ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (III)

KEN'ITI KOSEKI

Ich veröffentlichte bis jetzt die Arbeiten "ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN" (I)[1] und (II)[2]. Die Berechnungen im 4. Schritte in meiner Arbeit (I) waren aber bedauerlich falsch. Ich wollte daher diesen Irrtum berichtigen, und ich veröffentlichte meine Arbeit (II).

Die Berechnungen in meiner Arbeit (II) sind aber sehr kompliziert. Überdies ist es mir unbestimmt, dass die Formeln (48) und (89) in der Arbeit (II) voneinander unabhängig oder nicht sind.

In der vorliegenden Arbeit will ich die Gleichung (32) in meiner Arbeit (I) direkt lösen.

§ I.

Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Kreises $|z|<1$ regulären und schlichten Funktionen von der Form

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots \qquad + p_n z^{n+1} + \cdots$$

die normierten und schlichten Funktionen. Wir bezeichnen für eine feste n die kleinste obere Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten p_n von allen normierten und schlichten Funktionen in $|z|<1$ mit M_n.

Es gibt dann bekanntlich eine schlichte Funktion $z+q_1z^2+\cdots+q_nz^{n+1}+\cdots$ mit $q_n=M_n$. Folglich nehmen wir an, dass für die Funktion $\varphi=k(z)=z+p_1z^2+\cdots+p_nz^{n+1}+\cdots$ es $p_n=M_n$ ist.

Es besteht dann für die Funktion $\varphi=k(z)$ eine Löwnersche Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(z,t)}{\partial z}\, z\, \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}, \qquad 0 \leqq t < \infty \\ &g(z,0) = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots \qquad + p_n z^{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

wo $\kappa(t)$ eine stetige Funktion von t darstellt und $|\kappa(t)|=1$ ist. Wir bezeichnen die Lösung der Gleichung (1) mit $g(z,t)=e^t\{z+g_1(t)z^2+\cdots+g_n(t)z^{n+1}+\cdots\}$.

Wenn $n=2$ ist, so besteht es

---

1). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN. Math. Journ. Okay. Univ. Vol. 9, No. 2, 1960.

2). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (II). Math. Journ. Okay. Univ. Vol. 10, No. 2, 1961.

$$\Im\Big[\int_s^0 2\kappa^2(s_1)2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1+2\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+2$$
$$\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+2g_1(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0, \qquad (2)$$

wo $\eta(s)$ eine beliebige, beschränkte und stetige Funktion in $0\leqq s<\infty$ bedeutet. Wenn die s unendlich wächst, so ergibt sich aus (2)

$$\Im\Big[\int_\infty^0 2\kappa^2(s_1)2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1+2\int_\infty^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+2$$
$$\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1\Big]=0. \qquad (3)$$

Wenn $n\geqq 3$ ist, so besteht es[3]

$$\Im\Big[\int_s^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$
$$\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$
$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\cdots+$$
$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Big)\Big\}+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}$$
$$\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)(n-\mu)\eta(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\sum_{i=\mu+2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$
$$\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-\mu+1}\Big(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$
$$\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_1+$$
$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_1+\cdots+$$
$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))\eta(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}$$
$$\cdots ds^1\Big)\Big\}+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0, \qquad (4)$$

wo $\eta(s)$ eine beliebige, beschränkte und stetige, Funktion in $0\leqq s<\infty$ bedeutet. Wenn die s unendlich wächst, so ergibt sich aus (4)

$$\Im\Big[\Big[\int_{\infty}^{0}2\kappa^{n}(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Big(\Big(\int_{\infty}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_1)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\int_{\infty}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots\int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1+\cdots$$

$$+\int_{\infty}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{\infty}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{\infty}^{s_2}\cdots$$

$$\int_{\infty}^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1\Big)\Big)\Big\}\Big]=0. \qquad (5)$$

Wir wollen zunächst die Gleichung (3) lösen. Da die Gleichung (3) durch beliebige, beschränkte und stetige, Funktion $\eta(s)$ in $0\leqq s<\infty$ erfüllt wird, so besteht es nach dem Lebesgueschen[4] Satz auch für die Funktion $\eta_1(s)$, so dass

$$\begin{aligned}\eta_1(s)&=\eta(s) &&\text{in}\quad 0\leqq s\leqq a\\ \eta_1(s)&=0 &&\text{in}\quad a<s<\infty\end{aligned}$$

ist.

Für die $\eta_1(s)$ nimmt die Gleichung (3) die folgende Form an.

$$\Im\Big[\int_{a}^{0}2\kappa^2(s_1)2\eta(s_1)e^{-2s_1}ds_1+2\int_{a}^{0}2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}\int_{\infty}^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+2$$

$$\int_{a}^{0}2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_{a}^{s_1}2\kappa(s_2)\eta(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1\Big]=0. \qquad (6)$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (6) in bezug auf a, so erhalten wir

$$-\Im\Big[2\kappa^2(a)2\eta(a)e^{-2a}+4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}\int_{\infty}^{a}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+4\kappa(a)\eta(a)e^{-a}$$

$$\int_{a}^{0}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\Big]=0.$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\eta(a)\neq0$ ist. Daher bekommen wir

---

3). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN. (I) S. 185.

4). S. Saks. Theory of the Integral. S. 29.

$$\Im\left[\kappa^2(a)e^{-2a}+\kappa(a)e^{-a}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0.$$

Da die a beliebig ist, erhalten wir

$$\Im\left[\kappa^2(s)e^{-2s}+\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0, \quad 0\leqq s<\infty. \tag{7}$$

Umgekehrt aus (7) folgt die Folmel (6) ohne weiteres.

Wir lösen nun die Gleichung

$$\Im\Bigg[\int_a^0 2\kappa^n(s_1)n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^{n}\Bigg\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Bigg(\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots$$

$$\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\cdots$$

$$+\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots$$

$$\int_a^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Bigg)\Bigg\}\Bigg]=0. \tag{8}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (8) in bezug auf a, so erhalten wir

$$-\Im\Bigg[2\kappa^n(a)n\eta(a)e^{-na}+\sum_{i=2}^{n}\Bigg\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$

$$\Bigg(2\kappa^{n-p_1+1}(a)(n-p_1+1)\eta(a)e^{-(n-p_1+1)a}\int_\infty^{a}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_\infty^{s_2}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_2+2\kappa^{p_1-p_2}(a)(p_1-p_2)\eta(a)e^{-(p_1-p_2)a}$$

$$\int_\infty^{a}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3$$

$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\quad+2\kappa^{p_{i-1}-1}(a)(p_{i-1}-1)\eta(a)e^{-(p_{i-1}-1)a}$$

$$\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots$$

$$\int_a^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2ds_1\Bigg)\Bigg\}\Bigg]=0.$$

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\eta(a)\neq 0$ ist. Daher bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\Im\Big[\kappa^n(s)ne^{-ns}+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Big(\kappa^{n-p_1+1}(s)(n-p_1+1)e^{-(n-p_1+1)s}\\
&\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\\
&ds_2+\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\int_\infty^{s_3}\cdots\\
&\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\quad+\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}\\
&\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\\
&\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]=0. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Umgekehrt, aus (9) folgt ohne weiteres die Folmel (8). Also bekommen wir den folgenden

Satz I. *Es sei*

$$\begin{aligned}
\varphi = k(z) &= z+p_1z^2+\cdots \qquad +p_nz^{n+1}+\cdots\\
&= z+g_1(0)z^2+\cdots \qquad +g_n(0)z^{n+1}+\cdots
\end{aligned}$$

die normierte und schlichte Funktion in $|z|<1$, *so dass* $p_n=M_n$ *ist. Es gilt dann*

$$\Im\Big[\kappa^2(s)e^{-2s}+\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0 \text{ in } 0\leqq s<\infty, \text{ wenn } n=2 \text{ ist,}$$

$$\begin{aligned}
&\Im\Big[\kappa^n(s)ne^{-ns}+\sum_{i=2}^{n}\Big\{\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Big(\kappa^{n-p_1+1}(s)(n-p_1+1)e^{-(n-p_1+1)s}\\
&\int_\infty^s 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_\infty^{s_2}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots\\
&ds_2+\kappa^{p_1-p_2}(s)(p_1-p_2)e^{-(p_1-p_2)s}\int_\infty^s 2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\\
&\int_\infty^{s_3}\cdots\int_\infty^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_3\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1+\cdots\\
&+\kappa^{p_{i-1}-1}(s)(p_{i-1}-1)e^{-(p_{i-1}-1)s}\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\\
&\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-2}}2\kappa^{p_{i-2}-p_{i-1}}(s_{i-1})e^{-(p_{i-2}-p_{i-1})s_{i-1}}ds_{i-1}\cdots ds_2ds_1\Big)\Big\}\Big]=0 \text{ in } 0\leqq s<\infty,
\end{aligned}$$

wenn $n\geqq 3$ *ist.*

§ 2.

Wir wollen nun die Gleichung

$$\Im\Big[\kappa^2(s)e^{-2s}+\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0, \quad 0\leqq s<\infty \qquad (7)$$

lösen. Wir setzen $\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 = a+ib$ und $\kappa(s)=e^{i\varphi(s)}$, so nimmt die Gleichung (7) die folgende Form an.

$$e^{-s}\, sin\ 2\varphi(s) + a\ sin\varphi(s) + b\ cos\varphi(s) = 0. \tag{10}$$

Wenn a und b gleichzeitig gleich der Null sind, so muss $sin 2\varphi(s) = 2 sin\varphi(s) cos\varphi(s) = 0$ sein. Da die Funktion $\varphi(s)$ stetig in $0 \leqq s < \infty$ ist, so muss $sin\varphi(s)=0$ in $0 \leqq s < \infty$ oder $cos\varphi(s)=0$ in $0 \leqq s < \infty$ sein. Wenn $sin\varphi(s)=0$ in $0 \leqq s < \infty$ ist, so muss $cos\varphi(s)=1$ oder $cos\varphi(s)=-1$ in $0 \leqq s < \infty$ sein. Damit muss $a=\pm 2$ sein. Ebenfalls, wenn $cos\varphi(s)=0$ in $0 \leqq s < \infty$ ist, so muss $b=\pm 2$ sein. Also können a und b keineswegs gleichzeitig gleich der Null sein.

Da a und b nicht gleichzeitig gleich der Null sind, so folgt aus (10)

$$a\ sin\varphi(\infty) + b\ cos\varphi(\infty) = 0. \tag{11}$$

Damit existiert $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = \varphi(\infty)$.

Anderseits besteht[5] es immer

$$g_1(s) = \int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 \Big/ e^{-s}.$$

Folglich ist

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Re \int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1}{e^{-s}} = -2\, cos\varphi(\infty). \tag{12}$$

Ebenfalls ist

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Im \int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1}{e^{-s}} = -2\, sin\varphi(\infty). \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt ohne weiteres $g_1(\infty) = -2\kappa(\infty)$. Also strebt[6] die Funktion $\frac{g(z,t)}{e^{-t}}$ gegen die Koebeschen Funktion $\frac{z}{(1+\kappa(\infty)z)^2}$, wenn t unendlich wächst.

Wir nehmen nun an, dass $sin\, 2\varphi(s)$ in $0 \leqq s \leqq \infty$ keineswegs verschwindet. Es muss dann in $0 \leqq s \leqq \infty$ stets $sin\ 2\varphi(s) = 2 sin\varphi(s) cos\varphi(s) > 0$ oder $sin 2\varphi(s) = 2 sin\varphi(s) cos\varphi(s) < 0$ sein. Wenn in $0 \leqq s \leqq \infty$ stets die Ungleichung $2 sin\varphi(s) cos\varphi(s) > 0$ besteht, so können wir annehmen, dass es immer in $0 \leqq s \leqq \infty$ die Ungleichung

5). K. Koseki. ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN. (I). S. 180. a. a. O.

6). Vgl. A. Schaeffer and D. Spencer. COEFFICIENT REGIONS FOR SCHLICHT FUNCTIONS. Coll. Public. 1950. S. 141.

$$0<\varphi(s)<\frac{\pi}{2}$$

$$\text{oder} \quad \pi<\varphi(s)<\frac{3}{2}\pi$$

besteht. Folglich muss $sin(s)\varphi\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1<0$ und ebenso $cos\varphi(s)$ $\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1<0$ sein. Daraus folgt

$$\left.\begin{aligned} sin\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1\leqq 0 \\ cos\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1\leqq 0. \end{aligned}\right\}$$

Anderseits ist es $sin\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1+cos\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0.$ Daher muss $sin\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ und $cos\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ sein. Da sowohl $sin\varphi(\infty)$ als auch $cos\varphi(\infty)$ nach der Annahme nicht gleich der Null ist, so muss $\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ sein; dies ist aber unmöglich, da es immer $0<\varphi(s)<\frac{\pi}{2}$ oder $\pi<\varphi(s)<\frac{3}{2}\pi$ in $0\leqq s\leqq\infty$ ist.

Ebenfalls kann es nicht sich ergeben, dass in $0\leqq s\leqq\infty$ stets $sin2\varphi(s)<0$ ist. Es gibt daher in $0\leqq s\leqq\infty$ mindestens einen Punkt s_2, so dass $sin2\varphi(s_2)=0$ ist.

Wir nehmen erstens an, dass $s_2\neq\infty$ ist. Aus $sin\,2\varphi(s_2)=0$ folgt dann $sin\varphi(s_2)=0$ oder $cos\varphi(s_2)=0$. Anderseits besteht es $e^{-s_2}sin\,2\varphi(s_2)+sin\,\varphi(s_2)$ $\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1+cos\varphi(s_2)\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0.$ Daher ist $\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1$ $=0$ oder $\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$, jenachdem $sin\varphi(s_2)=0$ oder $cos\varphi(s_2)=0$ ist.

Anderseits ist es $sin\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1+cos\varphi(\infty)\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1$ $=0$. Daher ist $sin\varphi(\infty)=0$ oder $cos\varphi(\infty)=0$, jenachdem $\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1$ $=0$ oder $\int_{\infty}^{0}2cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ ist. Edenfalls muss $sin2\varphi(\infty)=0$ sein.

Wir nehmen nun an, dass $\int_{\infty}^{0}2sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ ist. Wir differenzieren nun die linke Seite von (10), so erhalten wir aus (10)

$$\Big\{2e^{-s}cos2\varphi(s)+acos\varphi(s)-bsin\varphi(s)\Big\}\varphi'(s)-e^{-s}sin2\varphi(s)=0. \tag{14}$$

Wir setzen $e^{-s}=t$ und $\varphi(s)=\psi(t)$, so folgt es aus (14)

$$\Big\{2t\,cos2\psi(t)+a\,cos\psi(t)-b\,sin\psi(t)\Big\}\psi'(t)+sin2\psi(t)=0, \text{ in } 0<t\leqq 1. \tag{15}$$

Da $\varphi'(s)=-t\psi'(t)$ und $\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{\varphi'(s)}{e^{-s}}=\dfrac{\sin 2\varphi(\infty)}{a\cos\varphi(\infty)-b\sin\varphi(\infty)}=0$ ist, ist die Funktion $\psi(t)$ differenzierbar auch am Punkte $t=0$. Anderseits ist es offenbar, dass $\{2t\cos 2\psi(t)+a\cos\psi(t)-b\sin\psi(t)\}_{t=0}=a\neq 0$ ist. Nach dem Existenzsatz der Differentialgleichung gibt es nur eine einzige Lösung von (15), die in $0\leqq t\leqq t_0$ (genügend klein) der Gleichung (15) genügt. Diese Lösung wird offenbar durch $\psi(t)=\psi(0)=$ Konstante gegeben.

Folglich ist $\varphi(s)=\varphi(\infty)=$ Konstante in $-\log t_0\leqq s\leqq\infty$. Da das Bildgebiet von $|z|<1$ durch die Funktion $\varphi=k(z)$ gleich der vollen $-\varphi-$ Ebene $-$ eine analytische Kurve l ist, so muss $\varphi(s)=\varphi(\infty)=$ Konstante in $0\leqq s<\infty$ sein.

Wenn auch $\int_\infty^0 2\cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ ist, läuft Diskussion ganz analog. Also bekommen wir den folgenden

Satz II. Es sei $\varphi=k(z)$ *eine normierte, reguläre und schlichte, Funktion in* $|z|<1$ *von der Art, dass das Bildgebiet von* $|z|<1$ *durch* $\varphi=k(z)$ *gleich der vollen-*φ*- Ebene — eine analytische Kurve* l *ist.*

Wenn für $\varphi=k(z)$ *die Gleichung*

$$\Im\left[\kappa^2(s)e^{-2s}+\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0$$

besteht, so muss die Kurve l *mit der Halbgerade übereinstimmen, und die* $\kappa^2(s)$ *ist immer gleich* ± 1.

Wir behandeln nun den Fall, wo $n=3$ ist. Es besteht dann aus (9)

$$\Im\Big[6\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa(s)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+6\kappa(s)$$
$$\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4\kappa(s)\int_s^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+12\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+8\kappa^2(s)e^{-s}$$
$$\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0. \tag{16}$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned}&\kappa(s)=e^{i\varphi(s)}\\ &12\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+4\int_\infty^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1=\alpha+i\beta\\ &12\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1=\gamma+i\delta\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle.

I. Fall). Die α und β von (17) sind nicht gleichzeitig gleich der Null.

2. Fall). Sowohl α als auch β ist gleich der Null.

Wir behandeln erstens den

I. Fall). In diesem Falle existiert $\lim_{s\to\infty} \varphi(s)=\varphi(\infty)$, und die $\varphi(\infty)$ genügt der Gleichung

$$\beta\ cos\varphi(\infty)+\alpha\ sin\varphi(\infty)=0. \tag{18}$$

Indem wir die linke Seite von (16) differenzieren, erhalten wir

$$\Im\Big[18\kappa^2(s)e^{-2s}+12\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+6\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4$$
$$\int_s^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+24\kappa(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+16\kappa(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]\kappa'(s)-$$
$$\Im\Big[16\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+8\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0.$$

Es ist aber $\kappa'(s)=i\kappa(s)\varphi'(s)$. Folglich ergibt sich aus dem obigen

$$\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa(s)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)ds_2ds_1+6\kappa(s)$$
$$\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4\kappa(s)\int_s^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+24\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+16\kappa^2(s)e^{-s}$$
$$\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]\varphi'(s)-\Im\Big[16\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 \kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+8\kappa^2(s)e^{-s}$$
$$\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]=0. \tag{19}$$

Wenn s unendlich wächst, so strebt $\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa(s)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}$ $\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+6\kappa(s)\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4\kappa(s)\int_s^0 2\kappa^2(s)^{-2s_1}ds_1+24\kappa^2(s)e^{-s}$ $\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]$ gegen den Wert $\Re\Big[12\kappa(\infty)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1$ $+4\kappa(\infty)\int_\infty^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1\Big]=\alpha\ cos\varphi(\infty)-\beta\ sin\varphi(\infty)$.

Wenn $\alpha\ cos\varphi(\infty)-\beta\ sin\varphi(\infty)=0$ ist, so besteht nach (18) die folgende Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}\beta\ cos\varphi(\infty)+\alpha\ sin\varphi(\infty)&=0\\ -\beta\ sin\varphi(\infty)+\alpha\ cos\varphi(\infty)&=0\end{aligned}\right\}.$$

Da $\begin{vmatrix}\cos\varphi(\infty) & \sin\varphi(\infty)\\ -\sin\varphi(\infty) & \cos\varphi(\infty)\end{vmatrix}=1$ ist, so müssen $\alpha=0$ und $\beta=0$ sein. Dies widerspricht aber der Annahme von dem I. Falle. Daher ist $\alpha\cos\varphi(\infty)-\beta\sin\varphi(\infty)\neq 0$.

Da $\alpha\ cos\varphi(\infty)-\beta\ sin\varphi(\infty)\neq 0$ ist, so ist $\varphi(s)$ in der geeigneten Umgebung von $s=+\infty$ beliebig oft differenzierbar. Aus (19) folgt ohne weiteres

$$\varphi'(s)=\frac{\Im\left[16\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+8\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]}{A(s)} \tag{20}$$

, wo $A(s)=\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa(s)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+6\kappa(s)$
$\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4\kappa(s)\int_s^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+24\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+16\kappa^2(s)e^{-s}$
$\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]$

ist. Daher ist

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\varphi'(s)}{e^{-s}}=\frac{\delta\cos 2\varphi(\infty)+\gamma\sin 2\varphi(\infty)}{\alpha\cos\varphi(\infty)-\beta\sin\varphi(\infty)}\,. \tag{21}$$

Wir nehmen an, dass $\varphi(\infty)=0$ und $\left(\frac{\varphi'(s)}{e^{-s}}\right)_\infty=0$ ist. Es ist dann nach der (21) $\delta=0$. Es gibt aber eine positive Zahl M, so dass es in der geeigneten Umgebung von $s=+\infty$

$|\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-2s}+12\kappa(s)\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1+6\kappa(s)$
$\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+4\kappa(s)\int_s^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+24\kappa^2(s)e^{-s}\int_s^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+16\kappa^2(s)e^{-s}$
$\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]|>M$

gilt. Daher folgt aus (20)

$$|\varphi(s)|\leqq\Big|\int_\infty^s\Big\{16\sin 3\varphi(s_1)e^{-2s_1}+12\sin 2\varphi(s_1)e^{-s_1}\gamma-4\sin 2\varphi(s_1)e^{-s_1}$$
$$\int_\infty^{s_1}2\cos\varphi(s_2)e^{-s_2}ds_2-4\cos 2\varphi(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1}2\sin\varphi(s_2)e^{-s_2}ds_2\Big\}ds_1\Big|\ M. \tag{22}$$

Da $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{\varphi(s)}{e^{-s}}=\lim\limits_{s\to\infty}\frac{\varphi'(s)}{-e^{-s}}=-\frac{\delta\cos 2\varphi(\infty)+\gamma\sin 2\varphi(\infty)}{\alpha\cos\varphi(\infty)-\beta\sin\varphi(\infty)}$ ist, gibt es eine positive Zahl B von der Art, dass es in $s\leqq 0<\infty$

$$|\varphi(s)|\leqq Be^{-s} \tag{23}$$

gilt. Anderseits besteht es immer $|\sin 3\varphi(s)|\leqq 3|\varphi(s)|$. Daher folgt aus (22)

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M}\{48\frac{e^{-3s}}{3}+24\frac{e^{-2s}}{2}|\gamma|+16\frac{e^{-3s}}{3}+8\frac{e^{-3s}}{2\cdot3}\}\leqq\frac{B}{M}e^{-}$$
$$\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{2\cdot3}\right). \tag{24}$$

Wir ersetzen die Abschätzung (24) in (22), so bekommen wir

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^2}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{48}{4}+\frac{24}{3}|\gamma|+\frac{16}{4}+\frac{8}{3\cdot4}\right)e^{-3s}.$$

Wir nehmen nun an, dass es im allgemeinen

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^{n-1}}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{48}{4}+\frac{24}{3}|\gamma|+\frac{16}{4}+\frac{8}{3\cdot4}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{48}{n+1}+\frac{24}{n}|\gamma|+\frac{16}{n+1}+\frac{8}{n(n+1)}\right)e^{-ns} \tag{25}$$

gilt für $n\geqq2$. Wir ersetzen die (25) in (22), so gewinnen wir

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^{n}}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{48}{4}+\frac{24}{3}|\gamma|+\frac{16}{4}+\frac{8}{3\cdot4}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{48}{n+1}+\frac{24}{n}|\gamma|+\frac{16}{n+1}+\frac{8}{n(n+1)}\right)\left(\frac{48}{n+2}e^{-(n+2)s}+\frac{24}{n+1}|\gamma|e^{-(n+1)s}+\frac{16}{n+2}e^{-(n+2)s}\right.$$
$$\left.+\frac{8}{(n+1)(n+2)}e^{-(n+2)s}\right)\leqq\frac{B}{M^{n}}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{18}{6}\right)\left(\frac{48}{4}+\frac{24}{3}|\gamma|+\frac{16}{4}+\frac{8}{3\cdot4}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{48}{n+2}+\frac{24}{n+1}|\gamma|+\frac{16}{n+2}+\frac{8}{(n+1)(n+2)}\right)e^{-(n+1)s}.$$

Wir bestätigen daher uns, dass die Formel (25) im allgemeinen für alle $n\geqq2$ gilt. Aus (25) folgt ohne weiteres

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^{n-1}}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{6}\right)^{n-1}e^{-ns}=Be^{-s}\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{48}{3}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{6}\right)e^{-s}\right\}^{n}. \tag{26}$$

Wenn $\frac{1}{M}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{6}\right)e^{-s}<1$ ist, so strebt $\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{48}{3}+\frac{24}{2}|\gamma|+\frac{16}{3}+\frac{8}{6}\right)e^{-s}\right\}^{n}$ gegen Null mit $\frac{1}{n}$. Folglich ist $\varphi(s)=0$ in einer geeigneten Umgebung von $s=+\infty$. Daher muss $\varphi(s)=0$ in $0\leqq s<\infty$ sein.

Wir wollen nun den 2. Fall behandeln.

2. Fall). In diesem Falle nimmt die Formel (16) die folgende Form an.

$$\Im\left[6\kappa^3(s)e^{-2s}+2\kappa(s)\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1+12\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1-4\kappa^2(s)e^{-s}\right.$$
$$\left.\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0. \tag{27}$$

Es ist aber

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty}\frac{\Im 6\kappa^3(s)e^{-2s}}{e^{-s}}=0.\\
&\lim_{s\to\infty}\frac{\Im\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1}{e^{-s}}=0,\quad \lim_{s\to\infty}\frac{\Re\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1}{e^{-s}}=0.\\
&\lim_{s\to\infty}\frac{\Im e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1}{e^{-s}}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Wir nehmen nun an, dass $\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 \neq 0$ ist. Es existiert dann nach (27) und (28) $\lim_{s\to\infty} \varphi(s) = \varphi(\infty)$, und die $\varphi(\infty)$ genügt der Gleichung

$$\cos 2\varphi(\infty)\Im\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + \sin 2\varphi(\infty)\Re\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 = 0.$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (27), so bekommen wir

$$\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-2s} + 2\kappa(s)\int_{\infty}^{s} 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 24\kappa^2(s)e^{-s}\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 - 8\kappa^2(s)e^{-s}$$
$$\int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds\Big]\varphi'(s) - \Im\Big[16\kappa^3(s)e^{-2s} + 12\kappa^2(s)e^{-s}\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1$$
$$-4\kappa^2(s)e^{-s}\int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big] = 0. \tag{29}$$

Wenn s unendlich wächst, so strebt $\Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-s} + 2\kappa(s)e^{s}\int_{\infty}^{s} 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 24\kappa^2(s)\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 - 8\kappa^2(s)\int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]$ gegen $\Re\Big[24\kappa^2(\infty)\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big] = 24\Big\{\cos 2\varphi(\infty)\Re\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 - \sin 2\varphi(\infty)\Im\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big\}$.
Es gibt daher eine positive Zahl M, so dass in einer geeigneten Umgebung von $s = +\infty$ die Ungleichung

$$A(s) = \Re\Big[18\kappa^3(s)e^{-s} + 2\kappa(s)e^{s}\int_{\infty}^{s} 2\kappa^2(s_1)e^{-s_1}ds_1 + 24\kappa^2(s)\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1$$
$$-8\kappa^2(s)\int_{\infty}^{s} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big] > M$$

gilt.

Aus (27) und (29) folgt ohne weiteres

$$\varphi'(s) = \frac{\Im\Big[10\kappa^3(s)e^{-s} - 2\kappa(s)e^{s}\int_{\infty}^{s} 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1\Big]}{A(s)}. \tag{30}$$

Foglich ist

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\varphi'(s)}{e^{-s}} = \frac{\Im 6\kappa^3(\infty)}{\Re\Big[24\kappa^2(\infty)\int_{\infty}^{0} 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]}.$$

Damit ist es $\lim_{s\to\infty}\frac{\varphi'(s)}{e^{-s}} = 0$, wenn $\varphi(\infty) = 0$ ist.

Wir nehmen nun an, dass $\varphi(\infty) = 0$ ist. Es besteht dann aus (30)

$$|\varphi(s)|\leqq\left|\int_s^\infty\left\{10\sin 3\varphi(s_1)s^{-s_1}-2e^{s_1}\sin\varphi(s_1)\int_\infty^{s_1}2\cos 2\varphi(s_2)e^{-s_2}ds_2\right.\right.$$

$$\left.\left.-2e^{s_1}\cos\varphi(s_1)\int_\infty^{s_1}2\sin 2\varphi(s_2)e^{-2s_2}ds_2\right\}ds_1\right|\Big/M. \tag{31}$$

Da $\varphi(\infty)=0$ ist, so gibt es eine positive Zahl B, derart dass es

$$|\varphi(s)|\leqq Be^{-s}$$

in $0\leqq s\leqq\infty$ besteht. Daraus und aus (31) folgt ohne weiteres

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M}\left(\frac{30}{2}e^{-2s}+\frac{4}{2\cdot2}e^{-2s}+\frac{8}{2\cdot3}e^{-2s}\right)=\frac{B}{M}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)e^{-2s}.$$

Indem wir diese Ungleichung in die Formel (31) ersetzen, bekommen wir

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^2}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{30}{3}+\frac{4}{2\cdot3}+\frac{8}{3\cdot4}\right)e^{-3s}.$$

Wir nehmen an, dass es im allgemeinen

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^n}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{30}{3}+\frac{4}{2\cdot3}+\frac{8}{3\cdot4}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{30}{n+1}+\frac{4}{2(n+1)}+\frac{8}{(n+1)(n+2)}\right)e^{-(n+1)s} \tag{32}$$

besteht. Wir ersetzen (32) in (31), so gewinnen wir

$$|\varphi(s)|\leqq\frac{B}{M^{n+1}}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)\left(\frac{30}{3}+\frac{4}{2\cdot3}+\frac{8}{3\cdot4}\right)\cdots$$
$$\left(\frac{30}{n+2}+\frac{4}{2(n+2)}+\frac{8}{(n+2)(n+3)}\right)e^{-(n+2)s}.$$

Daher besteht die Ungleichung (32) für alle $n\geqq1$.

Aus (32) folgt ohne weiteres

$$|\varphi(s)|\leqq Be^{-s}\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)e^{-s}\right\}^n.$$

Wenn $\frac{1}{M}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)e^{-s}<1$ ist, so strebt $\left\{\frac{1}{M}\left(\frac{30}{2}+\frac{4}{2\cdot2}+\frac{8}{2\cdot3}\right)e^{-s}\right\}^n$ gegen Null mit $\frac{1}{n}$. Daher ist $\varphi(s)=0$ überall in einer geeigneten Umgebung von $s=+\infty$. Daher muss $\varphi(s)=0$ in $0\leqq s<\infty$ sein.

Zweitens nehmen wir an, dass $\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1=0$ ist. Aus (27) folgt dann

$$\Im\left[6\kappa^3(s)e^{-2s}+2\kappa(s)\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1-4\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0. \tag{33}$$

Es existiert aber nach dem Schaeffer-Spencerschen[7] Satz $\lim_{s\to\infty}\kappa(s)=\kappa(\infty)$. Aus (33)

$$\mathfrak{J}\, 12\kappa^3(\infty)=0. \tag{34}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (33), so bekommen wir

$$\Re\left[18\kappa^3(s)e^{-2s}+2\kappa(s)\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1-8\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]\varphi'(s)$$

$$-\mathfrak{J}\left[16\kappa^3(s)e^{-2s}-4\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]=0. \tag{35}$$

Es ist aber

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Re\left[18\kappa^3(s)e^{-2s}+2\kappa(s)\int_\infty^s 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1-8\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]}{e^{-2s}}$$

$$=\Re 32\kappa^3(\infty)$$

und $$\lim_{s\to\infty}\frac{\mathfrak{J}\left[16\kappa^3(s)e^{-2s}-4\kappa^2(s)e^{-s}\int_\infty^s 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1\right]}{e^{-2s}}=\mathfrak{J}\, 24\kappa^3(\infty).$$

Daraus und aus (34) und (35) folgt sofort

$$\lim_{s\to\infty}\varphi'(s)=0.$$

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\infty^s 2\sin\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=u_1(s)\\
&\int_\infty^s 2\cos\varphi(s_1)e^{-s_1}ds_1=v_1(s)\\
&\int_\infty^s 2\cos 2\varphi(s_1)e^{-2s_1}ds_1=w_1(s)\\
&\int_\infty^s 2\sin 2\varphi(s_1)e^{-2s_1}ds_1=x_1(s)\\
&e^{-s}=t
\end{aligned}\right\}.$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$\frac{du_1}{dt}=-2\sin\varphi(s)$$

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}=2e^s\varphi'(s)\cos\varphi(s)$$

usw. Der Einfachheit halber setzen wir $u_1(s)=u_1(t)$, $v_1(s)=v_1(t)$ usw. Es folgt dann aus (35)

7). A. Schaeffer and D. Spencer. S. 141. a. a. O.

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}=2\frac{\cos\varphi(s)}{t}\frac{\frac{16}{4}\left(\frac{dw_1}{dt}\frac{du_1}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\frac{dv_1}{dt}\right)t+2\left(\frac{dw_1}{dt}u_1+\frac{dx_1}{dt}v_1\right)}{\frac{18}{4}\left(\frac{dw_1}{dt}\frac{dv_1}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\frac{du_1}{dt}\right)t-\left(\frac{dv_1}{dt}w_1-\frac{du_1}{dt}x_1\right)+4\left(v_1\frac{dw_1}{dt}-u_1\frac{dx_1}{dt}\right)}. \tag{36}$$

Es ist aber

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty} u_1(s)=\lim_{t\to 0} u_1(t)=0,\\
&\lim_{s\to\infty} v_1(s)=\lim_{t\to 0} v_1(t)=0,\\
&\lim_{s\to\infty} w_1(s)=\lim_{t\to 0} w_1(t)=0,\\
&\lim_{s\to\infty} x_1(s)=\lim_{t\to 0} x_1(t)=0,\\
&\lim_{t\to 0}\frac{du_1(t)}{dt}=\lim_{s\to\infty}-2\sin\varphi(s)=0,\\
&\lim_{t\to 0}\frac{dv_1(t)}{dt}=\lim_{s\to\infty}-2\cos\varphi(s)=-2,\\
&\lim_{t\to 0}\frac{dw_1(t)}{dt}=\lim_{s\to\infty}-2\cos2\varphi(s)e^{-s}=0,\\
&\lim_{t\to 0}\frac{dx_1}{dt}=\lim_{s\to\infty}-2\sin2\varphi(s)e^{-s}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Wir nehmen nun an, dass $\lim_{s\to\infty}\frac{\varphi(s)}{e^{-s}}=0$ ist. Wir können dann leicht berecchnen

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\left[\frac{16}{4}\left(\frac{dw_1}{dt}\frac{du_1}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\frac{dv_1}{dt}\right)t+2\left(\frac{dw_1}{dt}u_1+\frac{dx_1}{dt}v_1\right)\right]=0.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left[\frac{18}{4}\left(\frac{dw_1}{dt}\frac{dv_1}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\frac{du_1}{dt}\right)t-\left(\frac{dv_1}{dt}w_1-\frac{du_1}{dt}x_1\right)+4\left(v_1\frac{dw_1}{dt}-u_1\frac{dx_1}{dt}\right)\right]$$
$$=\Re\,32\kappa^3(\infty)=32.$$

Wir setzen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du_1}{dt}=\alpha_1(t),\\
&\frac{dv_1}{dt}=\beta_1(t)=\sqrt{2-\alpha^2(t)},\\
&\frac{dw_1}{dt}=\gamma_1(t)=-2t\left(1-\frac{\alpha_1^2(t)}{2}\right),\\
&\frac{dx_1}{dt}=\delta_1(t)=-2t\sqrt{2-\alpha_1^2(t)}.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Es folgt dann aus (36) und (37)

$$\frac{d\alpha_1(t)}{dt} = -\frac{\beta_1(t)}{t}.$$

$$\frac{\frac{16}{4}(\alpha_1(t)\gamma_1(t)+\beta_1(t)\delta_1(t))t + 2(\gamma_1(t)u_1(t)+\delta_1(t)v_1(t))}{\frac{18}{4}(\gamma_1(t)\beta_1(t)-\delta_1(t)\alpha_1(t))t-(\beta_1(t)w_1(t)-\alpha_1(t)x_1(t))+4(\gamma_1(t)v_1(t)-\delta_1(t)u_1(t))}. \tag{38}$$

Die Lösungen von der Gleichungssystem (37) und (38) mit der Anfangsbedingung $u_1(t)_{t=0}=0$, $v_1(t)_{t=0}=0$, $w_1(t)_{t=0}=0$, $x_1(t)_{t=0}=0$ und $\alpha_1(t)_{t=0}=0$ sind in einer Umgebung von $t=0$ eindeutig bestimmt. Es ist nämlich

$$\alpha_1(t) = 0.$$

Also ist $\varphi(s)=0$ stets in $s\leqq 0<\infty$.

Anderseits folgt daraus, dass $\varphi(s)=0$ ist,

$$12\int_\infty^0 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_\infty^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2ds_1 + 4\int_\infty^0 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 = 20 \neq 0.$$

Folglich kann der 2. Fall) nicht sich in der Tat ergeben.

Wir gewinnen daher den folgenden

Satz III. *Es sei*

$$\varphi = k(z) = z + p_1z^2 + p_2z^3 + \cdots$$

eine normierte, reguläre und schlichte, Funktion in $|z|<1$ *von der Art, dass die* p_2 *gleich der kleinsten oberen Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von* z^3 *von allen normierten, regulären und schlichten, Funktionen in* $|z|<1$ *ist.*

Es besteht dann für $\varphi=k(z)$ *die Gleichung* (16). *Wir setzen* $\kappa(t)=e^{i\varphi(t)}$. *Wenn dabei* $\varphi(\infty)=0$ und $\left(\frac{\varphi'(s)}{e^{-s}}\right)_\infty=0$ *ist, so ist stets* $\varphi(t)=0$ *in* $0\leqq t<\infty$.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
UNIVERSITÄT ZU OKAYAMA

(*Eingegangen am 10, Oktober 1961*)