} \left(\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} \right) = & -i \left[2\kappa^n(a) n \gamma(a) e^{-na} + \sum_{i=2}^n \left\{ \sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \right. \\
& \left. \left(2\kappa^{n-p_1+1}(a) (n-p_1+1) \gamma(a) e^{-(n-p_1+1)a} \int_{\infty}^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \dots \right. \right. \\
& \int_{\infty}^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_2 + 2\kappa^{p_1-p_2}(a) (p_1-p_2) \gamma(a) e^{-(p_1-p_2)a} \\
& \int_{\infty}^a 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3) e^{-(p_2-p_3)s_3} \int_{\infty}^{s_3} \dots \int_{\infty}^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_3 \\
& \int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} ds_1 + \dots + 2\kappa^{p_{i-1}-1}(a) (p_{i-1}-1) \gamma(a) e^{-(p_{i-1}-1)a} \\
& \int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_a^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_a^{s_2} \dots \\
& \left. \left. \int_a^{s_{i-2}-1} 2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1}) e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}} ds_{i-1} \cdots ds_2 ds_1 \right\} \right]. \quad (20)
\end{aligned}$$

Ebenfalls bekommen wir aus (18) und (19)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da} \left(\frac{d\tilde{g}_2(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} \right) = & -i \left[2\kappa^2(a) 2\gamma(a) e^{-2a} + 4\gamma(a) \gamma(a) e^{-a} \int_{\infty}^a 2\kappa(s_2) e^{-s_2} ds_2 \right. \\
& \left. + 4\kappa(a) \gamma(a) e^{-a} \int_a^0 2\kappa(s_2) e^{-s_2} ds_2 \right]. \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{da} \left(\frac{d\tilde{g}_1(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}} \right) = -i 2\kappa(a) \gamma(a) e^{-a}. \quad (22)$$

Da wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass $\gamma(a) \neq 0$ ist, so bekommen wir den folgenden

Satz 1. Es sei

$$\begin{aligned}
\varphi = f(z) = & z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots \\
= & z + g_1(0) z^2 + \cdots + g_{n-1}(0) z^n + \cdots
\end{aligned}$$

die normierte, reguläre und schlichte, Funktion in $|z| < 1$, so dass der reelle Teil der Koeffizient von z^n der Taylorsche Entwicklung von $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ das Maximum annimmt. Es gilt dann an allen Punkten s in $0 \leq s < \infty$, bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte von $\kappa(s)$,

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{S}(n+1)(n+2) \left[2\kappa^{n+1}(s) (n+1) e^{-(n+1)s} + \sum_{i=2}^{n+1} \left\{ \sum_{p_1=i}^{n+1} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \right. \\
& \left. \left(2\kappa^{n-p_1+2}(s) (n-p_1+2) e^{-(n-p_1+2)s} \int_{\infty}^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \dots \right. \right. \\
& \left. \int_{\infty}^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_2 + 2\kappa^{p_1-p_2}(s) (p_1-p_2) e^{-(p_1-p_2)s} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\infty}^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3} \int_{\infty}^{s_3} \dots \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \dots ds_3 \\
& \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1} ds_1 + \dots + 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s} \\
& \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+2}(s_1)e^{-(n-p_1+2)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \\
& \int_s^{s_{i-2}} 2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}} ds_{i-1} \dots ds_3 ds_1 \Big) \Big] + \sum_{k=1}^n (-1)^k \\
& \left[\sum_{j_{k+1}=1}^{n-k+1} \sum_{j_k=2}^{n-k+2} \sum_{j_{k-1}=2}^{n-k+2} \dots \sum_{j_1=2}^{n-k+2} j_1 j_2 \dots j_k j_{k+1} (j_{k+1}+1) \Im \left\{ \beta_{j_1-1} g_{j_2-1}(0) \dots \right. \right. \\
& g_{j_k-1}(0) g_{j_{k+1}}(0) + g_{j_1-1}(0) \beta_{j_2-1} g_{j_3-1}(0) \dots g_{j_k-1}(0) g_{j_{k+1}}(0) + \dots + g_{j_1-1}(0) \dots \\
& \left. \left. g_{j_k-1}(0) \beta_{j_{k+1}} \right\} \right] = 0. \tag{23}
\end{aligned}$$

für $n \geq 2$, wo

$$\begin{aligned}
\beta_j &= 2\kappa^j(s) j e^{-js} + \sum_{i=2}^j \left\{ \sum_{p_1=i}^j p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \dots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1} \right. \\
& \left(2\kappa^{j-p_1+1}(s)(j-p_1+1)e^{-(j-p_1+1)s} \int_{\infty}^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_{\infty}^{s_2} \dots \right. \\
& \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \dots ds_2 + 2\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s} \\
& \int_{\infty}^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3} \int_{\infty}^{s_3} \dots \int_{\infty}^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \dots ds_3 \\
& \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1} ds_1 + \dots + 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s} \\
& \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \dots \\
& \left. \left. \int_s^{s_{i-2}} 2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}} ds_{i-1} \dots ds_3 ds_1 \right) \right\}, \quad (j \geq 3) \\
\beta_2 &= 2\kappa^2(s) 2e^{-2s} + 4\kappa(s)e^{-s} \int_{\infty}^s 2\kappa(s_2)e^{-s_2} ds_2 + 4\kappa(s)e^{-s} \int_s^0 2\kappa(s_2)e^{-s_2} ds_2, \\
\beta_1 &= 2\kappa(s)e^{-s}
\end{aligned}$$

ist.

Für $n=1$ gilt es an allen Punkten s in $0 \leq s < \infty$, bis auf endlich viele Unstetigkeitspunkte von $\kappa(s)$,

$$\begin{aligned}
& 3\Im \left[4\kappa^2(s)e^{-2s} + 4\kappa(s)e^{-s} \int_{\infty}^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1} ds_1 \right] - 2\Im \left\{ 4\kappa(s)e^{-s} \right. \\
& \left. \int_{\infty}^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1} ds_1 \right\} = 0. \tag{24}
\end{aligned}$$

UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA.
(Eingegangen am 29. Dezember, 1961)