

ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (II)

KEN'ITI KOSEKI

Ich veröffentlichte neuerdings meine Arbeit¹⁾ "Über die Koeffizienten der schlichten Funktionen". Die Berechnungen im 4. Schritte sind aber bedauerlich falsch. Die $-\int_{a-h}^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_{a-h}^{s_1} (\tilde{\alpha}'(s_2) - \alpha'(s_2)) \int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3} (p_1-p_2)\beta(s_3) \int_s^{s_3} \dots \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}} ds_{t+1} \dots ds_1$ strebt²⁾ nicht in der Tat gegen Null mit h . In dieser Arbeit will ich diesen Irrtum berichtigen.

Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Kreises $|z| < 1$ regulären und schlichten Funktionen von der Form

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \dots + p_n z^{n+1} + \dots$$

die normierten schlichten Funktionen. Wir bezeichnen für eine feste n die kleinste obere Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten p_n von allen normierten schlichten Funktionen in $|z| < 1$ mit M_n .

Es gibt dann bekanntlich eine schlichte Funktion $z + q_1 z^2 + \dots + q_n z^{n+1} + \dots$ mit $q_n = M_n$. Folglich nehmen wir an, dass für die Funktion $\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \dots + p_n z^{n+1} + \dots$ es $p_n = M_n$ ist.

Es besteht dann für die Funktion $\varphi = k(z)$ eine Löwnersche Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial g(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial g(z, t)}{\partial z} z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z}, & 0 \leq t < \infty \\ g(z, 0) &= k(z) = z + p_1 z^2 + \dots + p_n z^{n+1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

wo $\kappa(t)$ eine stetige Funktion darstellt und $|\kappa(t)| = 1$ ist. Wir bezeichnen die Lösung der Gleichung (1) mit $g(z, t) = e^t \{z + g_1(t)z^2 + \dots + g_n(t)z^{n+1} + \dots\}$.

Wir denken nun uns die folgende Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial h(z, t)}{\partial t} &= \frac{\partial h(z, t)}{\partial z} z \frac{1 + \kappa(t)z}{1 - \kappa(t)z} \\ h(z, s) &= e^s \{z + \tilde{g}_1(s)z^2 + \dots + \tilde{g}_n(s)z^{n+1} + \dots\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

1) K. Koseki : ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN, Math. J. Okayama Univ., Vol. 9 (1960), S. 173—197.

2) K. Koseki : a. a. O. S. 189—190.

wo $h(z, s)$ eine willkürliche schlichte Funktion in $|z| < 1$ bedeutet. Wir bezeichnen die Lösung der Gleichung (2) mit $h(z, t) = e^t \{z + \bar{g}_1(t)z^2 + \dots + \bar{g}_n(t)z^{n+1} + \dots\}$. Die Funktion $h(z, t)$ ist dann schlicht³⁾ in $|z| < 1$, und es gilt⁴⁾

$$\begin{aligned} \bar{g}(0) = & \int_s^0 2\kappa^n(s_1) e^{-\nu s_1} ds_1 + \sum_{i=2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-2}=2}^{p_{i-1}-1} p_{i-1} \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \right. \\ & \left. \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots \int_s^{s_{i-1}-1} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i) e^{-(p_{i-1}-1)s_i} ds_i \cdots ds_1 \right) + \\ & \sum_{\mu=2}^{n-2} (\mu+1) \bar{g}_\mu(s) e^{-\mu s} \left\{ \int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1} \right. \right. \\ & \left. \left. \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots \int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)} \right. \right. \\ & \left. \left. (s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \cdots ds_2 ds_1 \right) \right\} + n \bar{g}_{n-1}(s) e^{-(n-1)s} \int_s^0 2\kappa(s_1) e^{-s_1} ds_1 \\ & + \bar{g}_n(s) e^{-ns}. \end{aligned} \quad (3)$$

Da $\Re \bar{g}_n(0) \leq g_n(0) = p_n$ ist, so nimmt der reelle Teil der rechten Seite von der Formel (2) das Maximum an für $\bar{g}_n(s) = g_\mu(s)$ ($\mu = 1, 2, \dots, n$).

Wir setzen nun $e^{-\mu s} \left\{ \int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1} \right. \right.$

$$\left. \left. p_{i-(\mu+1)} \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots \int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)} \right. \right.$$

$$\left. \left. (s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)s_{i-\mu}} ds_{i-\mu} \cdots ds_2 ds_1 \right) \right\} = b_\mu(s), \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-2), \quad e^{-(n-1)s}$$

$$\int_s^0 2\kappa(s_1) e^{-s_1} ds_1 = b_{n-1}(s), \quad e^{-ns} = b_n(s).$$

Der reelle Teil von $\sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) \bar{g}_\mu(s) b_\mu(s) + n \bar{g}_{n-1}(s) b_{n-1}(s) + \bar{g}_n(s) b_n(s)$ nimmt für die Funktion $g(z, s)$ seines Maximum an. Folglich genügt⁵⁾ die Funktion $g(z, s)$ der folgende Differentialgleichung

$$\left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2 \sum_{\nu=1}^n \frac{A_\nu}{f(z)^\nu} = \sum_{\nu=-n}^n \frac{B_\nu}{Z^\nu}, \quad (4)$$

3) K. Koseki : a. a. O. S. 178.

4) K. Koseki : a. a. O. S. 185.

5) A. C. Schaeffer and D. C. Spencer : COEFFICIENT REGIONS FOR SCHLICHT FUNCTIONS. S. 36.

$$\left. \begin{aligned}
 \text{wo } f(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} (a_1 = 1), \quad f^k(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} z^i, \quad A_{\nu} = \sum_{k=\nu+1}^{n+1} a_k^{(\nu+1)} F_k, \\
 B_{\nu} &= \sum_{k=1}^{n+1-\nu} k a_k F_{k+\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \quad B_0 = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) a_k F_k, \quad B_{-\nu} = \bar{B}_{\nu}, \\
 F_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} - i \frac{\partial F}{\partial y_k} \right), \quad x_k = \frac{1}{2} (a_k + \bar{a}_k), \quad y_k = \frac{1}{2i} (a_k - \bar{a}_k), \\
 & \hspace{15em} (k = 2, 3, \dots, n+1) \\
 F &= \Re \left(\sum_{\mu=1}^{n-2} (\mu+1) a_{\mu-1} b_{\mu} + n a_n b_{n-1} + a_{n+1} b_n \right).
 \end{aligned} \right\} (5)$$

Wir finden leicht

$$\left. \begin{aligned}
 F_{\mu-1} &= \frac{1}{2} (\mu+1) b_{\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \dots, n-2) \\
 F_n &= \frac{1}{2} n b_{n-1}, \\
 F_{n-1} &= \frac{1}{2} b_n.
 \end{aligned} \right\} (6)$$

Aus (6) folgt es ohne weiteres

$$\left. \begin{aligned}
 A_{\nu} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=\nu+1}^n a_k^{(\nu+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(\nu+1)} b_n \right), \quad (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \\
 A_n &= \frac{1}{2} a_{n+1}^{(n+1)} b_n = \frac{1}{2} b_n, \\
 B_{\nu} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{n-\nu} k(k+\nu) a_k b_{k+\nu-1} + (n+1-\nu) a_{n+1-\nu} b_n \right), \\
 & \hspace{10em} (\nu = 1, 2, \dots, n-1), \quad B_n = \frac{1}{2} b_n, \\
 B_0 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n k(k-1) a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n \right), \\
 B_{\nu} = \bar{B}_{\nu}, \quad f'(z) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu-1}.
 \end{aligned} \right\} (7)$$

Wir setzen die Formeln (7) in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 (A_1 f(z)^{n-1} + A_2 f(z)^{n-2} + \dots + A_n) \\
 &= \frac{1}{z^n} (B_n + B_{n-1} z + B_{n-2} z^2 + \dots + B_0 z^n + \bar{B}_1 z^{n+1} + \dots + \bar{B}_n z^{2n}) f(z)^{n+2}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Die linke Seite von (8) = $\left(\sum_{k=2}^n a_k^{(2)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(2)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=n-1}^{\infty} a_{\nu}^{(n-1)} z^{\nu} \right) + \left(\sum_{k=3}^n a_k^{(3)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(3)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=n-2}^{\infty} a_{\nu}^{(n-2)} z^{\nu} \right) + \dots + \left(\sum_{k=l+1}^n a_k^{(l+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(l+1)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=l-1}^{\infty} a_{\nu}^{(l-1)} z^{\nu} \right) + \dots + b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 = \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=l+1}^n a_k^{(l+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(l+1)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=l-1}^{\infty} a_{\nu}^{(l-1)} z^{\nu} \right) + \dots + b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 = \sum_{l=1}^{n-1} \left(\sum_{k=l+1}^n a_k^{(l+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(l+1)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=l-1}^{\infty} a_{\nu}^{(l-1)} z^{\nu} \right) + \dots + b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2$

$$a_k^{(t+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(t+1)} b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=n-t}^{\infty} a_{\nu}^{(n-t)} z^{\nu} \right) + b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2. \tag{9}$$

Die rechte Seite von (8) = $\frac{1}{z^n} [b_n + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-t} k(k+i) a_k b_{k+t-1} + (n+1-i) a_{n+1-t} b_n \right) z^{n-t} + \left(\sum_{k=1}^n k(k-1) a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n \right) z^n + \sum_{t=1}^{\nu-1} \left(\sum_{k=1}^{n-t} k(k+i) \bar{a}_k \bar{b}_{k+t-1} + (n+1-i) \bar{a}_{n+1-t} \bar{b}_n \right) z^{n+t} + \bar{b}_n z^{2n}] \cdot \sum_{\nu=n+2}^{\infty} a_{\nu}^{(n+2)} z^{\nu}.$ (10)

Es ist aber

$$\left. \begin{aligned} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j k(j-k+1) a_k a_{j-k+1} z^{j+1}, \\ \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \cdot \left(\sum_{\nu=n-t}^{\infty} a_{\nu}^{(n-t)} z^{\nu} \right) &= \sum_{p=n-t+2}^{\infty} \sum_{j=1}^{p-1-(n-t)} \sum_{k=1}^j k(j-k+1) a_k a_{j-k+1} a_{p-(j+1)}^{(n-t)} z^p. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Wir setzen die Formeln (11) in (9) ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} &\sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{k=t+1}^n a_k^{(t+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(t+1)} b_n \right) \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \left(\sum_{\nu=n-t}^{\infty} a_{\nu}^{(n-t)} z^{\nu} \right) + b_n \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \nu z^{\nu} \right)^2 \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{k=t+1}^n a_k^{(t+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(t+1)} b_n \right) \cdot \sum_{p=n-t+2}^{\infty} \sum_{j=1}^{p-1-(n-t)} \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-t)} z^p \\ &+ b_n \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} z^{j+1}. \end{aligned} \tag{9'}$$

Aus (9') können wir leicht einsehen

$$\left. \begin{aligned} \text{die Koeffizient von } z^p \text{ in der Formel (9')} &= \sum_{t=\alpha}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1-(n-t)} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=t+1}^n a_k^{(t+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(t+1)} b_n \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-t)} + b_n \sum_{l=1}^{p-1} l(p-l) a_l a_{p-l} \\ &\text{(wenn } p \geq 3 \text{ ist), wo } \alpha \text{ die grössere der Zahlen 1 und } n-p+2 \text{ ist.} \\ \text{die Koeffizient von } z^p \text{ in der Formel (9')} &= b_n a_1^2 = b_n \text{ (wenn } p=2 \text{ ist).} \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Aus (10) folgt ohne weiteres

$$\left. \begin{aligned} &b_n, \quad \text{(wenn } p=2 \text{ ist).} \\ &\sum_{t=n+2-p}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-t} k(k+i) a_k b_{k+t-1} + (n+1-i) a_{n+1-t} b_n \right) a_{p+t}^{(n+2)} \\ &+ b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad \text{(wenn } n+2 > p \geq 3 \text{ ist).} \\ &\left(\sum_{k=1}^n k(k-1) a_k b_{k-1} + n a_{n+1} b_n \right) a_p^{(n+2)} + \sum_{t=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-t} k(k+i) a_k b_{k+t-1} \right. \\ &\left. + (n+1-i) a_{n+1-t} b_n \right) a_{p+t}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad \text{(wenn } p=n+2 \text{ ist).} \\ &\sum_{t=1}^{p-(n+2)} \left(\sum_{k=1}^{n-t} k(k+i) \bar{a}_k \bar{b}_{k+t-1} + (n+1-i) \bar{a}_{n+1-t} \bar{b}_n \right) a_{p-t}^{(n+2)} + \left(\sum_{k=1}^n \right. \end{aligned} \right\} \text{die Koeffizient von } z^p \text{ in (10) =}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & k(k-1)a_k b_{k-1} + na_{n+1}b_n a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} \right. \\
 & \left. + (n+1-i)a_{n+1-i}b_n \right) a_{p+i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad (\text{wenn } 2n+2 > p \geq \\
 & n+2+1 \text{ ist}). \\
 & \bar{b}_n a_{p-n}^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar{a}_k \bar{b}_{k+i-1} + (n+1-i)\bar{a}_{n+1-i}\bar{b}_n \right) a_{p-i}^{(n+2)} \\
 & + \left(\sum_{k=1}^n k(k-1)a_k b_{k-1} + na_{n+1}b_n \right) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} \right. \\
 & \left. + (n+1-i)a_{n+1-i}b_n \right) a_{p-i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)}, \quad (\text{wenn } p \geq 2n+2 \text{ ist}).
 \end{aligned} \right\} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Aus (12) und (13) folgt

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{p-(n+2)} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar{a}_k \bar{b}_{k+i-1} + (n+1-i)a_{n+1-i}\bar{b}_n \right) a_{p-i}^{(n+2)} + \left(\sum_{k=1}^n k(k-1)a_k b_{k-1} \right. \\
 & \left. + na_{n+1}b_n \right) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} + (n+1-i)a_{n+1-i}b_n \right) a_{p+i}^{(n+2)} + b_n a_{n+p}^{(n+2)} \\
 & = \sum_{i=\alpha}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=l+1}^n a_k^{(l+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(l+1)} b_n \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-4)} + b_n \sum_{l=1}^{p-1} \\
 & l(p-l) a_l a_{p-l}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

wenn $2n+2 > p \geq n+2+1$ ist.

Ebenso folgt es aus (12) und (13)

$$\begin{aligned}
 & \bar{b}_n a_{p-n}^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)\bar{a}_k \bar{b}_{k+i-1} + (n+1-i)\bar{a}_{n+1-i}\bar{b}_n \right) a_{p-i}^{(n+2)} + \left(\sum_{k=1}^n \right. \\
 & \left. k(k-1)a_k b_{k-1} + na_{n+1}b_n \right) a_p^{(n+2)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} + (n+1-i)a_{n+1-i}b_n \right) a_{p+i}^{(n+2)} \\
 & + b_n a_{n+p}^{(n+2)} = \sum_{i=\alpha}^{n-1} \sum_{j=1}^{p-1-(n-i)} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=l+1}^n a_k^{(l+1)} k b_{k-1} + a_{n+1}^{(l+1)} b_n \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{p-(j+1)}^{(n-4)} \\
 & + b_n \sum_{l=1}^{p-1} l(p-l) a_l a_{p-l}, \quad (15)
 \end{aligned}$$

wenn $p \geq 2n+2$ ist.

Da die Funktion $g(z, s)$ der Gleichung (4) genügt, so werden die Gleichungen (4) und (5) durch die $a_i = a_i(s) = g_{i-1}(s)$ ($i = 2, 3, \dots$) genügt.

Aus $f^{(k)}(z) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} z^i$ bekommen wir

$$\begin{aligned}
 a_i^{(k)} &= \sum_{j_1=1}^{i-(k-1)} \cdots \sum_{j_k=1}^{i-(k-1)} a_{j_1} a_{j_2} \cdots a_{j_k} \\
 & \quad (j_1 + \cdots + j_k = i). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Wir setzen zum Beispiel $n=4$ und $p=7$ in (14). Es folgt dann aus (14)

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{k=1}^3 k(k+1) \bar{a}_k(s) \bar{b}_k(s) + 4 \bar{a}_4(s) \bar{b}_4(s) \right) + \left(\sum_{k=1}^4 k(k-1) a_k(s) b_{k-1}(s) + 4 a_5(s) b_4(s) \right) \\
& a_7^{(0)}(s) + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i) a_k(s) b_{k+i-1}(s) + (5-i) a_{5-i}(s) b_4(s) \right) a_7^{(0)}(s) + b_4(s) a_{11}^{(0)}(s) \\
& = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{2+i} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=i+1}^4 a_k^{(i+1)}(s) k b_{k-1}(s) + a_6^{(i+1)}(s) b_4(s) \right) l(j-l+1) a_i^{(0)} a_{j-i+1}^{(0)} a_6^{(4-j)}(s) \\
& + b_4(s) \sum_{l=1}^6 l(p-l) a_l(s) a_{p-l}(s). \tag{17}
\end{aligned}$$

Der Einfachheit halber beschreiben wir statt $a_i(s)$ bloss a_i . Wir können leicht finden

$$\left. \begin{aligned}
a_7^{(0)} &= 7a_2, & a_8^{(0)} &= 6a_3 + {}_0C_4 a_2^2, & a_9^{(0)} &= 6a_4 + {}_0C_4 2a_2 a_3 + {}_0C_3 a_2^3, \\
a_{10}^{(0)} &= 6a_5 + {}_0C_4 (2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_0C_3 3a_2^2 a_3 + {}_0C_2 a_2^4, \\
a_{11}^{(0)} &= 6a_6 + {}_0C_4 (2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + {}_0C_3 (3a_2 a_3^2 + 3a_2^2 a_4) + {}_0C_2 4a_2^3 a_3 + {}_0C_1 a_2^5.
\end{aligned} \right\} \tag{18}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
& \text{die linke Seite von (17)} = \left(\sum_{k=1}^3 k(k+1) \bar{a}_k \bar{b}_k + 4 \bar{a}_4 \bar{b}_4 \right) + \left(\sum_{k=1}^4 k(k-1) a_k b_{k-1} \right. \\
& + 4 a_5 b_4) 6 a_2 + \left(\sum_{k=1}^3 k(k+1) a_k b_k + 4 a_4 b_4 \right) (6 a_3 + 15 a_2^2) + \left(\sum_{k=1}^3 k(k+2) a_k b_{k+1} + 3 a_3 b_4 \right) \\
& (6 a_4 + {}_0C_4 2 a_2 a_3 + {}_0C_3 a_2^3) + \left(\sum_{k=1}^1 k(k+3) a_k b_{k+2} + 2 a_2 b_4 \right) \{ 6 a_5 + {}_0C_4 (2 a_2 a_4 + a_3^2) \\
& + {}_0C_3 3 a_2^2 a_3 + {}_0C_2 a_2^4 \} + b_4 \{ 6 a_6 + {}_0C_4 (2 a_2 a_5 + 2 a_3 a_4) + {}_0C_3 (3 a_2 a_3^2 + 3 a_2^2 a_4) + {}_0C_2 4 a_2^3 a_3 \\
& + {}_0C_1 a_2^5 \}. \tag{19}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun die rechte Seite von (17) berechnen. Wir können leicht finden

$$\left. \begin{aligned}
a_2^{(2)} &= 1, & a_3^{(2)} &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 a_{j_1} a_{j_2} = 2a_2, & a_4^{(2)} &= 2a_3 + a_2^2, & a_5^{(2)} &= 2a_4 + 2a_2 a_3, \\
a_3^{(3)} &= 1, & a_4^{(3)} &= 3a_2, & a_5^{(3)} &= 3a_3 + 3a_2^2, & a_5^{(4)} &= 4a_2.
\end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Wir setzen die Formeln (20) in die rechte Seite von (17) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \text{die rechte Seite von (17)} = \left(\sum_{k=2}^4 a_k^{(2)} k b_{k-1} + a_5^{(2)} b_4 \right) \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) \\
& a_l a_{j-l+1} a_6^{(3-j)} + \left(\sum_{k=3}^4 a_k^{(3)} k b_{k-1} + a_5^{(3)} b_4 \right) \sum_{j_1=1}^4 \sum_{l=1}^{j_1} l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_6^{(2-j)} + \left(\sum_{k=4}^4 \right. \\
& a_k^{(4)} k b_{k-1} + a_5^{(4)} b_4 \left. \right) \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_6^{(1-j)} + b_4 \sum_{l=1}^6 l(7-l) a_l a_{7-l} = \{ 2b_1 \\
& + 3b_2 \cdot 2a_2 + 4b_3(2a_3 + a_2^2) + b_4(2a_4 + 2a_2 a_3) \} \{ (3a_3 + 3a_2^2) + 4a_2 \cdot 3a_3 + (6a_3 + 4a_2^2) \} \\
& + \{ 3b_2 + 4b_3 \cdot 3a_2 + (3a_3 + 3a_2^2) b_4 \} + \{ (2a_4 + 2a_2 a_3) + 4a_2(2a_3 + a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2) 2a_3 \\
& + (8a_4 + 12a_2 a_3) \} + (4b_3 + 4a_2 a_4) \{ a_5 + 4a_2 a_4 + (6a_3 + 4a_2^2) a_3 + (8a_4 + 12a_2 a_3) a_2
\end{aligned}$$

$$+ (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2) + b_4\{12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4\}. \quad (21)$$

Aus (19) und (20) bekommen wir

$$2\{(3a_3 - 2a_2^2)b_1 - \bar{b}_1\} + 3\{(4a_4 - 2a_2a_3)b_2 - 2\bar{a}_2\bar{b}_2\} + 4\{(5a_5 - 2a_2a_4)b_3 - 3\bar{a}_3\bar{b}_3\} + \{(6a_6 - 2a_2a_5)b_4 - 4\bar{a}_4\bar{b}_4\} = 0. \quad (22)$$

Für $s=0$ ist es $b_1(0)=0, b_2(0)=0, b_3(0)=0, b_4(0)=1$. Daher ist aus

$$6a_6(0) - 2a_2(0)a_5(0) - 4\bar{a}_4(0) = 0. \quad (23)$$

Dies ist aber nichts anders als der Martysche Satz. Also erhalten wir den folgenden

Satz I. (F. Marty)⁶⁾. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n (a_1=1)$ sei eine schlichte Funktion in $|z| < 1$ von der Art, dass die Koeffizient a_5 positiv ist, und dass die a_6 gleich der kleinsten oberen Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von z_5 von allen normierten schlichten Funktionen in $|z| < 1$ ist. Es gilt dann

$$6a_6 - 2a_2a_5 - 4\bar{a}_4 = 0.$$

Wir differenzieren nun die rechte Seite von der Formel (22) in bezug auf s im Punkte $s=0$. Es ist dann offenbar

$$b'_\mu(s) = -\mu e^{-\mu s} \left\{ \int_s^0 2x^{n-\mu}(s_1) e^{-(n-\mu)s_1} ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n p_1^{p_1-1} \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2^{p_2-1} \cdots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1} p_{i-(\mu+1)}^{p_{i-(\mu+1)}-1} \right. \right. \\ \left. \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots \int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)} \right. \\ \left. \left. (s_{i-\mu}) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}} \cdots ds_{i-\mu} \cdots ds_2 ds_1 \right) \right\} + e^{-\mu s} \left\{ -2\kappa^{n-\mu}(s) e^{-(n-\mu)s} + \sum_{i=\mu+2}^n \left(\sum_{p_1=i}^n \right. \right. \\ \left. \left. p_1^{p_1-1} \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2^{p_2-1} \cdots \sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1} p_{i-(\mu+1)}^{p_{i-(\mu+1)}-1} \right) \left(-2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s) e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s} \int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1) \right. \right. \\ \left. \left. e^{-(n-p_1+1)s_1} \int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2) e^{-(p_1-p_2)s_2} \int_s^{s_2} \cdots \int_s^{s_{i-(\mu+1)}-1} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-1-p_{i-(\mu+1)}}(s_{i-(\mu+1)}) \right. \right. \\ \left. \left. e^{-(p_{i-(\mu+1)}-1-p_{i-(\mu+1)})s_{i-(\mu+1)}} ds_{i-(\mu+1)} \cdots ds_2 ds_1 \right) \right\}. \quad (24)$$

Folglich ist

$$\left. \begin{aligned} b'_\mu(0) &= -2\kappa^{n-\mu}(0), & (\mu=1, 2, \dots, n-2), \\ b'_{n-1}(0) &= -2\kappa(0), \\ b'_n(0) &= -n. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Daher folgt aus (25) und (22)

6) F. Marty : SUR LE MODULE DES COEFFICIENTS DE MACLAURINE D'UNE FONCTION UNIVALENTE, Comptes Rendus, 198 (1934), S. 1569—1571.

7) $b'_\mu(s)$ stellt die Ableitung von $b_\mu(s)$ dar.

$$\begin{aligned}
& -2 \cdot 2 [(3a_3(0) - 2a_2^2(0))\kappa^3(0) - \bar{\kappa}^3(0)] - 2 \cdot 3 [(4a_4(0) - 2a_2(0)a_3(0))\kappa^2(0) \\
& - 2a_2(0)\bar{\kappa}^2(0)] - 2 \cdot 4 [(5a_5(0) - 2a_2(0)a_4(0))\kappa(0) - 3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}(0)] - 4 [(6a_6(0) \\
& - 2a_2(0)a_5(0) - 4\bar{a}_4(0)] + (6a_6(s) - 2a_2(s)a_5(s))'_{s=0} - (4\bar{a}_4)_{s=0} = 0. \quad (26)
\end{aligned}$$

Da die Funktion $g(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)z^n$ der Gleichung (1) genügt, so gilt es

$$\left. \begin{aligned}
a_0'(s) &= 5a_0(s) + 2(\kappa^5(s) + 2\kappa^4(s)a_2(s) + 3\kappa^3(s)a_3(s) + 4\kappa^2(s)a_4(s) + 5\kappa(s)a_5(s)), \\
a_2'(s) &= a_2(s) + 2\kappa(s), \\
a_3'(s) &= 4a_3(s) + 2(\kappa^4(s) + 2\kappa^3(s)a_2(s) + 3\kappa^2(s)a_3(s) + 4\kappa(s)a_4(s)), \\
a_4'(s) &= 3a_4(s) + 2(\kappa^3(s) + 2\kappa^2(s)a_2(s) + 3\kappa(s)a_3(s)).
\end{aligned} \right\} (27)$$

Aus (23), (26) und (27) folgt es

$$\begin{aligned}
& 4\kappa(0)a_5(0) + 3\kappa^5(0) + 5\kappa^4(0)a_2(0) + 6\kappa^3(0)a_3(0) + 6\kappa^2(0)a_4(0) + 2\bar{a}_4(0) \\
& - \bar{\kappa}^3(0) - \bar{a}_2(0)\bar{\kappa}^2(0) = 0. \quad (28)
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $n=4$ und $p=8$ in der Formel (14). Es ist dann

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i) \bar{a}_k \bar{b}_{k+i-1} + (5-i) \bar{a}_{5-i} \bar{b}_4 \right) a_8^{(6)} + \left(\sum_{k=1}^4 k(k-1) a_k b_{k-1} + 4a_5 b_4 \right) a_8^{(6)} \\
& + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i) a_k b_{k+i-1} + (5-i) a_{5-i} b_4 \right) a_8^{(6)} + b_4 a_{12}^{(6)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{3+i} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=i+1}^4 a_k^{(4+i)} k b_{k-1} \right. \\
& \left. + a_5^{(4+i)} b_4 \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_7^{(4-j)} + b_4 \sum_{l=1}^7 l(8-l) a_l a_{8-l}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Wir können die Formel (29) in der Form

$$(\alpha_1 b_1 + \beta_1 \bar{b}_1) + (\alpha_2 b_2 + \beta_2 \bar{b}_2) + (\alpha_3 b_3 + \beta_3 \bar{b}_3) + (\alpha_4 b_4 + \beta_4 \bar{b}_4) = 0$$

schreiben. Wir wollen aus (29) die $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
& \text{Die Koeffizient von } b_1 \text{ in der linken Seite von (29)} = 2 \cdot 1 a_2 a_8^{(6)} + 1 \cdot 2 a_1 a_9^{(6)} \\
& = 2 \{ a_2 (6a_3 + 15a_2^2) + 6a_4 + {}_6C_4 \cdot 2a_2 a_3 + {}_6C_3 a_2^2 \} \\
& = 2(6a_4 + 36a_2 a_3 + 35a_2^2). \quad (30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Die Koeffizient von } b_1 \text{ in der rechten Seite von (29)} = a_2^{(3)} 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^j l(j-l \\
& + 1) a_l a_{j-l+1} a_7^{(3)} = 2 \{ \sum_{l=1}^1 l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(3)} + \sum_{l=1}^2 l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(3)} + \\
& \sum_{l=1}^3 l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(3)} + \sum_{l=1}^4 l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} \} = 2 \{ (3a_4 + 6a_2 a_3 + a_2^3) \\
& + 4a_2(3a_3 + 3a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2)3a_2 + (8a_4 + 12a_2 a_3) \} = 2(11a_4 + 48a_2 a_3 + 25a_2^3). \quad (31)
\end{aligned}$$

Aus (30) und (31) folgt

$$\alpha_1 = 2(5a_4 + 12a_2 a_3 - 10a_2^3). \quad (32)$$

Es ist offenbar

$$\beta_1 = -1 \cdot 2\bar{a}_1 a_7^{(6)} = -12a_2. \quad (33)$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (29) = $3 \cdot 2a_3 a_6^{(6)} + 2 \cdot 3a_2 a_6^{(6)} + 1 \cdot 3a_1 a_{10}^{(6)} = 6a_3(6a_3 + 15a_2^2) + 6a_2(6a_4 + 2_6 C_4 a_2 a_3 + {}_6 C_3 a_2^2) + 3\{6a_5 + {}_6 C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6 C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6 C_2 a_2^4\} = 3\{(12 + {}_6 C_4)a_3^3 + (30 + 4_6 C_4 + 3_6 C_3)a_2^2 a_3 + (12 + 2_6 C_4)a_2 a_4 + (2_6 C_3 + {}_6 C_2)a_2^4 + 6a_5\} = 3(27a_3^3 + 150a_2^2 a_3 + 42a_2 a_4 + 55a_2^4 + 6a_5)$. (34)

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (29) = $\sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^j a_3^{(3)} 3l(j-l + 1)a_1 a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j a_3^{(3)} 3l(j-l + 1)a_1 a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} = 2a_2 \cdot 3\{a_1^2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_3^2) + 4a_2(3a_3 + 3a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2)3a_2 + (8a_4 + 12a_2 a_3)\} + 3\{a_1^2(2a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + 4a_2(2a_4 + 2a_2 a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_3 + a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)2a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)\} = 6a_2(11a_4 + 48a_2 a_3 + 25a_2^3) + 3(12a_5 + 42a_2 a_4 + 46a_2^2 a_3 + 22a_2^3 + 4a_2^4) = 3(64a_2 a_4 + 142a_2^2 a_3 + 54a_2^4 + 22a_2^3 + 12a_5)$. (35)

Aus (34) und (35) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(6a_5 - 5a_2^4 - a_2^4 - 8a_2^2 a_3 + 22a_2 a_4) b_2. \tag{36}$$

Es ist aber

$$\beta_2 = -(2 \cdot 3\bar{a}_2 a_7^{(6)} + 1 \cdot 3\bar{a}_1 a_6^{(6)}) = -3(12a_2 \bar{a}_2 + 1). \tag{37}$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (29) = $4 \cdot 3a_4 a_8^{(6)} + 3 \cdot 4a_3 a_9^{(6)} + 2 \cdot 4a_2 a_{10}^{(6)} + 1 \cdot 4a_1 a_{11}^{(6)} = 12a_4(6a_3 + 15a_2^2) + 12a_3\{6a_4 + {}_6 C_4 2a_2 a_3 + {}_6 C_3 a_2^3\} + 8a_2\{6a_5 + {}_6 C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6 C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6 C_2 a_2^4\} + 4\{6a_6 + {}_6 C_4(2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + {}_6 C_3(3a_2^2 a_4 + 3a_2 a_3^2) + {}_6 C_2 4a_2^3 a_3 + {}_6 C_1 a_2^5\} = 4(66a_3 a_4 + 165a_2^2 a_4 + 180a_2 a_3^2 + 240a_3 a_2^2 + 42a_2 a_5 + 36a_2^5 + 6a_6)$. (38)

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (29) = $\sum_{j=1}^4 \sum_{l=1}^j a_4^{(3)} 4l(j-l + 1)a_1 a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j a_4^{(3)} 4l(j-l + 1)a_1 a_{j-l+1} a_{7-j}^{(3)} + \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j a_4^{(4)} 4l(j-l + 1)a_1 a_{j-l+1} a_{7-j}^{(4)} = 4(2a_3 + a_2^2)\{a_1^2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_2^2) + 4a_2(3a_3 + 3a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2)3a_2 + (8a_4 + 12a_2 a_3)\} + 4 \cdot 3a_2\{a_1^2(2a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + 4a_2(2a_4 + 2a_2 a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_3 + a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)2a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)\} + 4\{(a_6 + 4a_2 a_5) + (6a_3 + 4a_2^2)a_4 + (8a_4 + 12a_2 a_3)a_3 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)a_2 + (12a_6 + 20a_2 a_5 + 24a_3 a_4)\} = 4(2a_3 + a_2^2)(11a_4 + 48a_2 a_3 + 25a_2^3) + 12a_2(12a_5 + 42a_2 a_4 + 46a_2^2 a_3 + 22a_2^3 + 4a_2^4) + 4(13a_6 + 34a_2 a_5 + 38a_3 a_4 + 20a_2^2 a_4 + 21a_2 a_3^2) = 4(60a_3 a_4 + 157a_2^2 a_4 + 183a_2 a_3^2 + 236a_2^2 a_3 + 37a_2^5 + 70a_2 a_5 + 13a_6)$. (39)

Aus (38) und (39) folgt ohne weiteres

$$\alpha_3 = 4(7a_6 + 28a_2 a_5 + a_2^5 - 4a_2^2 a_3 + 3a_2 a_3^2 - 8a_2^2 a_4 - 6a_3 a_4). \tag{40}$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_3 = -(3 \cdot 4\bar{a}_3 a_7^{(6)} + 2 \cdot 4\bar{a}_2 a_8^{(6)}) = -4(18\bar{a}_3 a_2 + 2\bar{a}_2). \tag{41}$$

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (29) = $4a_6 a_8^{(6)} + 4a_4 a_9^{(6)} + 3a_3 a_{10}^{(6)} + 2a_2 a_{11}^{(6)} + a_{12}^{(6)} = 4a_6(6a_3 + 15a_2^2) + 4a_4(6a_4 + {}_6C_4 2a_3 a_3 + {}_6C_3 a_3^2) + 3a_3\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} + 2a_2\{6a_6 + {}_6C_4(2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + {}_6C_3(3a_2^2 a_4 + 3a_2 a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3 a_3 + {}_6C_1 a_2^5\} + \{6a_7 + {}_6C_4(2a_2 a_6 + 2a_3 a_5 + a_4^2) + {}_6C_3(3a_2^2 a_5 + 3a_2 2a_3 a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3 a_4 + {}_4C_2 a_2^2 a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4 a_3 + a_2^6\} = 72a_3 a_5 + 180a_2^2 a_5 + 39a_4^2 + 390a_2 a_3 a_4 + 260a_2^3 a_4 + 65a_3^3 + 390a_2^2 a_3^2 + 195a_3 a_3^4 + 13a_2^6 + 42a_2 a_6 + 6a_7. \quad (42)$

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (29) = $\sum_{l=1}^4 \sum_{i=1}^j l(j-l+1) a_i a_{j-l+1} a_5^{(2)} a_7^{(3)} + \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_i a_{j-l+1} a_5^{(3)} a_7^{(2)} + \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_i a_{j-l+1} a_5^{(4)} a_7^{(1)} + \sum_{l=1}^7 l(8-l) a_i a_{8-l} = (2a_4 + 2a_2 a_3)\{a_1^2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_2^2) + 4a_2(3a_3 + 3a_2^2) + (6a_3 + 4a_2^2)3a_2 + (8a_4 + 12a_2 a_3)\} + (3a_3 + 3a_2^2)\{a_1^2(2a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + 4a_2(2a_4 + 2a_2 a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_3 + a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)2a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_2^2)\} + 4a_2\{(a_6 + 4a_2 a_5) + (6a_3 + 4a_2^2)a_4 + (8a_4 + 12a_2 a_3)a_3 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_2^2)a_2 + (12a_6 + 20a_2 a_5 + 24a_3 a_4)\} + (14a_7 + 24a_2 a_6 + 30a_3 a_5 + 16a_4^2) = 38a_4^2 + 396a_2 a_3 a_4 + 384a_2^2 a_3^2 + 256a_2^3 a_4 + 200a_3 a_3^2 + 66a_3 a_3^3 + 172a_2^2 a_5 + 66a_3^3 + 12a_2^6 + 76a_2 a_6 + 14a_7. \quad (43)$

Aus (42) und (43) folgt ohne weiteres

$$\alpha_4 = 8a_7 + 34a_2 a_6 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2 a_5 - 6a_3 a_3 + 5a_3 a_4^2 - 4a_2^2 a_4 - 6a_2^2 a_3^2 + 6a_2 a_3 a_4 - a_4^2. \quad (44)$$

Andererseits ist es offenbar

$$\beta_4 = -(4\bar{a}_4 a_7^{(6)} + 3\bar{a}_3 a_6^{(6)}) = -(4\bar{a}_4 \cdot 6a_2 + 3\bar{a}_3). \quad (45)$$

Nach (32), (33), (36), (37), (40), (41), (44) und (45) besteht

$$2(5a_4 + 12a_2 a_3 - 10a_2^2) b_1 - 2 \cdot 6a_2 \bar{b}_1 + 3(6a_5 + 22a_2 a_4 - 5a_2^3 - a_4^2 - 8a_2^2 a_3) b_2 - 3(12a_2 \bar{a}_2 + 1) \bar{b}_2 + 4(7a_6 + 28a_2 a_5 + 3a_2 a_3^2 + a_2^5 - 4a_2^3 a_3 - 8a_2^2 a_4 - 6a_3 a_4) b_3 - 4(18a_2 \bar{a}_3 + 2\bar{a}_2) \bar{b}_3 + (8a_7 + 34a_2 a_6 + 5a_3 a_2^4 + 6a_2 a_3 a_4 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2 a_5 - 6a_3 a_5 - 4a_2^3 a_4 - 6a_2^2 a_3^2 - a_4^2) b_4 - (24a_2 \bar{a}_4 + 3\bar{a}_3) \bar{b}_4 = 0. \quad (46)$$

Wir setzen $s = 0$ in (46), so gewinnen wir

$$8a_7(0) + 34a_2(0) + 5a_3(0) a_2(0)^4 + 6a_2(0) a_3(0) a_4(0) - a_2(0)^6 + a_3(0)^3 - 8a_2(0)^2 a_5(0) - 6a_3(0) a_5(0) - 4a_2(0)^3 a_4(0) - 6a_2(0)^2 a_3(0)^2 - a_4(0)^2 - 24a_2(0) \bar{a}_4(0) - 3\bar{a}_3(0) = 0. \quad (47)$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (46) in bezug auf s am Punkte $s = 0$. Wir gewinnen dann

$$-4(5a_4(0) + 12a_2(0) a_3(0) - 10a_2(0)^3) \kappa^3(0) + 4 \cdot 6a_2(0) \bar{\kappa}(0)^3 - 6(6a_5(0) + 22a_2(0) a_4(0) - 5a_3(0)^2 - a_2(0)^4 - 8a_2(0)^2 a_3(0)) \kappa^2(0) + 6(12a_2(0) \bar{a}_3(0) + 1) \bar{\kappa}(0)^2 - 8(7a_6(0) + 28a_2(0) a_5(0) + 3a_2(0) a_3(0)^2 + a_2(0)^5 - 4a_2(0)^3 a_3(0) - 8a_2(0)^2 a_4(0))$$

$$\begin{aligned}
 & -6a_3(0)a_4(0)\kappa(0) + 8(18a_2(0)\bar{a}_3(0) + 2\bar{a}_2(0))\bar{\kappa}(0) - 4\{(8a_7(0) + 34a_2(0)a_6(0) \\
 & + 5a_3(0)a_2(0)^4 + 6a_2(0)a_3(0)a_4(0) - a_2(0)^6 + a_3(0)^3 - 8a_2(0)^2a_5(0) - 6a_3(0)a_5(0) \\
 & - 4a_2(0)^3a_4(0) - 6a_2(0)^2a_3(0)^2 - a_4(0)^2 - (24a_2(0)\bar{a}_4(0) + 3\bar{a}_3(0))\} + (8a_7 + 34a_2a_6 \\
 & + 5a_3a_2^4 + 6a_3a_3a_4 - a_2^6 + a_3^3 - 8a_2^2a_5 - 6a_3a_5 - 4a_2^3a_4 - 6a_2^2a_3^2)_{s=0} - (24a_2\bar{a}_4 + 3\bar{a}_3)_{s=0} \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{48}$$

Es ergibt sich dann aus (47) und (48)

$$\begin{aligned}
 & 3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}(0)^2 - 3a_3(0)\kappa(0)^2 + 2\bar{a}_4(0)\bar{\kappa}(0) - 2a_4(0)\kappa(0) + 3\bar{a}_2(0)\bar{\kappa}(0)^3 - 3a_2(0)\kappa(0)^3 \\
 & + 2\bar{\kappa}(0)^4 - 2\kappa(0)^4 = 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

D. h. $3a_3(0)\kappa^2(0) + 2a_4(0)\kappa(0) + 3a_2(0)\kappa^3(0) + 2\kappa^4(0)$ ist reell. Also gewinnen wir den folgenden

Satz II⁸⁾. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n (a_1 = 1)$ sei eine schlichte Funktion in $|z| < 1$ von der Art, dass die Koeffizient a_5 positiv ist, und dass die a_5 gleich der kleinsten oberen Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von z^5 von allen normierten schlichten Funktionen in $|z| < 1$ ist. Die $2a_4(0) + 3a_3\kappa^2(0) + 3a_2\kappa^3(0) + 2\kappa^4(0)$ ist dann reell.

Wir setzen nun $n=4$ und $p=9$ in der Formel (14). Es ist dann

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)\bar{a}_k \bar{b}_{k+i-1} + (5-i)\bar{a}_{5-i}\bar{b}_i \right) a_5^{(6)} + \left(\sum_{k=1}^4 k(k-1)a_k b_{k-1} + 4a_5 b_4 \right) a_5^{(6)} \\
 & + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} + (5-i)a_{5-i} b_i \right) a_5^{(6)} + b_4 a_{13}^{(6)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{4+i} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=i+1}^n a_k^{(4+i)} k b_{k-1} \right. \\
 & \left. + a_5^{(4+i)} b_4 \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_5^{(4-i)} + b_4 \sum_{l=1}^8 l(9-l) a_l a_{9-l}.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Wir können die Formel (50) in der Form

$$(\alpha_1 b_1 + \beta_1 \bar{b}_1) + (\alpha_2 b_2 + \beta_2 \bar{b}_2) + (\alpha_3 b_3 + \beta_3 \bar{b}_3) + (\alpha_4 b_4 + \beta_4 \bar{b}_4) = 0$$

schreiben. Wir wollen aus (50) die $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ bestimmen.

$$\begin{aligned}
 & \text{Die Koeffizient von } b_1 \text{ in der linken Seite von (50)} = 2 \cdot 1 a_2 a_5^{(6)} + 1 \cdot 2 a_1 a_{10}^{(6)} \\
 & = 2a_2(6a_4 + {}_6C_4 2a_2 a_3 + {}_6C_3 a_3^2) + 2\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6C_2 a_4^2\} \\
 & = 2(6a_5 + 36a_2 a_4 + 90a_2^2 a_3 + 35a_2^4 + 15a_3^2).
 \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Die Koeffizient von } b_1 \text{ in der rechten Seite von (50)} = a_5^{(2)} 2 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j \\
 & l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_5^{(3)} = 2[\{3a_5 + 3(2a_2 a_4 + a_3^2) + 3a_2^2 a_3\} + 4a_2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_3^2) \\
 & + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)] = 2(13a_5 + \\
 & 58a_2 a_4 + 93a_2^2 a_3 + 16a_2^4 + 30a_3^2).
 \end{aligned} \tag{52}$$

Aus (51) und (52) folgt ohne weiteres

$$\alpha_1 = 2(7a_5 + 22a_2 a_4 + 3a_2^2 a_3 - 19a_2^4 + 15a_3^2). \tag{53}$$

8) Den Satz II können wir aus nur der Löwnerschen Differentialgleichung auch herleiten.

Andererseits ist es offenbar

$$\beta_1 = -1 \cdot 2\bar{a}_1 a_8^{(6)} = -2(6a_3 + 15a_2^2). \quad (54)$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (50) $= 3 \cdot 2a_3 a_9^{(6)} + 2 \cdot 3a_2 a_{10}^{(6)} + 1 \cdot 3a_1 a_{11}^{(6)} = 3 \cdot 2a_3(6a_4 + {}_6C_4 2a_2 a_3 + {}_6C_3 a_2^2) + 2 \cdot 3a_2 \{6a_5 + {}_6C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} + 3a_1 \{6a_6 + {}_6C_4(2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + {}_6C_3(3a_2^2 a_4 + 3a_2 a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3 a_3 + {}_6C_1 a_2^5\} = 3(42a_3 a_4 + 120a_2^2 a_4 + 42a_2 a_5 + 150a_2 a_3^2 + 220a_2^3 a_3 + 36a_2^5 + 6a_6). \quad (55)$

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (50) $= a_3^{(2)} 3 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(3)} + a_3^{(3)} 3 \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(2)} = 2a_2 \cdot 3 [\{3a_5 + 3(2a_2 a_4 + a_3^2) + 3a_2^2 a_3\} + 4a_2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_2^3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)] + 3 [(2a_6 + 2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + 4a_3(2a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_4 + 2a_2 a_3) + (8a_4 + 12a_2 a_3)(2a_3 + a_2^2) + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)2a_2 + (12a_6 + 20a_2 a_5 + 24a_3 a_4)] = 3(14a_6 + 76a_2 a_5 + 172a_2^2 a_4 + 206a_2^3 a_3 + 32a_2^5 + 118a_2 a_3^2 + 54a_3 a_4). \quad (56)$

Aus (55) und (56) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(8a_6 + 34a_2 a_5 + 52a_2^2 a_4 - 14a_2^3 a_3 - 4a_2^5 - 32a_2 a_3^2 + 12a_3 a_4). \quad (57)$$

Es ist aber

$$\beta_2 = -(2 \cdot 3\bar{a}_2 a_8^{(6)} + 1 \cdot 3\bar{a}_1 a_7^{(6)}) = -3\{2\bar{a}_2(6a_3 + 15a_2^2) + \bar{a}_1 6a_2\}. \quad (58)$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (50) $= 4 \cdot 3a_1 a_9^{(6)} + 3 \cdot 4a_3 a_{10}^{(6)} + 2 \cdot 4a_2 a_{11}^{(6)} + 1 \cdot 4a_1 a_{12}^{(6)} = 4 \cdot 3a_1(6a_4 + {}_6C_4 2a_2 a_3 + {}_6C_2 a_2^3) + 3 \cdot 4a_3 \{6a_5 + {}_6C_4(2a_2 a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2 a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} + 2 \cdot 4a_2 \{6a_6 + {}_6C_4(2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + {}_6C_3(3a_2^2 a_4 + 3a_2 a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3 a_3 + {}_6C_1 a_2^5\} + 1 \cdot 4a_1 \{6a_7 + {}_6C_4(2a_2 a_6 + 2a_3 a_5 + a_2^3) + {}_6C_3(3a_2^2 a_5 + 6a_2 a_3 a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3 a_4 + {}_4C_2 a_2^2 a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4 a_3 + a_2^6\} = 4(33a_4^2 + 360a_2 a_3 a_4 + 240a_2^2 a_4 + 48a_3 a_5 + 65a_3^2 + 390a_2^2 a_3^2 + 195a_3 a_2^4 + 42a_3 a_6 + 120a_2^2 a_5 + 13a_2^6 + 6a_7). \quad (59)$

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (50) $= a_4^{(3)} 4 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(3)} + a_4^{(4)} 4 \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_8^{(2)} = 4(2a_3 + a_2^2) \{a_1^2(3a_5 + 6a_2 a_4 + 3a_3^2 + 3a_2^2 a_3) + 4a_2(3a_4 + 6a_2 a_3 + a_2^3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2 a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)\} + 4 \cdot 3a_2 \{(2a_6 + 2a_2 a_5 + 2a_3 a_4) + 4a_3(2a_5 + 2a_2 a_4 + a_3^2) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_4 + 2a_2 a_3) + (8a_4 + 12a_2 a_3)(2a_3 + a_2^2) + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)2a_2 + (12a_6 + 20a_2 a_5 + 24a_3 a_4)\} + 4 \{a_1^2 a_7 + 4a_2 a_6 + (6a_3 + 4a_2^2)a_5 + (8a_4 + 12a_2 a_3)a_4 + (10a_5 + 16a_2 a_4 + 9a_3^2)a_3 + (12a_6 + 20a_2 a_5 + 24a_3 a_4)a_2 + (14a_7 + 24a_2 a_6 + 30a_3 a_5 + 16a_4^2)\} = 4(72a_2 a_7 + 187a_2^2 a_5 + 330a_2 a_3 a_4 + 390a_2^2 a_3^2 + 226a_2^3 a_4 + 185a_2^4 a_3 + 82a_2 a_6 + 185a_2^4 a_3 + 82a_2 a_6 + 69a_3^2 + 24a_4^2 + 16a_2^6 + 15a_7). \quad (60)$

Aus (59) und (60) folgt es

$$\alpha_3 = 4(9a_7 + 3a_2^6 + 67a_2^5a_6 + 40a_2a_6 - 10a_3a_2^4 + 4a_3^3 + 24a_3a_5 - 14a_2^3a_4 - 30a_2a_3a_4 - 9a_4^2). \quad (61)$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_3 = -(3 \cdot 4\bar{a}_3a_8^{(6)} + 2 \cdot 4\bar{a}_2a_7^{(6)} + 1 \cdot 4\bar{a}_1a_6^{(6)}) = -4\{3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) + 12a_2\bar{a}_2 + \bar{a}_1\}. \quad (62)$$

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (50) = $4a_3a_9^{(6)} + 4a_4a_{10}^{(6)} + 3a_3a_{11}^{(6)} + 2a_2a_{12}^{(6)} + a_{13}^{(6)} = 4a_3(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3 a_2^3) + 4a_4\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2 a_2^4\} + 3a_3\{6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3a_3 + {}_6C_1 a_2^5\} + 2a_2\{6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2 a_2^2a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4a_3 + a_2^6\} + \{6a_8 + {}_6C_4(2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5) + {}_6C_3(3a_2^2a_6 + 6a_2a_3a_5 + 3a_2a_4^2 + 3a_3^2a_4) + {}_6C_2(4a_2^3a_5 + 2{}_4C_2 a_2^2a_3a_4 + 4a_2a_3^3) + {}_6C_1(5a_2^4a_4 + {}_5C_3 a_2^3a_3^2) + 6a_2^5a_3\} = 78a_4a_6 + 390a_2a_3a_5 + 260a_6a_2^3 + 210a_2a_4^2 + 210a_4a_3^2 + 840a_2^2a_3a_4 + 210a_2^4a_4 + 420a_2^3a_3^2 + 48a_3a_6 + 84a_2^5a_3 + 42a_2a_7 + 120a_2^2a_6 + 280a_2a_3^3 + 2a_2^7 + 6a_8. \quad (63)$

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (50) = $\sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^j a_5^{(3)} l(i-l) + 1)a_i a_{j-l+1} a_8^{(3)} + \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j a_5^{(3)} l(j-l+1) a_i a_{j-l+1} a_8^{(2)} + \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^j a_5^{(4)} l(j-l+1) a_i a_{j-l+1} a_8^{(1)} + \sum_{l=1}^8 l(9-l) a_i a_{9-l} = 2(a_4 + 2a_2a_3) \{a_1^2(3a_5 + 6a_2a_4 + 3a_2^2 + 3a_2^2a_3) + 4a_2(3a_4 + 6a_2a_3 + a_2^3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_3 + 3a_2^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)3a_2 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)\} + (3a_3 + 3a_2^2) \{a_1^2(2a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4) + 4a_2(2a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_4 + 2a_2a_3) + (8a_4 + 12a_2a_3)(2a_3 + a_2^2) + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)2a_2 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)\} + 4a_2 \{a_1^2 a_7 + 4a_2a_6 + (6a_3 + 4a_2^2)a_5 + (8a_4 + 12a_2a_3)a_4 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)a_3 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)a_2 + (14a_7 + 24a_2a_6 + 30a_3a_5 + 16a_4^2)\} + (16a_8 + 28a_2a_7 + 36a_3a_6 + 40a_4a_5) = 66a_4a_5 + 360a_3a_3a_5 + 212a_2a_4^2 + 840a_2^3a_3a_4 + 420a_2^3a_3^2 + 222a_2^3a_4 + 270a_2a_3^3 + 200a_4a_2^4 + 92a_2^5a_3 + 78a_3a_6 + 202a_2^2a_6 + 246a_2^3a_5 + 88a_2a_7 + 16a_8. \quad (64)$

Aus (63) und (64) folgt ohne weiteres

$$\alpha_4 = 10a_8 - 2a_2^7 - 10a_2a_3^3 + 82a_2^2a_6 + 46a_2a_7 + 8a_2^5a_3 + 30a_3a_6 - 10a_2^4a_4 + 12a_4a_3^2 + 2a_2a_4^2 - 14a_6a_2^3 - 30a_2a_3a_5 - 12a_4a_5. \quad (65)$$

Anderseits ist es offenbar

$$\beta_4 = -(4\bar{a}_4a_8^{(6)} + 3\bar{a}_3a_7^{(6)} + 2\bar{a}_2a_6^{(6)}) = -\{4a_4(6a_3 + 15a_2^2) + 18\bar{a}_3a_2 + 2\bar{a}_2\}. \quad (66)$$

Aus (53), (54), (57), (58), (61), (62), (65) und (66) besteht es

$$2(7a_5 + 22a_2a_4 + 3a_2^3a_3 - 19a_2^4 + 15a_3^2)b_1 - 2(6a_3 + 15a_2^2)\bar{b}_1 + 3(8a_6 + 34a_2a_5 + 52a_2^2a_4 - 14a_3^2a_3 - 4a_2^5 - 32a_2a_3^2 + 12a_3a_4)b_2 - 3\{2\bar{a}_2(6a_3 + 15a_2^2) + \bar{a}_1 \cdot 6a_3\}\bar{b}_2$$

$$\begin{aligned}
& + 4(9a_7 + 3a_2^6 + 67a_2^5a_3 + 40a_2a_6 - 10a_3a_2^4 + 4a_3^3 + 24a_3a_6 - 14a_3^3a_4 - 30a_2a_3a_4 \\
& - 9a_2^2b_3 - 4\{3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) + 12\bar{a}_2a_2 + \bar{a}_1\}\bar{b}_3 + (10a_8 - 2a_2^7 - 10a_2a_3^2 + 82a_2^2a_6 \\
& + 46a_2a_7 + 8a_2^5a_3 + 30a_3a_6 - 10a_2^4a_4 + 12a_4a_3^2 + 2a_2a_4^2 - 14a_5a_2^3 - 30a_2a_3a_5 - 12a_4a_5)b_4 \\
& - \{4\bar{a}_4(6a_3 + 15a_2^2) + 3\bar{a}_3 \cdot 6a_2 + 2\bar{a}_2\}\bar{b}_4 = 0. \tag{67}
\end{aligned}$$

Wir setzen $s=0$ in (67), so gewinnen wir

$$\begin{aligned}
& 10a_8(0) - 2a_2(0)^7 - 10a_2(0)a_3(0)^3 + 82a_2(0)^2a_6 + 46a_2(0)a_7(0) + 8a_2(0)^5a_3(0) \\
& + 30a_3(0)a_6(0) - 10a_2(0)^4a_4(0) + 12a_4(0)a_3(0)^2 + 2a_2(0)a_4(0)^2 - 14a_5(0)a_2(0)^3 \\
& - 30a_2(0)a_3(0)a_5(0) - 12a_4(0)a_5(0) - 4\bar{a}_4(0)(6a_3(0) + 15a_2(0)^2) - 18\bar{a}_3(0)a_2(0) \\
& - 2\bar{a}_2(0) = 0. \tag{68}
\end{aligned}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (67) in bezug auf s am Punkte $s=0$. Wir gewinnen dann

$$\begin{aligned}
& -4(7a_6(0) + 22a_2(0)a_4(0) + 3a_3(0)^2a_3(0) - 19a_2(0)^4 + 15a_3(0)^2)\kappa^3(0) + 4(6a_3(0) \\
& + 15a_2(0)^3)\bar{\kappa}^3(0) - 6(8a_6(0) + 34a_2(0)a_6(0) + 52a_3(0)^2a_4(0) - 14a_2(0)^3a_4(0) - 4a_2(0)^5 \\
& - 32a_2(0)a_3(0)^2 + 12a_3(0)a_4(0))\kappa^2(0) + 6\{2\bar{a}_2(0)(6a_3(0) + 15a_2(0)^2 + 6a_2(0))\bar{\kappa}^2(0) \\
& - 8(9a_7(0) + 3a_2(0)^6 + 67a_2(0)^2a_6(0) + 40a_2(0)a_6(0) - 10a_3(0)a_2(0)^4 + 4a_3(0)^3 \\
& + 24a_3(0)a_6(0) - 14a_2(0)^3a_4(0) - 30a_2(0)a_3(0)a_4(0) - 9a_2^2(0))\kappa(0) + 8\{3\bar{a}_3(0)(6a_3(0) \\
& + 15a_2(0)^2) + 12\bar{a}_2(0)a_2(0) + \bar{a}_1(0)\}\bar{\kappa}(0) + (10a_8 - 2a_2^7 - 10a_2a_3^2 + 82a_2^2a_6 + 46a_2a_7 \\
& + 8a_2^5a_3 + 30a_3a_6 - 10a_2^4a_4 + 12a_4a_3^2 + 2a_2a_4^2 - 14a_5a_2^3 - 30a_2a_3a_5 - 12a_4a_5)'_{s=0} - \\
& \{4\bar{a}_4(6a_3 + 15a_2^2) + 18\bar{a}_3a_2 + 2\bar{a}_2\}'_{s=0} = 0. \tag{69}
\end{aligned}$$

Aus (23), (28), (47), (69) und (68) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (2\kappa^4(0) - 2\bar{\kappa}^4(0)) + (3a_2(0)\kappa^3(0) - 3\bar{a}_2(0)\bar{\kappa}^3(0) + (3a_3(0)\kappa^2(0) - 3\bar{a}_3(0)\bar{\kappa}^2(0)) \\
& + (2a_4(0)\kappa(0) - 2\bar{a}_4(0)\bar{\kappa}(0)) = 0.
\end{aligned}$$

Dies ist aber nichts anders als die Formel (49).

Wir setzen nun $n=4$ und $p=10$ in (15). Es folgt dann aus (15)

$$\begin{aligned}
& \bar{b}_4a_6^{(6)} + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)\bar{a}_k\bar{b}_{k+i-1} + (5-i)\bar{a}_{5-i}\bar{b}_4 \right) a_{10-i}^{(6)} + \left(\sum_{k=1}^4 k(k-1)a_k b_{k-1} \right. \\
& \left. + 4a_5b_4 \right) a_{10}^{(6)} + \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^{4-i} k(k+i)a_k b_{k+i-1} + (5-i)a_{5-i}b_4 \right) a_{10+i}^{(6)} + b_4 a_{14}^{(6)} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{5+i} \sum_{l=1}^j \left(\sum_{k=i+l}^n \right. \\
& \left. a_k^{(i+1)} k b_{k-1} + a_5^{(i+1)} b_4 \right) l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_{9-j}^{(4-j)} + b_4 \sum_{l=1}^9 l(p-l) a_l a_{p-l}. \tag{70}
\end{aligned}$$

Wir können die Formel (70) in der Form

$$(\alpha_1 b_1 + \beta_1 \bar{b}_1) + (\alpha_2 b_2 + \beta_2 \bar{b}_2) + (\alpha_3 b_3 + \beta_3 \bar{b}_3) + (\alpha_4 b_4 + \beta_4 \bar{b}_4) = 0$$

schreiben. Wir wollen nun die $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3, \alpha_4, \beta_4$ berechnen.

$$\begin{aligned}
& \text{Die Koeffizient von } b_1 \text{ in der linken Seite von (70)} = 2 \cdot 1a_2a_{10}^{(6)} + 1 \cdot 2a_1a_{11}^{(6)} \\
& = 2a_2\{6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_33a_2^2a_3 + {}_6C_2a_2^4\} + 2\{6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_4) + \\
& {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_3a_3^2) + {}_6C_24a_2^3a_3 + {}_6C_1a_2^5\} = 2(6a_6 + 36a_2a_5 + 30a_3a_4 + 90a_2^2a_4 + 75a_2a_3^2 \\
& + 120a_2^3a_3 + 21a_2^5). \tag{71}
\end{aligned}$$

Die Koeffizient von b_1 in der rechten Seite von (70) $= a_2^{(2)} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_0^{(3)} = 2 \{ a_1^2(3a_6 + 6a_2a_5 + 6a_3a_4 + 3a_2a_3^2 + 3a_2^2a_4) + 4a_2(3a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 + 3a_2^2a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_4 + 6a_2a_3 + a_3^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)(3a_3 + 3a_2^2) + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)3a_2 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4) \} = 2(15a_6 + 68a_2a_5 + 72a_3a_4 + 111a_2^2a_4 + 114a_2a_3^2 + 78a_2^3a_3 + 4a_2^4)$. (72)

Aus (71) und (72) ergibt sich

$$\alpha_1 = 2(9a_6 + 32a_2a_5 + 42a_3a_4 + 21a_2^2a_4 + 39a_2a_3^2 - 42a_2^3a_3 - 17a_2^4). \quad (73)$$

Wir können leicht einsehen

$$\beta_1 = -1 \cdot 2\bar{a}_1 a_9^{(6)} = -2(6a_4 + 30a_2a_3 + 20a_2^2). \quad (74)$$

Die Koeffizient von b_2 in der linken Seite von (70) $= 3 \cdot 2a_3 a_{10}^{(6)} + 2 \cdot 3a_2 a_{11}^{(6)} + 1 \cdot 3a_1 a_{12}^{(6)} = 3 \cdot 2a_3 \{ 6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2 a_2^4 \} + 2 \cdot 3a_2 \{ 6a_6 + {}_5C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3a_3 + {}_6C_1 a_2^5 \} + 3a_1 \{ 6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_2^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2 a_2^2a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4a_3 + a_2^6 \} = 3(6a_7 + 42a_2a_6 + 42a_3a_5 + 15a_4^2 + 120a_2^2a_6 + 240a_2a_3a_4 + 50a_3^3 + 180a_2^3a_4 + 330a_2^2a_3^2 + 180a_2^4a_3 + 13a_2^6)$. (75)

Die Koeffizient von b_2 in der rechten Seite von (70) $= a_3^{(2)} \cdot 3 \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_0^{(3)} + a_3^{(3)} \cdot 3 \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_0^{(2)} = 3 \cdot 2a_2 \{ a_1^2(3a_6 + 6a_2a_5 + 6a_3a_4 + 3a_2a_3^2 + 3a_2^2a_4) + 4a_2(3a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 + 3a_2^2a_3) + (6a_3 + 4a_2^2)(3a_4 + 6a_2a_3 + a_3^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)(3a_3 + 3a_2^2) + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)3a_2 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4) \} + 3 \{ a_1^2(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_2^2 + 2a_7) + 4a_2(2a_6 + 2a_2a_5 + 2a_3a_4) + (6a_3 + 4a_2^2)(2a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2) + (8a_4 + 12a_2a_3)(2a_4 + 2a_2a_3) + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_3^2)(2a_3 + a_2^2) + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)2a_2 + (14a_7 + 24a_2a_6 + 30a_3a_5 + 16a_4^2) \} = 3(16a_7 + 88a_2a_6 + 64a_3a_5 + 33a_4^2 + 202a_2^2a_5 + 284a_2a_3a_4 + 246a_2^3a_4 + 24a_3^3 + 265a_2^3a_3^2 + 156a_2^4a_3 + 8a_3^3)$. (76)

Aus (75) und (76) folgt ohne weiteres

$$\alpha_2 = 3(10a_7 + 46a_2a_6 + 22a_3a_5 + 18a_4^2 + 82a_2^2a_5 + 44a_2a_3a_4 + 66a_2^3a_4 - 26a_3^3 - 65a_2^2a_3^2 - 24a_2^4a_3 - 5a_2^6). \quad (77)$$

Wir können leicht finden

$$\beta_2 = -(2 \cdot 3\bar{a}_2 a_9^{(6)} + 1 \cdot 3\bar{a}_1 a_8^{(6)}) = -3 \{ 2\bar{a}_2(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3 a_2^2) + \bar{a}_1(6a_3 + 15a_2^2) \}.$$

Die Koeffizient von b_3 in der linken Seite von (70) $= 4 \cdot 3a_4 a_{10}^{(6)} + 3 \cdot 4a_3 a_{11}^{(6)} + 2 \cdot 4a_2 a_{12}^{(6)} + 1 \cdot 4a_1 a_{13}^{(6)} = 4 \cdot 3a_4 \{ 6a_5 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_3 3a_2^2a_3 + {}_6C_2 a_2^4 \} + 3 \cdot 4a_3 \{ 6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_3^2) + {}_6C_2 4a_2^3a_3 + {}_6C_1 a_2^5 \} + 2 \cdot 4a_2 \{ 6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_2^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2 a_2^2a_3^2) + {}_6C_1 5a_2^4a_3 + a_2^6 \} + 1 \cdot 4a_1 \{ 6a_8 + {}_6C_4(2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5) + {}_6C_3(3a_2^2a_6 + 6a_2a_3a_5 + 3a_2a_4^2 +$

$$3a_3^2a_4) + {}_6C_2(4a_2^3a_5 + 2{}_2C_2a_2^2a_3a_4 + 4a_2a_2^3) + {}_6C_1(5a_2^4a_4 + {}_5C_3a_2^3a_3^2) + 6a_2^5a_3) = 4(6a_8 + 42a_2a_7 + 48a_3a_6 + 48a_4a_5 + 120a_2^2a_6 + 270a_2a_3a_5 + 180a_2a_4^2 + 195a_2^3a_4 + 180a_2^2a_5 + 780a_2^2a_3a_4 + 280a_2a_3^3 + 195a_2^4a_4 + 420a_2^3a_3^2 + 84a_2^5a_3 + 2a_2^7). \quad (79)$$

Die Koeffizient von b_3 in der rechten Seite von (70) = $a_4^{(2)} \cdot 4 \sum_{j=1}^0 \sum_{l=1}^j l(j-l + 1) a_l a_{j-l+1} a_6^{(3)j} + a_4^{(3)} 4 \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_6^{(2)j} + a_4^{(4)} 4 \sum_{j=1}^8 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_6^{(1)j} = 4(2a_3 + a_2^2) (15a_6 + 68a_2a_5 + 72a_3a_4 + 111a_2^2a_4 + 114a_2a_2^3 + 78a_2^3a_3 + 4a_2^5) + 4 \cdot 3a_2(16a_7 + 58a_2a_6 + 64a_3a_5 + 33a_4^2 + 66a_2^2a_6 + 140a_2a_3a_4 + 24a_2^3 + 24a_2^2a_4 + 37a_2^3a_2^2) + 4 \{ a_1^2a_8 + 4a_2a_7 + (6a_3 + 4a_2^2)a_6 + (8a_4 + 12a_2a_3)a_5 + (10a_5 + 16a_2a_4 + 9a_2^3)a_4 + (12a_6 + 20a_2a_5 + 24a_3a_4)a_3 + (14a_7 + 24a_2a_6 + 30a_3a_5 + 16a_4^2)a_2 + (16a_8 + 28a_2a_7 + 36a_3a_6 + 40a_4a_5) \} = 4(17a_8 + 94a_2a_7 + 84a_3a_6 + 58a_4a_5 + 217a_2^2a_6 + 390a_2a_3a_5 + 131a_2a_4^2 + 117a_2^3a_4 + 381a_2^3a_2^2 + 183a_2^4a_4 + 300a_2a_2^3 + 714a_2^2a_3a_4 + 266a_2^3a_3 + 86a_2^5a_3 + 4a_2^7). \quad (80)$

Aus (79) und (80) ergibt sich

$$\alpha_3 = 4(11a_8 + 52a_2a_7 + 36a_3a_6 + 10a_4a_5 + 97a_2^2a_6 + 120a_2a_3a_5 - 49a_2a_4^2 - 18a_2^3a_4 - 39a_2^3a_2^2 - 12a_2^4a_4 + 20a_2a_2^3 - 66a_2^2a_3a_4 + 86a_2^3a_5 + 2a_2^5a_3 + 2a_2^7). \quad (81)$$

Andererseits finden wir

$$\beta_3 = - (3 \cdot 4\bar{a}_3a_3^{(6)} + 2 \cdot 4\bar{a}_2a_8^{(6)} + 1 \cdot 4\bar{a}_1a_7^{(6)}) = -4 \{ 3\bar{a}_3(6\bar{a}_4 + {}_6C_42a_2a_3 + {}_6C_3a_2^3) + 2\bar{a}_2(6a_3 + 15a_2^2) + \bar{a}_16a_3 \}. \quad (82)$$

Die Koeffizient von b_4 in der linken Seite von (70) = $4a_5a_{10}^{(6)} + 4a_4a_{11}^{(6)} + 3a_3a_{12}^{(6)} + 2a_2a_{13}^{(6)} + a_{14}^{(6)} = 4a_5 \{ 6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_4 + a_3^2) + {}_6C_33a_2^2a_3 + {}_6C_2a_2^4 \} + 4a_4 \{ 6a_6 + {}_6C_4(2a_2a_5 + 2a_3a_4) + {}_6C_3(3a_2^2a_4 + 3a_2a_2^3) + {}_6C_24a_2^3a_3 + {}_6C_1a_2^5 \} + 3a_3 \{ 6a_7 + {}_6C_4(2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_2^2) + {}_6C_3(3a_2^2a_5 + 6a_2a_3a_4 + a_3^3) + {}_6C_2(4a_2^3a_4 + {}_4C_2a_2^2a_3^2) + {}_6C_15a_2^4a_3 + a_2^6 \} + 2a_2 \{ 6a_8 + {}_6C_4(2a_2a_7 + 2a_3a_6 + 2a_4a_5) + {}_6C_3(3a_2^2a_6 + 6a_2a_3a_5 + 3a_2a_2^2 + 3a_2^3a_4) + {}_6C_2(4a_2^3a_5 + 2{}_2C_2a_2^2a_3a_4 + 4a_2a_2^3) + {}_6C_1(5a_2^4a_4 + {}_5C_3a_2^3a_3^2) + 6a_2^5a_3 \} + \{ 6a_9 + {}_6C_4(2a_2a_8 + 2a_3a_7 + 2a_4a_6 + a_2^3) + {}_6C_3(3a_2^2a_7 + 6a_2a_3a_6 + 6a_3a_4a_5 + 3a_2^3a_5 + 3a_3a_4^2) + {}_6C_2(4a_2^3a_6 + {}_4C_22a_2^2a_3a_5 + {}_4C_2a_2^2a_4^2 + 12a_2a_2^3a_4 + a_4^3) + {}_6C_1(5a_2^4a_5 + {}_5C_32a_2^3a_3a_4 + {}_5C_2a_2^2a_3^2) + 6a_2^5a_4 + {}_6C_2a_2^4a_3^2 \} = 6a_9 + 42a_2a_8 + 48a_3a_7 + 54a_4a_6 + 39a_5^2 + 120a_2^2a_7 + 270a_2a_3a_6 + 420a_2a_4a_5 + 210a_2^3a_5 + 225a_3a_4^2 + 180a_2^3a_6 + 840a_2^2a_3a_5 + 450a_2^2a_4^2 + 900a_2a_2^3a_4 + 75a_3^4 + 210a_2^4a_5 + 900a_2^3a_8a_4 + 450a_2^3a_3^2 + 90a_2^5a_4 + 225a_2^4a_3^2 + 15a_2^5a_3. \quad (83)$

Die Koeffizient von b_4 in der rechten Seite von (70) = $a_6^{(2)} \sum_{j=1}^6 \sum_{l=1}^j l(j-l + 1) a_l a_{j-l+1} a_9^{(3)j} + a_6^{(3)} \sum_{j=1}^7 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_9^{(2)j} + a_6^{(4)} \sum_{j=1}^8 \sum_{l=1}^j l(j-l+1) a_l a_{j-l+1} a_9^{(1)j} + \sum_{l=1}^9 l(p-l) a_l a_{p-l} = (a_4 + 2a_2a_3) (15a_6 + 68a_2a_5 + 72a_3a_4 + 111a_2^2a_4 + 114a_2a_2^3 + 78a_2^3a_3 + 4a_2^5) + (3a_3 + 3a_2^2) (16a_7 + 58a_2a_6 + 64a_3a_5 + 33a_4^2 + 66a_2^2a_6 + 140a_2a_3a_4$

$$\begin{aligned}
 &+ 24a_3^3 + 24a_3^2a_4 + 37a_3^2a_2^2 + 4a_2(17a_8 + 46a_2a_7 + 54a_3a_6 + 58a_4a_5 + 32a_2a_4^2 + 62a_2a_3a_5 \\
 &+ 28a_2^2a_6 + 33a_2^2a_4) + (18a_9 + 32a_2a_8 + 42a_3a_7 + 48a_4a_6 + 25a_5^2) = 18a_9 + 100a_2a_8 \\
 &+ 90a_3a_7 + 78a_4a_6 + 25a_5^2 + 232a_2^2a_7 + 420a_2a_3a_6 + 368a_2a_4a_5 + 449a_2^2a_4^2 + 774a_2^2a_3a_5 \\
 &+ 286a_2^2a_6 + 924a_2a_3^2a_4 + 192a_2^3a_5 + 243a_3a_4^2 + 198a_2^4a_5 + 870a_2^2a_3a_4 + 72a_3^4 + 411a_2^2a_3^3 \\
 &+ 80a_2^2a_4 + 267a_3^2a_2^4 + 8a_2^6a_3. \tag{84}
 \end{aligned}$$

Aus (83) und (84) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \alpha_4 = &12a_9 + 58a_2a_8 + 42a_3a_7 + 24a_4a_6 - 14a_5^2 + 112a_2^2a_7 + 150a_2a_3a_6 - 52a_2a_4a_5 \\
 &- a_2^2a_4^2 - 66a_2^2a_3a_5 + 106a_2^3a_6 + 24a_2a_3^2a_4 - 18a_3^2a_5 + 18a_3a_4^2 - 12a_2^4a_5 - 30a_2^2a_3a_4 - 3a_4^4 \\
 &- 39a_2^2a_3^3 - 10a_2^5a_4 + 42a_2^3a_2^4 - 7a_2^6a_3. \tag{85}
 \end{aligned}$$

Wir finden aber

$$\begin{aligned}
 \beta_4 = &-(a_6^{(6)} + 4\bar{a}_1a_6^{(6)} + 3\bar{a}_3a_6^{(6)} + 2\bar{a}_2a_7^{(6)}) = -\{1 + 4\bar{a}_4(6a_4 + {}_6C_42a_2a_3 + {}_6C_3a_2^2) \\
 &+ 3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) + 2\bar{a}_2 \cdot 6a_2\}. \tag{85}
 \end{aligned}$$

Nach(73), (74), (77), (78), (81), (82), (85), (86) besteht es

$$\begin{aligned}
 &2(9a_6 + 32a_2a_5 + 42a_3a_4 + 21a_2^2a_4 + 39a_2a_3^2 - 42a_2^3a_3 - 17a_2^5)b_1 - 2(6a_4 + 30a_2a_3 \\
 &+ 20a_2^2)b_1 + 3(10a_7 + 46a_2a_6 + 22a_3a_5 + 18a_4^2 + 82a_2^2a_5 + 44a_2a_3a_4 + 66a_2^2a_4 - 26a_3^3 \\
 &- 65a_2^2a_3^2 - 24a_2^4a_3 - 5a_2^6)b_2 - 3\{2\bar{a}_2(6a_4 + {}_6C_42a_2a_3 + {}_6C_3a_2^2) + \bar{a}_1(6a_3 + 15a_2^2)\}b_2 \\
 &+ 4(11a_8 + 52a_2a_7 + 36a_3a_6 + 10a_4a_5 + 97a_2^2a_6 + 120a_2a_3a_5 - 49a_2^4a_2 - 18a_2^2a_4 \\
 &- 39a_2^2a_3^2 - 12a_2^4a_4 + 20a_2a_3^3 - 66a_2^2a_3a_4 + 86a_2^2a_5 + 2a_2^2a_3 + 2a_2^2)b_3 - 4\{3\bar{a}_3(6a_4 \\
 &+ {}_6C_42a_2a_3 + {}_6C_3a_2^2) + 2\bar{a}_2(6a_3 + 15a_2^2) + \bar{a}_16a_2\}b_3 + (12a_9 + 58a_2a_8 + 42a_3a_7 + 24a_4a_6 \\
 &- 14a_5^2 + 112a_2^2a_7 + 150a_2a_3a_6 - 52a_2a_4a_5 - a_2^2a_4^2 - 66a_2^2a_3a_5 + 106a_2^3a_6 + 24a_2a_3^2a_4 \\
 &- 18a_3^2a_5 + 18a_3a_4^2 - 12a_2^4a_5 - 30a_2^2a_3a_4 - 3a_4^4 - 39a_2^2a_3^3 - 10a_2^5a_4 + 42a_2^3a_2^4 - 7a_2^6a_3)b_4 \\
 &- \{1 + 4\bar{a}_4(6a_4 + {}_6C_42a_2a_3 + {}_6C_3a_2^2) + 3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) + 2\bar{a}_2 \cdot 6a_2\}b_4 = 0. \tag{87}
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun $s=0$ in (87), so gewinnen wir

$$\begin{aligned}
 &12a_9(0) + 58a_2(0)a_8(0) + 42a_3(0)a_7(0) + 24a_4(0)a_6(0) - 14a_5(0)^2 + 112a_2(0)^2a_7(0) \\
 &+ 150a_2(0)a_3(0)a_6(0) - 52a_2(0)a_4(0)a_5(0) - a_2(0)^2a_4(0)^2 - 66a_2(0)^2a_3(0)a_5(0) + \\
 &106a_2(0)^3a_6(0) + 24a_2(0)a_3(0)^2a_4(0) - 18a_3(0)^2a_5(0) + 18a_3(0)a_4(0)^2 - 12a_2(0)^4a_5(0) \\
 &- 30a_2(0)^3a_3(0)a_4(0) - 3a_3(0)^4 - 39a_2(0)^2a_3(0)^3 - 10a_2(0)^5a_4(0) + 42a_3(0)^3a_2(0)^4 \\
 &- 7a_2(0)^6a_3(0) - \{1 + 4\bar{a}_4(0)(6a_4(0) + {}_6C_42a_2(0)a_3(0) + {}_6C_3a_2(0)^2) + 3\bar{a}_3(0)(6a_3(0) + \\
 &15a_2(0)^2) + 2\bar{a}_2(0) \cdot 6a_2(0)\} = 0. \tag{88}
 \end{aligned}$$

Wir differenzieren nun die linke Seite von (87) in bezug auf s am Punkte $s=0$. Wir gewinnen dann

$$\begin{aligned}
 &-4(9a_6(0) + 32a_2(0)a_5(0) + 42a_3(0)a_4(0) + 21a_2(0)^2a_4(0) + 39a_2(0)a_3(0)^2 - \\
 &42a_2(0)^3a_3(0) - 17a_2(0)^5) \dots^3(0) + 4(6a_4(0) + 30a_2(0)a_3(0) + 20a_2(0)^2) \dots^2(0) - 6(10a_7(0) \\
 &+ 46a_2(0)a_6(0) + 22a_3(0)a_5(0) + 18a_4(0)^2 + 82a_2(0)^2a_5(0) + 44a_2(0)a_3(0)a_4(0) + \\
 &66a_2(0)^3a_4(0) - 26a_3(0)^3 - 65a_2(0)^2a_3(0)^2 - 24a_2(0)^4a_3(0) - 5a_2(0)^6) \kappa^2(0) + 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{2\bar{a}_2(0)(6a_4(0) + {}_6C_4 2a_2(0)a_3(0) + {}_6C_3 a_2(0)^3) + \bar{a}_1(0)(6a_3(0) + 15a_2(0)^2)\} \bar{\kappa}^2(0) - 8(11a_8(0) \\
& + 52a_2(0)a_7(0) + 36a_3(0)a_6(0) + 10a_4(0)a_5(0) + 97a_2(0)^2 a_6(0) + 120a_2(0)a_3(0)a_5(0) \\
& - 49a_4(0)^2 a_2(0) - 18a_3(0)^2 a_4(0) - 39a_3(0)^2 a_2(0)^3 - 12a_2(0)^4 a_4(0) + 20a_2(0)a_3(0)^3 \\
& - 66a_2(0)^2 a_3(0)a_4(0) + 86a_2(0)^3 a_5(0) + 2a_2(0)^6 a_3(0) + 2a_2(0)^7 \kappa(0) + 8\{3\bar{a}_3(0)(6a_4(0) \\
& + {}_6C_4 2a_2(0)a_3(0) + {}_6C_3 a_2(0)^3) + 2\bar{a}_2(0)(6a_3(0) + 15a_2(0)^2) + \bar{a}_1(0)6a_2(0)\} \bar{\kappa}(0) + (12a_9 \\
& + 58a_2a_8 + 42a_3a_7 + 24a_4a_6 - 14a_5^2 + 112a_3^2a_7 + 150a_2a_3a_6 - 52a_2a_4a_5 - a_2^2a_4^2 - \\
& 66a_2^2a_3a_5 + 106a_2^3a_6 + 24a_2a_3^2a_4 - 18a_3^2a_5 + 18a_3a_4^2 - 12a_2^4a_5 - 30a_3^3a_3a_4 - 3a_3^4 - 39a_2^2a_3^3 \\
& - 10a_5^2a_4 + 42a_3^2a_4^2 - 7a_3^5a_3)'_{s=0} - \{1 + 4\bar{a}_4(6a_4 + {}_6C_4 2a_2a_3 + {}_6C_3 a_3^3) + 3\bar{a}_3(6a_3 + 15a_2^2) \\
& + 2\bar{a}_2 6a_2\}'_{s=0} = 0. \tag{89}
\end{aligned}$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY.

(Received December 20, 1960)