ÜBER DIE p-WERTIGEN FUNKTIONEN

KEN'ITI KOSEKI

Es sei

$$w=f(z)=z^p+a_1z^{p+1}+\cdots \qquad , p\geqq 1$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ reguläre und p-wertige Funktion. Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Einheitskreises reguläre und p-wertige Funktion von der obigen Form die normierte p-wertige Funktion.

In der vorliegenden Arbeit will ich die kleinste obere Grenze der absoluten Beträge der Koeffizienten von z^{p+1} von allen normierten p-wertigen Funktionen in $|z|<1$ untersuchen.

§ 1. Löwnersche Differenzialgleichungen für die p-wertigen Funktionen.

Wir konstruieren ein Schlitzgebiet, dessen Schlitz von einem willkürlich gewählten Punkt α der Peripherie des Einheitskreises $|z|<1$ in der z-Ebene zu einem willkürlichen Punkt β von $|z|<1$ führt. Wir bezeichnen dieses Schlitzgebiet bezw. diesen Schlitz mit G_{t_1} und l.

Es sei γ ein von α und β verschiedener willkürlicher Punkt auf l. Der Schlitz l wird dann durch den Punkt γ in die beiden Teile l_1 und l_2 zerlegt, einer von denen, etwa l_1, den Punkt β und nicht den Punkt α enthält. Das Gebiet $|z|<1$ mit dem Schlitz l_1 bezeichnen wir mit G_t.

Wir bilden nun einundeindeutig und konform den Kreis $|w|<1$ auf das Gebiet G_t ab, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit

$$z=h(w,t)=e^{-(t_1-t)}(w+g_1(t)\,w^2+\cdots+g_n(t)\,w^{n+1}+\cdots).$$

Wenn der Punkt γ anf l durchschreitet, so erhalten wir eine Schar von den schlichten Funktionen

$$z=h(w,t)=e^{-(t_1-t)}(w+g_1(t)w^2+\cdots+g_n(t)w^{n+1}+\cdots),\quad 0\leqq t\leqq t_1. \tag{1}$$

Es gibt dann bekanntlich für die Schar der Funktionen $h(w,t)$ die folgende Löwnersche[1] Differentialgleichung

$$\frac{\partial h(w,t)}{\partial t}=\frac{\partial h(w,t)}{\partial w}w\frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w} \tag{2}$$

mit der Bedingung

$$h(w,t_1)=w \tag{3}$$

---

1) K. Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Bd. 89. S. 103.

Wir konstruieren nun aus den beiden $h(w, t)$ und $w_1 = f(z)$ eine neue Funktion $w_1 = f(h(w, t)) = \varphi(w, t)$, so ist die Funktion $\varphi(w, t)$ offenbar regulär in $|w| < 1$. Es gilt überdies

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(h(w, t))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(w, t)}{\partial t} \\ \frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial w} &= \frac{\partial f(h(w, t))}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(w, t)}{\partial w} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir gewinnen aus den Formeln (2) und (4) die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}, \qquad 0 \leqq t \leqq t_1. \tag{5}$$

Es besteht ausserdem

$$\varphi(w, t_1) = f(h(w, t_1)) = f(w) = w^p + a_1 w^{p+1} + \cdots \tag{6}$$

Also, wenn eine beliebige normierte p-wertige Funktion $w_1 = f(w)$ in $|w| < 1$ gegeben ist, wird diese Funktion $w_1 = f(w)$ die Anfangsfunktion von der Löwnerschen Differentialgleichung (5).

Wir setzen

$$\begin{aligned} \varphi(w, t) = f(h(w, t)) &= e^{-p(t_1 - t)}(w^p + p g_1(t) w^{p+1} + \cdots) + a_1 e^{-(p+1)(t_1 - t)} w^{p+1} + \cdots \\ &= e^{-(t_1 - t)p}(w^p + a_1(t) w^{p+1} + \cdots \quad + a_n(t) w^{p+n} + \cdots). \end{aligned} \tag{7}$$

Da die Taylorsche Entwickelung von $\varphi(w, t)$ mit dem Glied w^p beginnt, so ist $\varphi(w, t)$ mindestens p-wertig. Anderseits, da $f(z)$ p-wertig und $h(w, t)$ schlicht ist, ist $\varphi(w, t)$ höchstens p-wertig. Folglich ist die Funktion $\varphi(w, t)$ genau p-wertig in $|w| < 1$.

Also bekommen wir den folgenden

Satz I. *Wenn eine beliebige normierte p-wertige Funktion $w_1 = f(w)$ in $|w| < 1$ gegeben ist, wird diese Funktion $w_1 = f(w)$ die Anfangsfunktion von der Löwnerschen Differentialgleichung*

$$\frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \kappa(t)w}{1 - \kappa(t)w}, \qquad 0 \leqq t \leqq t_1$$

mit der Bedingung

$$\varphi(w, t_1) = f(w) = w^p + a_1 w^{p+1} + \cdots$$

Die Funktion $\varphi(w, t)$ ist immer regulär und p-wertig in $|w| < 1$ für jedes t in $0 \leqq t \leqq t_1$.

Aus (7) folgt es unmittelbar

$$a_1'(t) = a_1(t) + 2\kappa(t)p, \tag{8}$$

somit ist

$$a_1(t)e^{-t} - a_1(0) = 2p\int_0^t \kappa(t)e^{-t}dt, \tag{9}$$

für jedes t *in* $0 \leqq t \leqq t_1$.

Wenn $\varphi(w, t_1) = f(w) = w^p$ ist, so folgt aus (9)

$$a_1(0) = 2p\int_{t_1}^0 \kappa(t)e^{-t}dt.$$

Da $|\kappa(t)| = 1$ ist, ist es $|a_1(0)| < 2p$.

Wir bezeichnen im folgendan die Familie aller p-wertigen Funktion $w_1 = g(z)$ in $|w| < 1$ mit (L) von der Art, dass es für $w_1 = g(z)$ die folgende Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial\varphi(w, t)}{\partial w} w \frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w}, \quad 0 \leqq t \leqq t_0 \\ &\varphi(w, t_0) = w^p, \quad \varphi(w, 0) = g(w) \end{aligned}\right\}$$

besteht, wo $|\kappa(t)| = 1$ und die $\kappa(t)$ stuckweise stetig ist.

Hierbei entsteht sich die folgende Frage. Können wir für eine willkürlich gegebene normierte p-wertige Funktion $w = f(z)$ in $|z| < 1$ die Folge der p-wertigen Funktionen $\{f_n(z)\}$ auswählen, derart dass jede $f_n(z)$ zu der Familie (L) gehört und $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ ist?

§ 2. Die Folge der Riemannschen Flächen.

Es sei $\{G_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ eine Folge der über der w-Ebene liegenden Riemannschen Flächen, und jede G_n sei einfach-zusammenhängend. Wir nehmen überdies an, dass die Folge $\{G_n\}$ den folgenden Bedingungen 1° und 2° genügt.

1°. G_n ist p-blättrig für alle n $(n = 1, 2, \cdots)$.

2°. Jede G_n enthält den über dem Punkt $w = 0$ liegenden Punkt, der ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $p-1$ ist.

Definition: Es seien A und B die beiden über der w-Ebene liegenden Riemannschen Flächen. Wenn es eine eindeutige Abbildung von A in B (nicht notwendig auf) mit den folgenden a° und b° gibt, so sagen wir, dass A in B enthalten ist.

a°. Wir bezeichnen diese Abbildung mit $f(q)$. Wenn $q_1 \in A$ und $q_2 \in A$ und $q_1 \neq q_2$ ist, so ist immer $f(q_1) \neq f(q_2)$.

b°. Der Spurpunkt von $f(q)$ stimmt immer mit dem Spurpunkt vong überein. Wenn q ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $s-1$ ist, so ist der Punkt $f(q)$ ein Verzweigungspunkt von der Ordnung von $s-1$.

Wenn auch die Fläche A eine berandete Teilfläche einer Riemannschen Fläche, gilt die obige Definition für A und B.

Definition[2]: Es sei $\{G_n\}(n=1, 2, \cdots)$ eine Folge der über der w-Ebene liegenden Riemannschen Flächen, und jede G_n sei einfach-zusammenhängend. Die Folge genüge den obigen Bedingungen 1° und 2°.

Wir nennen dann eine über der w-Ebene liegende Riemannsche Fläche K mit den folgenden Bedingungen c° und d° den Kern von $\{G_n\}$.

c°. K ist p-blättrig, und K enthält den über dem Punkt $w=0$ liegenden Punkt, der ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $p-1$ ist. Jede berandete Teilfläche von K ist, für fast alle n, in G_n enthalten.

d°. Eine die Fläche K enthaltende und von K verschiedene Riemannsche Fläche genügt keineswegs der obigen Bedingung c°.

Wenn jede Teilfolge von $\{G_n\}$ als Kern die Fläche K hat, so sagen wir, dass die Folge $\{G_n\}$ gegen K strebt.

Satz II. *Es sei* $\{B_n\}(n = 1, 2, \cdots)$ *eine Folge der über der* w*-Ebene liegenden Riemannschen Flächen von der Art, dass jede* B_n *einfach-zusammenhängend und hyperbolisch ist, und dass jede* B_n *den obigen Bedingungen* 1° *und* 2° *genügt. Die Folge* $\{B_n\}$ *strebe gegen seinen Kern* K.

Wir bezeichnen die einundeindeutige und konforme Abbildung von dem Kreis $|z|<1$ *auf* B_n *mit*

$$w = f_n(z) = a_p(n)z^p + a_{p+1}(n)z^{p+1}+\cdots,\ a_p>0.$$

Wenn die Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ *gleichmässig beschränkt ist, so konvergiert die Folge* $\{f_n(z)\}$ *selbst in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von dem Kreis* $|z|<1$ *gleichmässig und die Grenzfunktion* $w=f(z)$ *bildet den Kreis* $|z|<1$ *einundeindeutig und konform auf* K *ab.*

Beweis. Da die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmässig beschränkt ist, so bildet die Folge $\{f_n(z)\}$ die Montelsche normale Familie. Daher können wir aus $\{f_n(z)\}$ eine Teilfolge $\{f_{k_n}(z)\}$ auswählen, so dass die Folge $\{f_{k_n}(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von dem Kreis $|z|<1$ gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion von $\{f_{k_n}(z)\}$ bezeichnen wir mit $w=f(z)$.

Indem wir die Veränderliche w nur in K bewegt, gewinnen wir die Umkehrungsfunktion[3] $z=\varphi_n(w)$ von $w=f_n(z)$.

Es sei $\widetilde{w}_0$ ein über $w = 0$ liegender Punkt auf K. Der Punkt $\widetilde{w}_0$ ist dann nach der Voraussetzung des Satzes der Punkt von der Ordnung $p-1$. Wir setzen $w=t^p$. Es gibt dann eine Umgebung $\widetilde{U}(\widetilde{w}_0)$ von $\widetilde{w}_0$ auf K, so dass die abgeschlossene Hülle von $\widetilde{U}(\widetilde{w}_0)$ umkehrbar eindeutig uud konform auf den abgeschlossenen Kreis $|t|\leqq r$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\widetilde{U}(\widetilde{w}_0)$ keine von $\widetilde{w}_0$ verschiedenen Verzweigung-

2) C. Carathéodory. Stetige Konvergenz und normale Familien von Funktionen. Math. Ann. 101. (1929). S. 515—533.

3) Ein Stuck der Umkehrungsfunktion vou $w=f_n(z)$.

spunkte enthält.

Da K der Kern von B_n ist, ist $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ in fast alle B_n enthalten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ in alle B_n enthalten ist.

Wir setzen $z=\varphi_{k_n}(w)=\varphi_{k_n}(t^p)=\tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. In dem Gebiet $|t|<r+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$, genug klein) ist die Funktion $z=\tilde{\varphi}_{k_n}(t)$ regulär und eindeutig, und überdies gilt es $|\tilde{\varphi}_{k_n}(t)|<1$. Folglich bildet die Folge $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ die normale Familie in $|t|<r+\varepsilon$. Es gibt daher eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t|\leqq r$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bezw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ bezw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Nach der Voraussetzung des Satzes ist die Folge $\{f_n(z)\}$ gleichmässig beschränkt. D. h. $|f_n(z)|<M$. $(n=1, 2, \cdots)$. Es ist dann nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|f_{p_n}^{(p)}(0)|=|p!\,a_p|\leqq Mp!$$

Daher ist

$$|\tilde{\varphi}'_{p_n}(0)|=\left|\frac{p!^{\frac{1}{p}}}{p\{f_{p_n}^{(p)}(0)\}^{\frac{1}{p}}}\right|\geqq\frac{1}{pM^{\frac{1}{p}}}. \tag{10}$$

Aus (10) folgt ohne weiteres

$$|\tilde{\varphi}'(0)|\geqq\frac{1}{pM^{\frac{1}{p}}}. \tag{11}$$

Folglich ist die Funktion $\tilde{\varphi}(t)$ nicht eine Konstante in $|t|\leqq r$.

Es gilt aber

$$|f^{(p)}(0)|=\lim_{n\to\infty}|f_{p_n}^{(p)}(0)|=\lim_{p\to\infty}\left|\frac{p!^{\frac{1}{p}}}{p\tilde{\varphi}'_{p_n}(0)}\right|^p\geqq\left(\frac{rp!^{\frac{1}{p}}}{p}\right)^p.$$

Daher nimmt die Funktion $f(z)$ die folgende Form an.

$$f(z)=\frac{f^{(p)}(0)}{p!}z^p+\cdots,\quad f^{(p)}(0)\neq 0.$$

Also gibt die Funktion $f(z)$ eine einundeindeutige und konforme Abbildung von der Umgebung $U(0)$ von $z=0$ anf die Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_0)$ von $\tilde{w}$. auf K.

Zweitens nehmen wir einen willkürlichen Punkt $\tilde{w}_1$ auf K auf. Wir bezeichnen den Spurpunkt von $\tilde{w}_1$ mit w_1. Der Punkt $\tilde{w}_1$ hat die bestimmte Ordnung $s-1$. Wenn der Punkt $\tilde{w}_1$ ein gewöhnlicher Punkt ist, setzen wir offenbar $s=1$. Wir setzen $w-w_1=t^s$.

Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ von $\tilde{w}_1$ auf K, so dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_1)$ umkehrbar eindeutig und konform auf den abgeschlossenen Kreis $|t| \leqq r$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\widetilde{U}(\widetilde{w}_1)$ keine Verzweigungspunkte, eventuell abgesehen von $\widetilde{w}_1$, enthält.

Da K der Kern von B_n ist, ist $\widetilde{U}(\widetilde{w}_1)$ in fast alle B_n enthalten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\widetilde{U}(\widetilde{w}_1)$ in alle B_n enthalten ist.

Wir setzen $z = \varphi_{k_n}(w) = \varphi_{k_n}(w_1 + t^s) = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. In dem Gebiet $|t| < r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ genug klein) ist die Funktion $z = \tilde{\varphi}_{k_n}(t)$ regulär und eindeutig, und überdies gilt es $|\tilde{\varphi}_{k_n}(t)| < 1$. Folglich bildet die Folge $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$ die normale Familie in $|t| < r + \varepsilon$. Es gibt daher eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t| \leqq r$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bezw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bezw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Wir setzen $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(w)$, so ist die Funktion $\varphi(w)$ wie in dem Vorigen nicht eine Konstante in der Umgebung von $w = 0$. Folglich ist $\varphi(w)$ nicht eine Konstante in der Umgebung von w_1, und damit ist $\tilde{\varphi}(t)$ auch nicht eine Konstante in $|t| \leqq r$.

Da die Funktion $\tilde{\varphi}_{q_n}(t)$ schlicht in $|t| \leqq r$ ist, und da die Grenzfunktion $\tilde{\varphi}(t)$ nicht eine Konstante ist, so ist $\tilde{\varphi}(t)$ auch schlicht in $|t| \leqq r$. Daher ist $\tilde{\varphi}'(0) \neq 0$.

Es ist aber nach dem Weierstrassschen Satz $\lim \tilde{\varphi}'_{q_n}(0) = \tilde{\varphi}'(0)$. Folglich gibt es eine possitive Zahl N, so dass es

$$\left.\begin{array}{ll} |\tilde{\varphi}'_{q_n}(0)| > N & (n = 1, 2, \cdots) \\ |\tilde{\varphi}'(0)| > N & \end{array}\right\} \tag{12}$$

gilt.

Wir setzen $\tilde{\varphi}_{q_n}(0) = z_n$. Das Bildgebiet von $|t| \leqq r$ durch die Funktion $z = \tilde{\varphi}_{q_n}(t)$ enthält nach dem Koebeschen Viertelsatz[4] und der Ungleichung (12) den Kreis von dem Mittelpunkt z_n und von dem Radius $\frac{rN}{4}$. Ebenfalls, wenn wir $\tilde{\varphi}(0) = z_0$ setzen, enthält das Bildgebiet von $|t| \leqq r$ durch die Funktion $z = \tilde{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_0 und von dem Radius $\frac{rN}{4}$.

Der Punkt z_n $(n = 1, 2, \cdots)$ wird daher in dem Kreis $|z| < \left(1 - \frac{rN}{4}\right) + \eta$ enthalten für jede positive Zahl η.

Da die Folge $\{f_n(z)\}$ in $|z| < 1$ gleichmässig beschränkt ist, so ist die Folge $\{f_n^{(s)}(z)\}$ auch gleichmässig beschränkt in $|z| < 1$. Daher ist die Folge $\{f_n^{(s)}(z)\}$ nach dem Montelschen Satz gleichgradig stetig in $|z| <$

4) L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie. Vol. 11. S. 75.

$\left(1-\frac{rN}{4}\right)+\gamma$. Also gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, so dass es

$$|f_n^{(s)}(z)-f_n^{(s)}(z')|<\varepsilon \tag{13}$$

ist für alle n ($n=1, 2, \cdots$) und alle z und z' unter der Beschränkung $|z-z'|<\delta$ und $|z|<\left(1-\frac{rN}{4}\right)+\gamma$ und $|z'|<\left(1-\frac{rN}{4}\right)+\gamma$.

Es gibt eine Nummer N, so dass

$$|z_0-z_n|<\delta \tag{14}$$

ist für alle n unter der Beschränkung $n>N$.

Aus (13) und (14) gilt es für alle $n>N$

$$|f_{q_n}^{(s)}(z_0)-f_{q_n}^{(s)}(z_n)|<\varepsilon\,. \tag{15}$$

Aus (15) ergibt es sich

$$|f^{(s)}(z_0)|=\lim_{n\to\infty}|f_{q_n}^{(s)}(z_0)|\geqq\overline{\lim_{n\to\infty}}|f_{q_n}^{(s)}(z_n)|-\varepsilon=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{s!^{\frac{1}{s}}}{s\tilde{\varphi}_{q_n}'(0)}\right|^{\frac{1}{s}}-\varepsilon\,. \tag{16}$$

Anderseits ist es nach der Cauchyschen Ungleichung

$$|\tilde{\varphi}_{q_n}'(0)|\leqq\frac{1}{r}. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt unmittelbar

$$|f^{(s)}(z_0)|\geqq\left|\frac{s^{\frac{1}{s}}r}{s}\right|^{\frac{1}{s}}-\varepsilon\,.$$

Also ist $f^{(s)}(z)\neq 0$.

Wir nehmen nun eine ganze Zahl s_1 auf, derart dass $0\leqq s_1<s$ ist. Es gibt zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, so dass es

$$|f_n^{(s_1)}(z)-f_n^{(s_1)}(z')|<\varepsilon \tag{18}$$

ist für alle $n (n=1, 2, \cdots)$ und alle z und z' unter der Beschränkung $|z-z'|<\delta$ und $|z|<\left(1-\frac{rN}{4}\right)+\gamma$ und $|z'|<\left(1-\frac{Nr}{4}\right)+\gamma$.

Es gibt eine Nummer N, so dass es

$$|z_0-z_n|<\delta \tag{19}$$

ist für alle n unter der Beschränkung $n<N$.

Aus (18) und (19) gilt es für alle $n>N$

$$|f_{q_n}^{(s_1)}(z_0)-f_{q_n}^{(s_1)}(z_n)|<\varepsilon\,. \tag{20}$$

Aus (20) ergibt es sich, wenn $s_1>0$ ist,

$$|f^{(s_1)}(z_0)| = \lim_{n\to\infty} |f^{(s_1)}_{q_n}(z_0)| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} |f^{(s_1)}_{q_n}(z_n)| + \varepsilon = \varepsilon.$$

Da ε eine willkürliche kleine positive Zahl ist, ist $|f^{(s_1)}(z_0)|=0$.

Wenn $s_1=0$ ist, so ist es aus

$$|f_{q_n}(z_0) - f_{q_n}(z_n)| = |f_{q_n}(z_0) - w_1| < \varepsilon$$

für alle $n<N$. Daher ist

$$f(z_0) = \lim_{n\to\infty} f_{q_n}(z_0) = w_1.$$

Folglich gewinnen wir die Entwickelung

$$f(z) = w_1 + \frac{f^{(s)}(z_0)}{s!}(z-z_0)^s + \cdots, \quad f^{(s)}(z_0) \neq 0.$$

Also gibt die Funktion $f(z)$ eine einundeindeutige und konforme Abbildung von einer Umgebung $U(z_0)$ von $z=z_0$ auf eine Umgebung $\tilde{\tilde{U}}(\tilde{w}_1)$ von $\tilde{w}_1$ auf K.

Wir nehmen die beiden willkürlichen, voneinander verschiedenen Punkte $\tilde{w}_2$ unp $\tilde{w}_3$ auf K auf. Wir bezeichnen den Spurpunkt von $\tilde{w}_2$ bezw. $\tilde{w}_3$ mit w_2 bezw. w_3. Der Punkt $\tilde{w}_2$ bezw. $\tilde{w}_3$ hat die bestimmte Ordnung s_2-1 bezw. s_3-1. Wir setzen $w-w_2=t^{s_2}$ und $w-w_3=t^{s_3}$.

Es gibt eine Umgebung $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bezw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ von $\tilde{w}_2$ bezw. $\tilde{w}_3$ auf K, so dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bezw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ umkehrbar eindeutig und konform auf den abgeschlossenen Kreis $|t|\leqq r_2$ bezw. $|t|\leqq r_3$ sich abbilden lässt, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ bezw. $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ keine Verzweigungspunkte, eventuell abgesehen von $\tilde{w}_2$ bezw. $\tilde{w}_3$, enthält, und dass die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_2)$ und die abgeschlossene Hülle von $\tilde{U}(\tilde{w}_3)$ keine Punkte gemein haben.

In dem Gebiet $|t|<r_2+\varepsilon\,(\varepsilon>0)$ setzen wir $z=\varphi_{k_n}(w)=\varphi_{k_n}(w_2+t^{s_2})=\tilde{\varphi}_{k_n}(t)$. Es gibt dann eine Teilfolge von $\{\tilde{\varphi}_{k_n}(t)\}$, welche in $|t|\leqq r_2$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bezw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\tilde{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bezw. $\tilde{\varphi}(t)$.

Ebenfalls, in dem Gebiet $|t|<r_3+\varepsilon$ setzen wir $z=\varphi_{k_n}(w)=\varphi_{k_n}(w_3+t^{s_3})=\bar{\varphi}_{k_n}(t)$. Es gibt dann eine Teilfolge von $\{\bar{\varphi}_{q_n}(t)\}$, welche in $|t|\leqq r_3$ gleichmässig konvergiert. Diese Teilfolge bezw. die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\{\bar{\varphi}_{q_n}(t)\}$ bezw. $\bar{\varphi}(t)$.

Es gibt eine positive Zahl N_1, so dass

$$\left.\begin{array}{l} |\tilde{\varphi}'_{q_n}(0)|>N_1 \\ |\tilde{\varphi}(0)|>N_1 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

gilt. Ebenfalls gibt es eine positive Zahl N_2, so dass

$$\left.\begin{array}{l} |\bar{\varphi}'_{q_n}(0)| > N_2 \\ |\bar{\varphi}'(0)| > N_2 \end{array}\right\}$$

gilt.

Wir setzen $\bar{\varphi}_{q_n}(0) = z_{n,2}$ und $\bar{\varphi}(0) = z_2$. Das Bildgebiet von $|t| \leqq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{q_n}(t)$ enthält nach der Formel (21) den Kreis von dem Mittelpunkt $z_{n,2}$ und von dem Radius $\frac{rN_1}{4}$. Ebenfalls enthält das Bildgebiet von $|t| \leqq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_2 und von dem Radius $\frac{rN_1}{4}$.

Wir setzen $\bar{\varphi}_{p_n}(0) = z_{n,3}$ und $\bar{\varphi}(0) = z_3$. Das Bildgebiet von $|t| \leqq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ enthält den Kreis von dem Mittelpunkt $z_{n,3}$ und von dem Radius $\frac{rN_2}{4}$. Ebenfalls enthält das Bildgebiet von $|t| \leqq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}(t)$ den Kreis von dem Mittelpunkt z_3 und von dem Radius $\frac{rN_2}{4}$.

Da die Funktion $w = f_n(z)$ die einundeindeutige und konforme Abbildung von dem Kreis $|z| < 1$ auf B_n gibt, so haben das Bildgebiet von $|t| \leqq r_2$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ und das Bildgebiet von $|t| \leqq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ keine Punkte gemeinsam.

Anderseits wird der Kreis $|z - z_2| < \frac{rN_1}{8}$ bezw. $|z - z_3| < \frac{rN_2}{8}$ in dem Bildgebiet von $|t| \leqq r_2$ bezw. $|t| \leqq r_3$ durch die Funktion $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$ bezw. $z = \bar{\varphi}_{p_n}(t)$, für genügend grosse n, enthalten. Daher haben der Kreis $|z - z_2| < \frac{rN_1}{8}$ und der Kreis $|z - z_3| < \frac{rN_2}{8}$ keine Punkte gemeinsam. Da $f(z_2) = w_2$ und $f(z_3) = w_3$ ist, bildet die Funktion $w = f(z)$ den Kreis $|z| < 1$ oder ein Teilgebiet von $|z| < 1$ einundeindeutig und konform auf K ab.

Wir wollen nun zeigen, dass das Bildgebiet von dem Kreis $|z| < 1$ durch die Funktion $w = f(z)$ mit der Riemannschen Fläche K übereinstimmt. Es sei $z = z_0$ ein Punkt in $|z| < 1$, so dass $f'(z_0) \neq 0$ ist. Wir nehmen einen in einer genügend kleinen Umgebung von $z = 0$ enthaltenen Punkt $z = z_1$ auf, und wir ziehen einen einfachen, von z_1 zu z_0 führenden Bogen l, so dass der Bogen l in $|z| < 1$ enthalten ist und auf dem Bogen l die Ableitung $f'(z)$ keineswegs verschwindet.

Wir können nach dem Heine-Borelschen Satz endlich viele abgeschlossene Kreisscheiben $S_1, S_2, \cdots, S_s$ derart angeben, dass jeder Punkt von l dem Inneren mindestens einer dieser Kreisscheiben angehört, und dass die

Ableitung $f'(z)$ auf jeder dieser Kreisscheiben keineswegs verschwindet.

Nach dem Rouchéschen Satz verschwindet die Ableitung $f_n'(z)$ für genügend grosse $n > N_1$ auf jeder dieser Kreisscheiben keineswegs. Es gibt daher eine Zahl M, so dass es

$$\left.\begin{array}{l} |f'(z)| > M \\ |f_n'(z)| > M \text{ für } n > N \end{array}\right\} \tag{22}$$

auf jeder $S_i (i=1, 2, \cdots)$ gilt.

Wir können ein abgeschlossenes Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ auf den Bogen l topologisch abbilden, so dass $u=0$ und $z=z_1$ zueinander sich ordnen lassen. Diese Abbildung bezeichnen wir mit $z=z(u)$. Wir nehmen nun an, dass es auf dem Intervalle $0 \leqq u \leqq 1$ einen den folgenden Eigenschaften genügenden Punkt $u=u_0$ gibt.

1. Der Punkt $f(z(u_0))$ ist nicht in K enthalten.
2. Jeder Punkt $f(z(u))$ für $0 \leqq u < u_0$ ist in K enthalten.

Es gibt dann einen Punkt $u=u_1$ auf $0 \leqq u < u_0$ mit den folgenden Eigenschaften.

1. Für eine genügend kleine positive Zahl r ist der abgeschlossene Kreis $|z-z(u_1)| \leqq r$ in der Vereinigungsmenge $S_1+S_2+\cdots+S_s$ enthalten, und $f(z)$ ist in $|z-z(u_1)| \leqq r$ schlicht.
2. Für jedes u in $u_1 \leqq u \leqq u_0$ ist der Punkt $z=z(u)$ in dem obigen Kreis $|z-z(u_1)| < r$ enthalten.

Nach der obigen Bedingung 1 ist $|f(z)-f(z(u_0))| \neq 0$ auf $|z-z(u_1)|=r$. Der absolute Betrag $|f(z)-f(z(u_0))|$ nimmt seine kleinste obere Grenze an einem Punkt der Kreisperipherie $|z-z(u_1)|=r$ an. Diese kleinste obere Grenze bezeichnen wir mit ρ. Es gibt eine positive Nummer N, so dass es $|f(z)-f_n(z)| < \rho$ ist für alle n und z unter der Beschränkung $n > N$ und $z \in$ der Kreisperipherie $|z-z(u_1)|=r$. Nach dem Rouchéschen Satz nimmt daher die Funktion $f_n(z)$, für $n > N$, den Wert $f(z(u_0))$ genau nur einmal in $|z-z(u_1)| < r$ an.

Wir setzen $f_n(z_n)=f(z(u_0))$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Daher enthält das Bildgebiet von $|z-z_n| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f_n(z)$ den Kreis von dem Mittelpunkt $f(z(u_0))$ und von dem Radius $\frac{rM}{8}$. Folglich enthält das Bildgebiet von $|z-z(u_0)| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f(z)$ den Kreis von dem Mittelpunkt $f(z(u_0))$ und von dem Radius $\frac{rM}{8}$.

Das Bildgebiet von $|z-z_n| < \frac{r}{2}$ durch die Funktion $f_n(z)$ ist nach der

Voraussetzung des Satzes in B_n enthalten. Da K der Kern von $\{B_n\}$ ist, so muss das Bildgebiet von $|z-z(u_0)|<\frac{r}{2}$ durch die Funktion $f(z)$, nach der Kern-Bedingung d°, in K enthalten sein. Also haben wir gezeigt, dass das Bild von der kleinen Umgebung von $z=z_0$ durch die Funktion $w=f(z)$ in der Fläche K enthalten, wenn $f'(z_0)\neq 0$ ist.

Es sei nun $z=z_0$ ein Punkt in $|z|<1$, so dass die Ableitung $f'(z_0)=0$ ist. Wir nehmen einen in einer genügend kleinen Umgebung von $z=0$ enthaltenen Punkt $z=z_1$ auf, und wir ziehen einen einfachen, von z_1 zu z_0 führenden Bogen l, so dass der Bogen l in $|z|<1$ enthalten ist und auf dem Bogen l, ausser dem Punkt z_0, die Ableitug $f'(z)$ keineswegs verschwindet. Auf ganz analoge Weise mit der Obigen, können wir zeigen, dass das Bildgebiet von einer kleinen Umgebung von $z=z_0$ durch die Funktion $f(z)$ in der Fläche K enthalten ist.

Also bildet die Funktion $w=f(z)$ den Kreis $|z|<1$ einundeindeutig und konform auf der Fläche K ab. Wir wollen schliesslich zeigen, dass die gegebene Folge $\{f_n(z)\}$ selbst in dem Kreise $|z|<1$ konvergiert. Angenommen in der Tat, dass die Folge $\{f_n(z)\}$ nicht in $|z|<1$ konvergiert. Es gibt dann die beiden Teilfolgen $\{f_{h_n}(z)\}$ und $\{f_{j_n}(z)\}$ von $\{f_n(z)\}$, und zwar, dass sowohl $\{f_{h_n}(z)\}$ als auch $\{f_{j_n}(z)\}$ in dem Kreis $|z|<1$ konvergent ist. Die Grenzfunktion von $\{f_{h_n}(z)\}$ bezw. $\{f_{j_n}(z)\}$ bezeichnen wir mit $F_1(z)$ bezw. $F_2(z)$. Die Funktion $F_1(z)$ bezw. $F_2(z)$ nimmt die Form an.

$$F_1(z)=b_p z^p+\cdots \qquad , b_p>0$$
$$F_2(z)=c_p z^p+\cdots \qquad , c_p>0.$$

Da $\{B_n\}$ gegen K strebt, bildet sowohl $F_1(z)$ als auch $F_2(z)$ den Kreis $|z|<1$ einundeindeutig und konform auf die Fläche K ab. Daher muss $F_1(z)=F_2(z)$ sein. W. z. b. w.

§ 3. Koeffizienten der p-wertigen Funktionen.

Satz III. *Es sei $w=f(z)$ eine, in dem Kreise $|z|<1$ reguläre und normierte, p-wertige Funktion, derart dass die Ableitung $f'(z)$ keineswegs in $|z|<1$ verschwindet. Wir können dann eine Folge der p-wertigen Funktionen $\{f_n(z)\}$ auswählen, derart dass jede $f_n(z)$ zu der Familie (L) gehört und $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=f(z)$ ist.*

Beweis. Wir setzen $w=\frac{f(rz)}{r^p}=f_r(z)$, wo $0<r<1$ ist. Die Funktion $f_r(z)$ ist dann eine in $|z|<1$ reguläre, normierte und beschränkte, p-wertige Funktion. Wir nehmen eine zunehmende Folge $\{r_n\}(n=1, 2, \cdots)$ auf, so dass jede $r_n>0$ ist und r_n-1 mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt. Die Folge der

Funktionen $\{f_{r_n}(z)\}$ strebt dann in jedem abgeschlossenen Teilgebiet in dem Kreis $|z|<1$ gleichmässig gegen $f(z)$ strebt. Folglich können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit von Anfang an annehmen, dass die gegebene p-wertige Funktion $f(z)$ beschränkt ist.

Die Funktion $w=f(z)$ bildet den Kreis $|z|<1$ einundeindeutig und konform auf die p-blättrige Riemannsche Fläche, welche über der w-Ebene liegt. Es gibt[5] dann die Greensche Funktion $G(w, 0)$ zum Pole $w=0$ der Fläche R.

Es sei $\{\lambda_n\}$ eine abnehmende Folge der positiven Zahlen, so dass λ_n mit $\frac{1}{n}$ gegen 0 strebt. Die Niveau-Kurve $G(w, 0)=\lambda_n$ zerlegt die Flache R in die beiden Teilflächen. Eine Fläche von diesen Teilflächen enthält den über $w=0$ liegenden Punkt. Diese Teilfläche bezeichnen wir mit R_n. Die Fläche R ist dann offenbar der Kern der Flächen-Folge $\{R_n\}$.

Wir bezeichnen das Maximum der Entfernungen zwischen dem Punkt $w=0$ und der Spurpunkte der Grenzpunkte von R_n mit d_n. Es ist offenbar $d_n>0$. Wir nehmen eine zunehmende Folge der positiven Zahlen $\{\rho_q\}$ von der Art, dass ρ_q gegen d_n mit $q\to\infty$ strebt. Die Funktion $w=z^p$ bildet den Kreis $|z|<\rho_q^{\frac{1}{p}}$ einundeindeutig und konform auf die über der w-Ebene liegende Riemannsche Fläche S ab. Die Fläche S wird durch die Begrenzung[6] von R_n in die höchstens abzählbaren Teilflächen zerlegt. Unter diesen Teilflächen enthält nur eine einzige Teilfläche den über dem Punkt $w=0$ liegenden Punkt. Diese Teilfläche bezeichnen wir mit T. Die Begrenzung von T ist die Vereinigungsmenge von einer Teilmenge der Begrenzung von S und einer Teilmenge der Begrenzung von R_n. Diese Teilmenge der Begrenzung von R_n besteht aus einigen analytischen Kurven. Indem wir im notwendigen Fall eines Stück dieser analytischen Kurven beseitigen, bekommen wir eine Riemannsche Fläche S_n, welche mit der Riemannschen Fläche S – einige Schlitze übereinstimmt.

Wir bilden den Kreis $|z|<1$ einundeindeutig und konform auf die Fläche S_n ab durch die Funktion $w=f_n(z)=a_pz^p+\cdots$, $a_p>0$. Die Funktion $w=f_n(z)$ gehört dann zu der Familie (L), und die $w=f_n(z)$ approximiert mit beliebiger Genauigkeit die gegebene Funktion $w=f(z)$. W. z. b. w.

Aus dem obigem Satze folgt ohne weiteres

Satz IV. *Es sei*

$$w=f(z)=z^p+a_{p+1}z^{p+1}+\cdots$$

---

5) R. Nevanlinna. Uniformisierung. S. 204.

6) Die Begrenzung von R_n ist das Bild von $\log\frac{1}{z}=\lambda_n$ durch die Funktion $w=f(z)$.

eine, in dem Kreis $|z|<1$ *reguläre und normierte,* p*-wertige Funktion von der Art, dass die Ableitung* $f'(z)$ *keineswegs in* $|z|<1$ *verschwindet. Es gilt dann*

$$|a_{p+1}| \leqq 2p.$$

Diese Schranke kann nicht verbessert werden.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY.

(*Received December 20, 1960*)