BEITRÄGE ZUR THEORIE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN

KEN'ITI KOSEKI

In der vorliegenden Arbeit will ich die Schar der schlichten Funktionen behandeln.

Satz I. *Es sei* $f(z, t) = e^t(z+g_1(t)z^2+ \cdots +g_n(t)z^{n+1}+ \cdots)$ *eine Schar der innerhalb des Einheitskreises regulären und schlichten Funktionen, wo* t *auf* $0 \leqq t < \infty$ *durchschreitet. Eine Funktion* $\kappa(t)$ *sei zu* $f(z, t)$ *geordnet und genüge den folgenden Bedingungen.*

1. $|\kappa(t)| = 1$.

2. *Es besteht für jedes* $g_p(t)(p=1, 2, \cdots)$ *die Lownersche Differentialgleichung*

$$g'_p(t) = pg_p(t)+2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t), \quad (g_0 = 1).$$

Wir nennen von jetzt an die obige $f(z, t)$ *eine Schar der schlichten Funktionen und die* $\kappa(t)$ *eine zu* $f(z, t)$ *geordnete* κ*-Funktion.*

Wir bezeichnen die Menge aller Scharen der schlichten Funktionen mit $\mathfrak{F}$. *Es sei* $\{f_n(z, t)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ *eine Folge der Scharen der schlichten Funktionen. Wir können dann eine Teilfolge von* $\{f_n(z, t)\}$ *herausnehmen, die für jedes* $t(0 \leqq t < \infty)$ *in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von* $|z|<1$ *gleichmässig konvergiert.*

Beweis. Es gibt eine abzählbare und im Intervalle $0 \leqq t < \infty$ überall dichten Punktmenge $t_1, t_2, \cdots, t_p, \cdots$. Wir wählen aus $\{f_n(z, t)\}$ eine Teilfolge $\{f_{1s}(z, t)\}$ $(s = 1, 2, \cdots)$, so dass $\{f_{1s}(z, t_1)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert. Das ist immer möglich, da die Menge aller normierten schlichten Funktionen in $|z|<1$ eine Montelsche normale Familie bildet.

Ebenfalls wählen wir aus $\{f_{1s}(z, t)\}$ eine Teilfolge $\{f_{2s}(z, t)\}$ $(s = 1, 2, \cdots)$, so dass $\{f_{2s}(z,t_2)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert. So weiterfahrend erhalten wir eine unendliche Kette von Folgen

$$\begin{array}{l} f_{11}(z, t),\ f_{12}(z, t), \cdots \\ f_{21}(z, t),\ f_{22}(z, t), \cdots \\ f_{31}(z, t),\ f_{32}(z, t), \cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Jede Folge ist eine Teilfolge aller vorhergehenden, und $\{f_{ps}(z, t_p)\}$ $(s = 1, 2, \cdots)$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert.

Die Folge $\{f_{nn}(z, t)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ist eine Teilfolge von $\{f_{1s}(z, t)\}$, so konvergiert $\{f_{nn}(z, t_1)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $f(z, t_1)$, die offenbar eine schlichte Funktion in $|z|<1$ ist.

Die Folge $\{f_{nn}(z, t)\}$ $(n = 2, 3, \cdots)$ ist eine Teilfolge von $\{f_{2s}(z, t)\}$, so konvergiert $\{f_{nn}(z, t_2)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $f(z, t_2)$, die offenbar eine schlichte Funktion in $|z|<1$ ist.

Ebenfalls strebt $\{f_{nn}(z, t_p)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ für jede Nummer p in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gegen eine Funktion $f(z, t_p)$ gleichmässig.

Es sei $g(z, t)$ eine beliebige Schar der schlichten Funktionen, und es sei τ ein beliebiger Wert auf dem Intervalle $0 \leqq t < \infty$. Zu jedem positiven Zahlen $\varepsilon > 0$ und $1 > r > 0$ gibt es dann eine positive Zahl $\delta > 0$, so dass $|g(z, \tau+h) - g(z, \tau)| < \varepsilon$ ist für alle h und z unter der Beschränkung $|h| < \delta$ und $|z| < r$. Die positive Zahl δ ist unabhängig von der Schar $g(z, t) \in \mathfrak{F}$. Dies können wir auf folgende Weise beweisen.

$$g(z, \tau+h) = e^{\tau+h}(z + g_1(\tau+h)z^2 + \cdots \qquad + g_n(\tau+h)z^{n+1} + \cdots \quad),$$
$$g(z, \tau) = e^{\tau}(z + g_1(\tau)z^2 + \cdots \qquad + g_n(\tau)z^{n+1} + \cdots \quad).$$

Damit ist

$$g(z, \tau+h) - g(z, \tau) = e^{\tau+h} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau+h)z^{p+1} - e^{\tau+h} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau)z^{p+1} + e^{\tau+h} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau)z^{p+1} - e^{\tau} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau)z^{p+1}.$$

$$\left| e^{\tau+h} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau+h)z^{p+1} - e^{\tau+h} \sum_{p=0}^{\infty} g_p(\tau)z^{p+1} \right| \leqq e^{\tau+h} \sum_{p=1}^{\infty} |g_p(\tau+h) - g_p(\tau)| r^{p+1}. \tag{1}$$

Wir setzen $g_p(t) = P_p(t) + i\,Q_p(t)$, so ist $|g_p(\tau+h) - g_p(\tau)| = \sqrt{\{P_p(\tau+h) - P_p(\tau)\}^2 + \{Q_p(\tau+h) - Q_p(\tau)\}^2}$. Wir nehmen nun an, dass $|g_p(\tau+h) - g_p(\tau)| \neq 0$ und $h > 0$ ist, und wir unterscheiden die beiden Fälle.

1. Fall. Es gibt einen Wert k, so dass $|g_p(\tau+k) - g_p(\tau)| = 0$ und $h > k > 0$ ist.
2. Fall. Für alle k in $0 < k < h$ ist es immer $|g_p(\tau+k) - g_p(\tau)| \neq 0$.

Wir behandeln erstens den

1. Fall. In diesem Falle gibt es einen Wert k, so dass $|g_p(\tau+k) - g_p(\tau)| = 0$ und $h > k > 0$ ist, und dass für alle j in $k < j < h$ es $|g_p(\tau+j) - g_p(\tau)| \neq 0$ ist.

$$|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)| = \sqrt{\{P_p(\tau+h)-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+h)-Q_p(\tau)\}^2} =$$
$$\sqrt{\{P_p(\tau+h)-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+h)-Q_p(\tau)\}^2}$$
$$-\sqrt{\{P_p(\tau+k)-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+k)-Q_p(\tau)\}^2} =$$
$$(h-k)\frac{\{P_p(\tau+k+\theta(h-k))-P_p(\tau)\}P_p'(\tau+k+\theta(h-k))}{\sqrt{\{P_p(\tau+k+\theta(h-k))-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+k+\theta(h-k))-Q_p(\tau)\}^2}}$$
$$+(h-k)\frac{\{Q_p(\tau+k+\theta(h-k))-Q_p(\tau)\}Q_p'(\tau+k+\theta(h-k))}{\sqrt{\{P_p(\tau+k+\theta(h-k))-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+k+\theta(h-k))-Q_p(\tau)\}^2}}$$
$$\leqq |h|\{|P_p'(\tau+k+\theta(h-k))|+|Q_p'(\tau+k+\theta(h-k))|\}$$
$$\leqq \sqrt{2}|h|\sqrt{\{P_p'(\tau+k+\theta(h-k))\}^2+\{Q_p'(\tau+k+\theta(h-k))\}^2}$$
$$= \sqrt{2}|h|\,|g_p'(\tau+k+\theta(h-k))| = \sqrt{2}|h|\,|pg_p(\tau+k+\theta(h-k))+$$
$$2\sum_0^{p-1}(\mu+1)g_\mu(\tau+k+\theta(h-k))\kappa^{p-\mu}(\tau+k+\theta(h-k))|,\quad 0<\theta<1. \tag{2}$$

Wir behandeln zweitens den

2. Fall. In diesem Falle ist es

$$|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)| = \sqrt{\{P_p(\tau+h)-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+h)-Q_p(\tau)\}^2}$$
$$=|h|\frac{\{P_p(\tau+\theta h)-P_p(\tau)\}P_p'(\tau+\theta h)+\{Q_p(\tau+\theta h)-Q_p(\tau)\}Q_p'(\tau+\theta h)}{\sqrt{\{P_p(\tau+\theta h)-P_p(\tau)\}^2+\{Q_p(\tau+\theta h)-Q_p(\tau)\}^2}} \leqq$$
$$|h|\{|P_p'(\tau+\theta h)|+|Q_p'(\tau+\theta h)|\} \leqq \sqrt{2}|h|\,|g_p'(\tau+\theta h)| = \sqrt{2}|h|\,|pg_p(\tau+\theta h)$$
$$+2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)g_\mu(\tau+\theta h)\kappa^{p-\mu}(\tau+\theta h)|,\quad 0<\theta<1. \tag{2'}$$

Wenn $h<0$ ist, können wir auf ganz analoge Weise wie oben die Formel (2) oder (2′) herleiten.

Anderseits gilt es nach dem Littlewoodschen[1] Satz, dass es $|g_p(t)| \leqq (p+1)e$ ist. Daher folgt aus (2) oder (2′)

$$|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)| \leqq \sqrt{2}|h|e\{p(p+1)+2\sum_0^{p-1}(\mu+1)^2\}. \tag{3}$$

Damit ist $|e^{\tau+h}\sum_{p=1}^{\infty}\{g_p(\tau+h)-g_p(\tau)\}z^{p+1}| \leqq e^{\tau+h}\sqrt{2}|h|e\sum_{p=1}^{\infty}\{p(p+1)+$ $2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)^2\}r^{p+1} = \sqrt{2}|h|e^{\tau+h+1}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{p(p+1)+2\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}\right\}r^{p+1} =$

$$\frac{\sqrt{2}|h|e^{\tau+h+1}}{3}\,2\sum_{p=2}^{\infty}p(p+1)(p+2)r^{p+1}. \tag{4}$$

Es ist nun $e^{\tau+h}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}-e^{\tau}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1} = (e^{\tau+h}-e^{\tau})\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}$.

$$|(e^{\tau+h}-e^{\tau})\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}| \leqq |h|e^{\tau+\theta_1 h+1}\sum_0^{\infty}(p+1)r^{p+1},\quad 0<\theta_1<1. \tag{5}$$

---

1) Vgl. L. Bieberbach. Lehrbuch der Funktionentheorie. Vol. II. S. 80.

Aus (4) und (5) folgt ohne weiteres

$$|g(z,\tau+h)-g(z,\tau)| \leqq |h| e\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3} e^{\tau+h} \sum_{p=1}^{\infty} p(p+1)(p+2)r^{p+1} + e^{\tau+\theta_1 h} \sum_{p=0}^{\infty}(p+1)r^{p+1}\right\}. \tag{6}$$

Sowohl die Reihe $\sum_{p=1}^{\infty} p(p+1)(p+2)z^{p+1}$ als auch die Reihe $\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)z^{p+1}$ konvergiert in $|z|<1$. Wir setzen daher $\sum_{p=1}^{\infty} p(p+1)(p+2)r^{p+1} = M(r)$ und $\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)r^{p+1} = N(r)$

Wir wählen δ von vornherein so, dass $\delta \leqq 1$ ist. Es ist dann, für $|h|<\delta$, $e^{\tau+h}<e^{\tau+1}$ und $e^{\tau+\theta_1 h}<e^{\tau+1}$. Daher folgt aus (6) $|g(z,\tau+h)-g(z,\tau)| \leqq |h| e^{\tau+2}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3}M(r)+N(r)\right\}$. Wir setzen $\delta = Min.\left(1, \varepsilon/e^{\tau+2}\left\{\frac{2\sqrt{2}}{3}M(r)+N(r)\right\}\right)$, so ist für alle h, $|h|<\delta$,

$$|g(z,\tau+h)-g(z,\tau)|<\varepsilon. \tag{7}$$

Die Zahl δ ist unabhängig von der Schar $g(z,t) \in \mathfrak{F}$. Wenn $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $0 \leqq t < \infty$ ist, so gibt es zu jeden positiven Zahlen $\varepsilon>0$ und $1>r>0$ eine positive Zahl $\delta>0$, derart dass $|g(z,t+h)-g(z,t)|<\varepsilon$ ist für alle h und z und t unter der Beschränkung $|h|<\delta$, $|z|<r$ und $t \in [a,b]$.

Wir wollen nun beweisen, dass für jedes t in $0 \leqq t < \infty$ die Folge $\{f_{nn}(z,t)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert.

Es sei $|z| \leqq r(<1)$ ein abgeschlossenes Teilgebiet von $|z|<1$, und es sei $\varepsilon>0$ eine positive Zahl. Es gibt dann eine positive Zahl δ, so dass $|g(z,t+h)-g(z,t)|<\frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle $g(z,t) \in \mathfrak{F}$ und h und z unter der Beschränkung $|h|<\delta$ und $|z|<r$.

Da die Menge $\{t_p\}(p=1,2,\cdots)$ überall dicht in $0 \leqq t < \infty$ ist, so gibt es, für jedes t mindestens einen Wert t_p, so dass $|t_p - t|<\delta$ ist.

In dem abgeschlossenen Gebiet $|z| \leqq r$ konvergiert die Folge $\{f_{nn}(z,t_p)\}$ gleichmässig. Es gibt daher eine Nummer N, so dass $|f_{nn}(z,t_p)-f_{mm}(z,t_p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle z und m und n unter der Beschränkung $m, n>N$ und $|z| \leqq r$.

Anderseits ist $|f_{nn}(z,t)-f_{nn}(z,t_p)|<\frac{\varepsilon}{3}$ und $|f_{nn}(z,t)-f_{nn}(z,t_p)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Daraus folgt, dass $|f_{nn}(z,t)-f_{mm}(z,t)| \leqq |f_{nn}(z,t)-f_{nn}(z,t_p)| + |f_{nn}(z,t_p) - f_{mm}(z,t_p)| + |f_{mm}(z,t_p)-f_{nn}(z,t)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ist für alle m und n

und z unter der Beschränkung $m, n > N$ und $|z| \leqq r$.

Also für jedes t in $0 \leqq t < \infty$, konvergiert die Folge $\{f_{nn}(z, t)\}$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$ gleichmässig. Die Grenzfunktion $f(z, t)$ ist offenbar, für jedes t in $0 \leqq t < \infty$, regulär und schlicht in $|z| < 1$. W. z. b. w.

Existiert es dabei die Ableitung $g_1'(t)$?

Satz II. *Es sei $f(z, t) = e^t(z + g_1(t)z^2 + \cdots + g_n(t)z^{n+1} + \cdots)$ eine Schar der innerhalb des Einheitskreises regulären und schlichten Funktionen, wo t auf dem Intervalle $0 \leqq t < \infty$ durchschreitet. Eine Funktion $\kappa(t)$ sei zu $f(z, t)$ geordnet und genüge den folgenden Bedingungen.*

1. *$\kappa(t)$ ist messbar, und $|\kappa(t)| = 1$ bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null.*

2. *Bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null besteht es für jedes $g_p(t)(p = 1, 2, \cdots)$ die Löwnersche Differentialgleichung*

$$g_p'(t) = p g_p(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu + 1) g_\mu(t) \kappa^{p-\mu}(t), \quad (g_0(t) = 1),$$

und jedes $g_p(t)$ ist total stetig in $0 \leqq t < \infty$.

Wir bezeichnen die Menge aller Scharen der obigen schlichten Funktionen mit $\mathfrak{F}_1$. Es sei $\{f_n(z, t)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ eine zu $\mathfrak{F}_1$ gehörige Folge.

Wir können dann eine Teilfolge $\{f_{nn}(z, t)\}$ von $\{f_n(z, t)\}$ herausnehmen, die für jedes $t (0 \leqq t < \infty)$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$ gleichmässig konvergiert.

Die Grenzfunktion $f(z, t)$ ist von der Form $e^t(z + g_1(t)z^2 + \cdots + g_n(t)z^n + \cdots)$. Für $f(z, t)$ existiert dann eine Funktion $\kappa(t)$ und genügt den folgenden Bedingungen.

1. *$\kappa(t)$ ist messbar, und $|\kappa(t)| \leqq 1$ bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null.*

2. *Bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null besteht es*

$$g_1'(t) = g_1(t) + 2\kappa(t),$$

und $g_1(t)$ ist total stetig in $0 \leqq t < \infty$.

Beweis. Es sei $g(z, t)$ eine beliebige Schar, die zu $\mathfrak{F}_1$ gehört, und es sei τ ein beliebiger Wert auf dem Intervalle $0 \leqq t < \infty$. Zu jeden positiven Zahlen $\varepsilon > 0$ und $1 > r > 0$ gibt es dann eine positive Zahl $\delta > 0$, so dass $|g(z, \tau) - g(z, \tau + h)| < \varepsilon$ ist für alle h und z unter der Beschränkung $|h| < \delta$ und $|z| \leqq r$. Diese positive Zahl δ ist unabhängig von der Schar $g(z, t) \in \mathfrak{F}_1$. Dies können wir auf folgende Weise beweisen.

$$g(z, \tau + h) = e^{\tau + h}(z + g_1(\tau + h)z^2 + \cdots \qquad + g_n(\tau + h)z^{n+1} + \cdots \qquad).$$
$$g(z, \tau) = e^{\tau}(z + g_1(\tau)z^2 + \cdots \qquad + g_n(\tau)z^{n+1} + \cdots \qquad).$$

Damit ist

$$g(z,\tau+h)-g(z,\tau)=e^{\tau+h}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau+h)z^{p+1}-e^{\tau+h}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}+e^{\tau+h}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}-e^{\tau}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1},\quad |e^{\tau+h}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau+h)z^{p+1}-e^{\tau+h}\sum_{p=0}^{\infty}g_p(\tau)z^{p+1}|$$

$$\leqq e^{\tau+h}\sum_{p=1}^{\infty}|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)|\,r^{p+1}. \tag{1}$$

Da $g_p(t)$ nach der Voraussetzung total stetig ist, so ist

$$|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)|=|\int_{\tau}^{\tau+h}\{pg_p(t)+2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t)\}dt|\leqq$$

$$|\int_{\tau}^{\tau+h}pg_p(t)dt|+2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)|\int_{\tau}^{\tau+h}g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t)dt|.$$

Es ist aber nach dem Littlewoodschen Satz $|g_\mu(t)|\leqq(p+1)e$. Daher ergibt sich

$$|\int_{\tau}^{\tau+h}pg_p(t)dt|\leqq p(p+1)l\cdot|h|,$$

$$2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)|\int_{\tau}^{\tau+h}g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t)dt|\leqq 2\sum_{\mu=0}^{p-1}(\mu+1)^2e|h|=2e|h|\cdot\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.$$

Folglich ist

$$|g_p(\tau+h)-g_p(\tau)|\leqq|h|\cdot e\cdot\frac{2}{3}p(p+1)(p+2). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt ohne weiteres

$$|g(z,\tau+h)-g(z,\tau)|\leqq e^{\tau+h}\cdot|h|e\left\{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2}{3}p(p+1)(p+2)r^{p+1}+\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)r^{p+1}\right\}. \tag{3}$$

Wir setzen $\sum_{p=1}^{\infty}p(p+1)(p+2)r^{p+1}=M(r)$ und $\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)r^{p+1}=N(r)$. Es folgt dann aus (3)

$$|g(z,\tau+h)-g(z,\tau)|\leqq|h|e^{\tau+|h|}\left\{\frac{2}{3}M(r)+N(r)\right\}. \tag{4}$$

Auf ganz analoge Weise wie im Satz I können wir eine Teilfolge $\{f_{nn}(z,t)\}$ von $\{f_n(z,t)\}$ heraunehmen, die für jedes $t(0\leqq t<\infty)$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert.

Die Teilfolge $\{f_{nn}(z,t)\}$ konvergiert aber in jedem abgeschlossenen Intervalle $[a,b]$ in $0\leqq t<\infty$ gleichmässig in bezug auf t unter der Beschränkung $|z|\leqq r$. Es gibt in der Tat die Punkte $t_0(=a)<t_1<t_2<\cdots<t_{p-1}<t_p(=b)$ in dem Intervalle $[a,b]$, so dass die Länge jedes Teilintervalles $[t_{i-1},t_i]\,(i=1,\cdots,p)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{e^b\left\{\frac{2}{3}M(r)+N(r)\right\}}$ ist.

Es gibt eine Nummer N, so dass $|f_{nn}(z, t_i)-f_{mm}(z, t_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$ ist für alle m und n und z unter der Beschränkung $m, n>N$ und $|z|\leqq r$. Wenn t ein in $[a, b]$ enthaltener Punkt ist, so ist der Punkt t in einem von den $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2], \cdots [t_{p-1}, t_p]$, etwa in $[t_{i-1}, t_i]$, enthalten.

Anderseits ist $|f_{nn}(z, t)-f_{nn}(z, t_i)|\leqq|t-t_i|e^b\left\{\frac{2}{3}M(r)+N(r)\right\}<\frac{\varepsilon}{3}$ und $|f_{mm}(z, t)-f_{mm}(z, t_i)|<\frac{\varepsilon}{3}$. Daraus folgt es $|f_{nn}(z, t)-f_{mm}(z, t)|\leqq$ $|f_{nn}(z, t)-f_{nn}(z, t_i)|+|f_{nn}(z, t_i)-f_{mm}(z, t_i)|+|f_{mm}(z, t_i)-f_{nn}(z, t)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$ für alle m und n und z unter der Beschränkung $m, n>N$ und $|z|\leqq r$. Also konvergiert $\{f_{nn}(z, t)\}$ gleichmässig in bezug auf t in $[a, b]$.

Wir setzen $f_{nn}(z, t)=e^t(z+g_1(t, n)z^2+\cdots+g_p(t, n)z^{p+1}+\cdots)$. Nach dem Weierstrassschen Satz strebt die Folge $\{g_p(t, n)\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ gegen $g_p(t)$.

Wir bezeichnen die zu $f_{nn}(z, t)$ geordnete κ-Funktion mit $\kappa(t, n)$. Da $g_1'(t, n)-g_1(t, n)=2\kappa(t, n)$ ist, so ist $g_1(t, n)e^{-t}-g_1(o, n)=2\int_0^t\kappa(t, n)e^{-t}dt$.

Es seien $I_1, I_2, \cdots, I_p$ die Folge der auf $0\leqq t<\infty$ liegenden Intervalle. Wir bezeichnen die Endpunkte von $I_i (i=1, 2, \cdots, p)$ mit a_i und $b_i (a_i<b_i)$. Wir setzen $e^{-t}=s$, $g_1(t, n)=g_1(\log\frac{1}{s}, n)=\tilde{g}_1(s, n)$, $\kappa(\log\frac{1}{s}, n)=\tilde{\kappa}(s, n)$.

Es besteht dann $\sum_{i=1}^{p}|g_1(b_i, n)e^{-b_i}-g_1(a_i, n)e^{-a_i}|\leqq 2\sum_{i=1}^{p}\int_{b_i}^{a_i}|\kappa(t, n)|e^{-t}dt=$ $2\sum_{i=1}^{p}\int_{c_i}^{d_i}|\tilde{\kappa}(s, n)|ds\leqq 2\sum_{i=1}^{p}|d_i-c_i|$, wo $b_i=\log\frac{1}{d_i}$ und $a_i=\log\frac{1}{c_i}$ ist. Wenn die Nummer n unendlich wächst, so ist $\sum_{i=1}^{p}|g_1(b_i)e^{-b_i}-g(a_i)e^{-a_i}|\leqq 2\sum_{i=1}^{p}|d_i-c_i|$. Damit ist $g_1(t)e^{-t}$ total stetig in $0\leqq t<\infty$. Nach dem Lebesgueschen[2] Satz ist $g_1(t)e^{-t}$ differenzierbar in $0\leqq t<\infty$ bis auf eine Menge vom Masse Null, und es ist $g_1(t)e^{-t}-g_1(0)=\int_0^t 2\kappa(t)e^{-t}dt$.

Wir setzen $g_1(t)=g_1\left(\log\frac{1}{s}\right)=g_1(s)$. Es besteht dann $\sum_{i=1}^{p}|g_1(b_i)e^{-b_i}-$ $g_1(a_i)e^{-a_i}|=\sum_{i=1}^{p}|\tilde{g}_1(d_i)d_i-\tilde{g}_1(c_i)c_i|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{p}|\tilde{g}_1(d_i, n)d_i-\tilde{g}(c_i, n)c_i|\leqq 2\sum_{i=1}^{p}|d_i-c_i|$.

Folglich ist $|\kappa(t)|\leqq 1$ für fast alle Punkte in $0\leqq t<\infty$. W. z. b. w.

Besteht es dabei $\lim_{n\to\infty}\kappa(t, n)=\kappa(t)$ für fast alle Punkte in $0\leqq t<\infty$?

Satz III. *Es sei* $f(z, t)=e^t(z+g_1(t)z^2+\cdots+g_n(t)z^{n+1}+\cdots)$ *eine Schar*

---

2) Vgl. S. Saks. Theory of the Integral. S. 121.

der innerhalb des Einheitskreises regulären und schlichten Funktionen, wo t auf dem Intervalle $0 \leqq t < \infty$ durchschreitet. Eine Funktion $\kappa(t)$ sei zu $f(z, t)$ geordnet und genüge den folgenden Bedingungen.

1. *$\kappa(t)$ ist messbar, und es besteht $|\kappa(t)| = 1$, $|\kappa(t_1) - \kappa(t_2)| \leqq M \cdot |t_1 - t_2|$ bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null, wo M eine Konstante bedeutet.*

2. *Bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null besteht es für jedes $g_p(t)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ die Löwnersche Differentialgleichung*

$$g'_p(t) = p g_p(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) g_\mu(t) \kappa^{p-\mu}(t), \qquad (g_0(t) = 1),$$

und jedes $g_p(t)$ ist total stetig in $0 \leqq t < \infty$.

Wir bezeichnen die Menge aller Scharen der obigen schlichten Funktionen mit $\mathfrak{F}_2$. Es sei $\{f_n(z, t)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ eine zu $\mathfrak{F}_2$ gehörige Folge. Wir können dann eine Teilfolge $\{f_{nn}(z, t)\}$ von $\{f_n(z, t)\}$ herausnehmen, die für jedes $t (0 \leqq t < \infty)$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$ gleichmässig konvergiert.

Die Grenzfunktion $f(z, t)$ gehört dann auch zu $\mathfrak{F}_2$.

Beweis. Nach dem Satz II können wir eine Teilfolge $\{f_{nn}(z, t)\}$ von $\{f_n(z, t)\}$ herausnehmen, die für jedes t in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z| < 1$ gleichmässig gegen $f(z, t)$ strebt.

Wir setzen $f_{nn}(z, t) = e^t(z + g_1(t, n) z^2 + \cdots + g_p(t, n) z^{p+1} + \cdots)$ und $f(z, t) = e^t(z + g_1(t) z^2 + \cdots + g_p(t) z^{p+1} + \cdots)$. Nech dem Weierstrassschen Satz strebt dann die Folge $\{g_p(t, n)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ gegen $g_p(t)$.

Wir bezeichnen die zu $f_{nn}(z, t)$ geordnete κ-Funktion mit $\kappa(t, n)$. Da $|\kappa(t, n)| = 1$ und $|\kappa(t_1, n) - \kappa(t_2, n)| \leqq M \cdot |t_1 - t_2|$ ist, so können wir nach dem Ascoli-Arzelàschen Satz eine Teilfolge von der Folge $\{\kappa(t, n)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ herausnehmen, die in jedem abgeschlossenen Teilintervalle in $0 \leqq t < \infty$ gleichmässig konvergiert bis auf eine Menge vom Masse Null.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Folge $\{\kappa(t, n)\}$ selbst konvergiert. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $\kappa(t)$.

Da $g'_1(t, n) - g_1(t, n) = 2\kappa(t, n)$ ist, so ist $g_1(t, n) e^{-t} - g_1(o, n) = 2\int_0^t \kappa(t, n) e^{-t} dt$. Wenn die Nummer n unendlich wächst, so ergibt sich $g_1(t) e^{-t} - g_1(o) = 2\int_0^t \kappa(t) e^{-t} dt$. Daraus folgt es

$$g'_1(t) = g_1(t) + 2\kappa(t)$$

bis auf eine Menge vom Masse Null.

Da $g'_p(t, n) - p g_p(t, n) = 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) g_\mu(t, n) \kappa^{p-\mu}(t, n)$ ist, so ist $g_p(t, n) e^{-pt} - g_p(o, n) = 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) \int_0^t g_\mu(t, n) \kappa^{p-\mu}(t, n) e^{-pt} dt$. Wenn die Nummer n unendlich wächst, so ergibt sich $g_p(t)e^{-pt} - g_p(o) = 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) \int_0^t g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t)e^{-pt} dt$. Daher ist bis auf eine Menge vom Masse Null,

$$g_p'(t) = pg_p(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Bemerkung. Nach der Voraussetzung des Satzes III besteht es $|\kappa(t)| = 1$ und $|\kappa(t_1) - \kappa(t_2)| \leqq M|t_1 - t_2|$ bis auf eine Menge vom Lebesgueschen Masse Null. Diese Menge vom Masse Null bezeichnen wir mit P. Es sei t ein Punkt, der zu P gehört, und $\{t_n\}(n=1, 2, \cdots)$ sei eine Punktfolge auf $0 \leqq t < \infty$, so dass jedes t_n nicht zu P gehört und die Folge $\{t_n\}$ gegen t strebt.

Da es für die beiden Punkte t_n und t_{n+p} von der Folge $\{t_n\}$ die Ungleichung $|\kappa(t_n) - \kappa(t_{n+p})| \leqq M|t_n - t_{n+p}|$ besteht, so konvergiert die Folge $\{\kappa(t_n)\}$. Wir setzen $\kappa(t) = \lim_{n\to\infty} \kappa(t_n)$. Der Wert $\kappa(t)$ ist dann offenbar unabhängig von der Wahl der Folge $\{t_n\}$. Also wird der Wert $\kappa(t)$ für jeden Punkt t in $0 \leqq t < \infty$ definiert.

Es besteht dann

$$|\kappa(t)| = 1, \qquad |\kappa(t_1) - \kappa(t_2)| \leqq M|t_1 - t_2|$$

für alle Punkte in $0 \leqq t < \infty$.

Es gilt auch

$$g_p'(t) = pg_p(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{p-1} (\mu+1) g_\mu(t)\kappa^{p-\mu}(t)$$

für alle Punkt in $0 \leqq t < \infty$.

DEPARTMENTS OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSTY

(*Received June 15, 1960*)