ÜBER DIE KOEFFIZIENTEN DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN

KENTTI KOSEKI

Es sei

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion. L. Bieberbach hat bewiesen, dass $|p_1| \leqq 2$ ist, und K. Löwner hat bewiesen, dass $|p_2| \leqq 3$ ist. In der vorliegenden Arbeit will ich aber beweisen, dass es im allgemeinen $|p_n| \leqq n+1$ $(n=1, 2, \cdots)$ gilt.

Satz. *Es sei*

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion. Es gilt dann $|p_n| \leqq n+1$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Beweis. I. Schritt: Wir betrachten zunächst die folgende Löwnersche Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dt} = -w\frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w} \tag{1}$$

, wobei $\kappa(t)$ eine in dem Intervalle $0 \leqq t \leqq t_0$ definierte stetige Funktion bedeutet und $|\kappa(t)| = 1$ ist.

Es existiert dann die Lösung $w = f(z, t)$ von (1) derart, dass $f(z, t)$ eine stetige Funktion in bezug auf z und t in $|z| < 1$ und $0 \leqq t \leqq t_0$ und $f(z, o) = z$ ist. Den Beweis dieses Existenzsatzes stützen wir auf die Methode der sukzessiven Approximationen. Wir nehmen nämlich eine Konstante $w = z(|z| < 1)$ als eine Näherung an und bestimmen durch

$$w_1(z, t) = z + \int_0^t -z\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}\,dt \tag{2}$$

eine weitere Näherung. Die Funktion $w_1(z, t)$ ist dann offenbar stetig in bezug auf z und t, und sie ist regulär in bezug auf z.

Rekurrent setzen wir

$$w_n(z, t) = z + \int_0^t -w_{n-1}\frac{1+\kappa(t)w_{n-1}}{1-\kappa(t)w_{n-1}}\,dt. \tag{3}$$

Also erhalten wir eine Folge von Funktionen $\{w_n(z, t)\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$.

Wir setzen das Maximum von $\left| -w\frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w} \right|$ in $|w| < R(< 1)$ und $0 \leqq t \leqq t_0$ mit M. Es ist dann für $|z| < R$

$$|w_1(z,t)-z|=\left|\int_0^t -z\frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}dt\right|\leqq Mt. \tag{4}$$

Wenn z in dem Kreise $|z|<R-\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ eingeschlossen ist, so ist die ε-Umgebung von z in dem Kreise $|z|<R$ enthalten. Aus (4) folgt ohne weiteres

$$|w_1(z,t)-z|\leqq\varepsilon \text{ für alle } (0\leqq)t\leqq\frac{\varepsilon}{M}.$$

Daher ist

$$|w_1(z,t)|<|z|+\varepsilon<R \text{ für alle } |z|<R-\varepsilon \text{ und } (0\leqq)t\leqq\frac{\varepsilon}{M}.$$

Ebenfalls ist

$$|w_n(z,t)-z|=\left|\int_0^t -w_{n-1}\frac{1+\kappa(t)w_{n-1}}{1-\kappa(t)w_{n-1}}\,dt\right|\leqq Mt\leqq\varepsilon \text{ für alle } (0\leqq)t\leqq\frac{\varepsilon}{M}.$$

Daher ist

$$|w_n(z,t)|<R \text{ für alle } |z|<R-\varepsilon \text{ und } (0\leqq)\ t\leqq\frac{\varepsilon}{M}.$$

Wir setzen[1] $\lim\limits_{n\to\infty} w_n(z,t)=f(z,t)$. Die Folge $\{w_n(z,t)\}$ konvergiert dann gleichmässig in $|z|\leqq R-\varepsilon$ und $0\leqq t\leqq\frac{\varepsilon}{M}$ gegen $f(z,t)$. Daher ist

$$f(z,t)=z+\int_0^t -f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}\,dt.$$

Folglich gibt die Funktion $f(z,t)$ eine Lösung von der Gleichung (1) in $0\leqq t\leqq\frac{\varepsilon}{M}$ und $|z|<R-\varepsilon$ und zwar, dass $f(z,o)=z$ ist.

Die Funktion $w_n(z,t)$ ist offenbar stetig in bezug auf z und t. Überdies ist[2] $w_n(z,t)$ regulär in bezug auf z Die Folge $\{w_n(z,t)\}$ konvergiert gleichmässig gegen $f(z,t)$ · Daher ist $f(z,t)$ stetig in bezug auf z und t in $|z|<R-\varepsilon$ und $0\leqq t\leqq\frac{\varepsilon}{R}$, und sie ist regulär in bezug auf z.

Nach dem Löwnerschen[3] Satz ist $|f(z,t)|<R-\varepsilon$ fur $|z|<R-\varepsilon$. Daher können wir die Lösung $w=f(z,t)$ von (1) in dem Intervalle $0\leqq t\leqq t_0$ fortsetzen. Wenn R bezw. ε gegen 1 bezw. 0 strebt, so bekommen wir die Lösung $w=f(z,t)$ von (1) in $0\leqq t\leqq t_0$ und $|z|<1$ und zwar, dass $f(z,o)=z$ ist.

Ferner beachte man, dass $|f(z,t)|<1$ ist. Denn $|f(z,t)|<|z|$.

Die Funktion $w=f(z,t)$ ist eine einzige Lösung von (1) mit der Anfangsbedingung $f(z,o)=z$, da $-w\dfrac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w}$ in jeder Umgebung jedes Punktes

---

1) Vgl. L. Bieberbach. Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. S. 4.

2) Vgl. Whittaker and Watson. Modern Analysis. S. 92.

3) Vgl. K. Löwner. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. Math. Annalen. Band 89. S. 108.

in $|w|<1$ der Lipschitzschen Bedingung genügt.

Die Funktion $w=f(z,t)$ ist schlicht in $|z|<1$. Dies folgt wiederum aus der Lipschitzschen Bedingung.

Wir setzen

$$f(z,t)=a_0(t)+\beta(t)\,(z+b_1(t)z^2+b_2(t)z^3+\cdots). \tag{5}$$

Es ist dann $f(o,t)=a_0(t)$ und

$$\frac{df}{dt_{z=0}}=a'_0(t)=-a_0(t)\frac{1+\kappa(t)a_0(t)}{1-\kappa(t)a_0(t)}.$$

Es ist aber $f(z,0)=z$. Daher ist $a_0(0)=0$. Folglich muss $a_0(t)=0$ in $0\leqq t\leqq t_0$ sein. Also folgt aus (5)

$$f(z,t)=\beta(t)\,(z+b_1(t)z^2+b_2(t)z^3+\cdots). \tag{6}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\beta(t)$ und $b_n(t)(n=1,2,\cdots)$ stetig differenzierbar in $0\leqq t\leqq t_0$ sind. Es ist nach der Cauchyschen Integraldarstellung

$$\beta(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{f(\zeta,t)}{\zeta^2}\mathrm{d}\zeta\ (K:\ |\zeta|=\mathrm{R}).$$

Die Funktion $\dfrac{df(z,t)}{dt}$ ist aber stetig in bezug auf z und t. Daher ist[4)]

$$\beta'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{\frac{df}{dt}}{\zeta^2}d\zeta^{5)}.$$

Die Funktion $\beta'(t)$ ist offenbar stetig in $0\leqq t\leqq t_0$.

Ebenfalls ist

$$(\beta(t)b_n(t))'=\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{\frac{df}{dt}}{\zeta^{n+2}}d\zeta.$$

Da $\beta(t)\neq 0$ ist, so ist $b_n(\mathrm{t})$ stetig differenzierbar in $0\leqq t\leqq t_0$.

Wir setzen das Maximum von $\left|\dfrac{df}{dt}\right|$ in dem Kreise K und $0\leqq t\leqq t_0$ mit M. Es gilt dann

$$|\beta'(t)|\leqq\frac{M}{R},\ |(\beta b_n)'|\leqq\frac{M}{\mathrm{R}^{n+1}}.$$

Folglich konvergiert die Reihe

$$\beta'(t)z+(\beta(t)b_1(\mathrm{t}))'z^2+\cdots+(\beta(t)b_n(t))'z^{n+1}+\cdots \tag{7}$$

gleichmässig in $|z|<R$. Wenn R gegen 1 strebt, so konvergiert die Reihe (7) in $|z|<1$.

Da die Reihe (7) in $|z|<R$ und $0\leqq t\leqq t_0$ gleichmässig konvergiert, so stellt die Reihe (7) die Ableitung $\dfrac{df}{dt}$ dar. Also bekommen wir

---

4) Vgl. Whittaker and Watson. a. a. 0.

5) $\beta'(t)$ stellt $d\beta/dt$ dar.

$$\frac{df}{dt} = \beta'(t)z + (\beta b_1)'z^2 + \cdots + (\beta b_n)'z^{n+1} + \cdots$$
$$= \beta'(t)(z + b_1(t)z^2 + \cdots) + \beta(t)(b_1'(t)z^2 + b_2'(t)z^3 + \cdots). \tag{8}$$

Wir differenzieren nun nach z die beiden Seiten von

$$\frac{df(z,t)}{dt} = -f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}.$$

Wir bekommen dann

$$\frac{d^2f}{dzdt} = -\frac{d}{dz}\left(f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}\right).$$

Aus (8) folgt unmittelbar $\dfrac{d^2f}{dzdt_{z=0}} = \beta'(t)$. Es ist aber

$$-\frac{d}{dz}\left(f(z,t)\frac{1+\kappa(t)f(z,t)}{1-\kappa(t)f(z,t)}\right)_{z=0} = -\beta(t).$$

Daher ist

$$\beta'(t) + \beta(t) = 0, \quad 0 \leqq t \leqq t_0. \tag{9}$$

Da $\beta(0) = 1$ ist, bekommen wir aus (9)

$$\beta(t) = e^{-t}. \tag{10}$$

Wir bezeichnen das Bildgebiet durch $w = f(z, t)$ mit $D(t)$. Es sei $z = \varphi(w, t)$ die in $D(t)$ definierte umgekehrte Funktion von $w = f(z, t)$. Die Funktion $z = \varphi(w, t)$ ist dann offenbar regulär und schlicht in $D(t)$.

Es sei $p(\zeta)$ eine in $|\zeta| < 1$ definierte reguläre Funktion. Wir setzen $p(\varphi(w, t)) = h(w, t)$. Aus dem Koebeschen[6] Satz ist es leicht einzusehen, dass, wenn $r > 0$ genug klein ist, die Kreisscheibe $|w| < r$ in alle $D(t)$ $(0 \leqq t \leqq t_0)$ enthalten ist. Die Funktion $h(w, t)$, in $|w| < r$ und $0 \leqq t \leqq t_0$ betrachtet, ist[7] dann die Lösung der folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial h(w,t)}{\partial t} = \frac{\partial h(w,t)}{\partial w} w \frac{1+\kappa(t)w}{1-\kappa(t)w}. \tag{11}$$

Wir setzen $w = f(z, t)$ in $h(w, t)$ ein, so ist $h(f(z, t), t)$ unabhängig von t · Denn $h(f(z, t), t) = p(\varphi(f(z, t), t)) = p(z)$.

Es ist nun aber zu fordern, dass $h(w, t_0) = w$ ist. Es muss dann $h(f(z, t_0), t_0) = f(z, t_0) = p(z)$ sein. Also ist $p(z) = f(z, t_0)$.

Wir denken uns

$$h(w, t) = a_0(t) + \gamma(w + C_1(t)w^2 + \cdots + C_n(t)w^{n+1} + \cdots) \tag{12}$$

nach Potenzen von w entwickelt, dann folgt aus $h(f(z, t), t) = f(z, t_0)$ und (10) die folgende Abschätzung

$$a_0(t) = 0, \ \gamma = e^{-(t_0 - t)}. \tag{13}$$

---

6) Vgl. R. Nevanlinna. Eindeutige anlytische Funktionen. S. 81.

7) Vgl. A. R. Forsyth. Differential Equations. S. 394.

Da der Koeffizient $b_n(t)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ von $f(z, t)$ stetig differenzierbar in $0 \leqq t \leqq t_0$ ist, so ist der $C_n(t)$ auch stetig differenzierbar in $0 \leqq t \leqq t_0$. Es ist leicht einzusehen, dass

$$\frac{\partial h(w, t)}{\partial t} = \gamma'(t)(w + C_1(t)w^2 + \cdots) + \gamma(t)(C_1'(t)w^2 + \cdots) \tag{14}$$

ist.

Wir setzen (12) und (13) in (11) ein, so erhalten[8] wir durch Vergleich der Koeffizienten von gleich hohen Potenzen von w das Gleichungssystem

$$C_n'(t) = n C_n(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu + 1) C_\mu(t) \kappa^{n-\mu}(t) \quad (C_0(t) = 1) \tag{15}$$

und die Anfangsbedingungen

$$C_n(t_0) = 0. \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich sofort die Rekursionsformel

$$C_n(t) = -2e^{nt} \int_t^{t_0} e^{-n\tau} \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) C_\mu(\tau) \kappa^{n-\mu}(\tau) d\tau,$$

dnrch deren wiederholte Anwendung wir zu folgenden Ausdrücken für die $C_n(t)$ gelangen.

$$C_n(t) = e^{n\tau} \sum (-1)^k C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} \int\int \cdots \int e^{-\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \tau_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa^{\alpha_\nu}(\tau_\nu) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \tag{17}$$

Darin ist

$$C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} = 2^k (n+1-\alpha_1)(n+1-\alpha_1-\alpha_2) \cdots (n+1-\alpha_1-\alpha_2 \cdots - \alpha_k) \tag{18}$$

und die Summe ist über alle geordneten Systeme von positiven ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k (k \leqq n)$ zu erstrecken, die zur Summe n geben. Das mit $C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}$ multiplizierte Integral ist über den Bereich $t \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \cdots \leqq \tau_k \leqq t_0$ zu erstrecken.

Ebenfalls bekommen wir aus (6) die folgenden Ausdrücken für die $b_n(t)$.

$$b_n(t) = \sum (-1)^k C_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k} \int\int \cdots \int e^{-\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \tau_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa^{\alpha_\nu}(\tau_\nu) d\tau_1 d\tau_2 \cdots d\tau_k. \tag{19}$$

Hier ist das Integral über den Bereich $0 \leqq \tau_1 \leqq \tau_2 \leqq \cdots \leqq \tau_k \leqq t$ zu erstrecken.

Wir setzen $\kappa_1(s) = \kappa(s+t)$ in $0 \leqq s \leqq t_0 - t$, und $w = \tilde{f}(z, s)$ sei die Lösung von der Gleichung $\frac{dw}{ds} = -w \frac{1+\kappa_1(s)w}{1-\kappa_1(s)w}$ mit der Anfangsbedingung $\tilde{f}(z, o) = z$.

Wir denken uns

$$\tilde{f}(z, s) = e^{-s}(z + \tilde{b}_1(s) z^2 + \cdots + \tilde{b}_n(s) z^{n+1} + \cdots)$$

nach Potenzen von z entwickelt, dann folgt aus (19)

---

8) Vgl. K. Löwner. a. a. O.

$$\tilde{b}_n(s) = \sum(-1)^k C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \iint\cdots\int e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu\tau_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa_1^{\alpha_\nu}(\tau_\nu)\, d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k. \tag{20}$$

Hier ist das Integral über den Bereich $0\leqq\tau_1\leqq\tau_2\leqq\cdots\leqq\tau_k\leqq s$ zu erstrecken.

Aus (20) folgt sofort

$$\tilde{b}_n(t_0-t) = \sum(-1)^k C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \iint\cdots\int e^{-\sum\limits_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu\tau_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa^{\alpha_\nu}(\tau_\nu)\, d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k. \tag{21}$$

Das Integral ist über den Bereich $0\leqq\tau_1\leqq\tau_2\leqq\cdots\leqq\tau_k\leqq t_0-t$ zu erstrecken.

Wir fähren nun durch $\tau_i'=\tau_i+t\ (i=1, 2, \cdots, k)$ die neuen Veränderlichen ein, so geht (21) in

$$\tilde{b}_n(t_0-t) = e^{nt}\sum(-1)^k C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \iint\cdots\int e^{-\sum\alpha_\nu\tau'_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa_1^{\alpha_\nu}(\tau_\nu'-t)\, d\tau_1' d\tau_2'\cdots d\tau_k'$$

$$= e^{nt}\sum(-1)^k C_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k} \iint\cdots\int e^{-\sum\alpha_\nu\tau_\nu} \prod_{\nu=1}^{k} \kappa^{\alpha_\nu}(\tau_\nu)\, d\tau_1 d\tau_2\cdots d\tau_k = C_n(t)$$

Folglich ist $\tilde{f}(z, t_0-t)=h\ (z, t)$. Die Funktion $\tilde{f}(z, t_0-t)$ ist regulär und schlicht in $|z|<1$, so ist $h\ (z, t)$ regulär und schlicht in $|z|<1$.

Es ist noch zu bemerken, dass das Bildgebiet von $h(z, t)$ in dem Einheitskreise enthalten ist.

Die Funktion $h(z, t)$ genügt offenbar der Differentialgleichung

$$\frac{\partial h(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial h(z, t)}{\partial z}\, z\, \frac{1+\kappa(t)z}{1-\kappa(t)z}$$

in $|z|<1$ und $0\leqq t\leqq t_0$.

2. Schritt: Wir nennen von jetzt an die innerhalb des Kreises $|z|<1$ reglären und schlichten Funktionen von der Form

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots \tag{22}$$

die normierten schlichten Funktionen. Wir bezeichnen für eine feste n die kleinste obere Grenze des absoluten Betrages der Koeffizienten p_n von allen normierten schlichten Funktionen in $|z|<1$ mit M_n.

Es gibt dann bekanntlich eine schlichte Funktion $z + q_1 z^2 + \cdots + q_n z^{n+1} + \cdots$ mit $q_n = M_n$. Folglich können wir von Anfang an annehmen, dass für $\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots + p_n z^{n+1} + \cdots$ es $p_n = M_n$ ist.

Das Bildgebiet von der Kreisscheibe $|z|<1$ durch die Funktion $\varphi=k(z)$ bezeichnen wir mit D. Nach dem Schifferschen[9] Satz ist $D=$die volle - φ - Ebene — eine analytische Kurve l. Die Kurve l bildet dann einen Einschnitt von der φ- Ebene. Wir bezeichnen die beiden Endepunkte von l mit ∞ und a.

Es sei $b(\neq\infty)$ ein von a verschiedener Punkt auf l. Die Kurve l wird durch den Punkt b in die beiden Teile l_1 und l_2 zerlegt, einer von denen, etwa l_1, den Punkt a und der andere l_2 nicht den Punkt a enthält.

---

9) Vgl. M. Schiffer. A method of variation within the family of simple funktions. Proc. London Math. Soc. (2) 44. (1938).

Wir bilden nun einundeindeutig und konform die Kreisscheibe $|z|<1$ auf das Gebiet D_1 = die volle - φ - Ebene — l_1 ab, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $\varphi = k_1(z) = \pi_1(z + g_1 z^2 + \cdots + g_n z^{n+1} + \cdots)$, $\pi_1 = e^{t_1} > 1$. Das Urbild von l_1 durch die Funktion $\varphi = k_1(z)$ bezeichnen wir mit l_1'. Die Kurve l_1' bildet dann einen Einschnitt von der Kreisscheibe $|z|< 1$.

Wir setzen $k_1(b') = b$, und wir bestimmen einen Punkt $C'(\neq b')$ auf l_1'. Durch den Punkt C' wird die Kurve l_1' in die beiden Teile m_1 und m_2, einer von denen, etwa m_1, den Punkt b' und der andere m_2 nicht den Punkt b' enthält.

Wir bilden eineindeutig und konform die Kreisscheibe $|w|<1$ auf das Gebiet $(|z|<1) - m_2$ ab, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit

$$z = p(w) = \pi_2(w + C_1 w^2 + \cdots + C_n w^{n+1} + \cdots).$$

Wenn der Punkt C' auf l_1' durchschreitet, so erhalten wir eine Schar von den schlichten Funktionen

$$z = p(w,\ t) = e^{-(t_1-t)} \{w + C_1(t) w^2 + \cdots + C_n(t) w^{n+1} + \cdots\},\quad 0 \leqq t \leqq t_1.$$

Nach dem berühmten Löwnerschen[10] Satz genügen die Funktionen $p(w,\ t)$ der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial p(w,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial p(w,\ t)}{\partial w}\, w\, \frac{1 + \kappa(t) w}{1 - \kappa(t) w}$$

, wo $\kappa(t)$ eine stetige Funktion darstellt und $|\kappa(t)| = 1$ ist.

Wir setzen $k_1(p(w,\ t)) = g(w,\ t) = e^t \{w + g_1(t) w^2 + \cdots\}$, so folgt aus dem obigen

$$\frac{\partial g(w,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial g(w,\ t)}{\partial w}\, w\, \frac{1+\kappa(t) w}{1-\kappa(t) w}. \tag{23}$$

Es ist offenbar $g(w, t_1) = k_1(w) = \pi_1(w + g_1 w^2 + \cdots + g_n w^{n+1} + \cdots)$ und $g(w, o) = k(w) = w + p_1 w^2 + \cdots + p_n w^{n+1} + \cdots$. Aus (23) folgt ohne weiteres

$$g_n'(t) = n g_n(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) g_\mu(t) \kappa(t)^{n-\mu} (n \geqq 1) \qquad (0 \leqq t \leqq t_1) \tag{24}$$

, wo wir $g_0(t) = 1$ setzen.

Es sei $\tilde{\kappa}(t)$ eine in $0 \leqq t \leqq t_1$ definierte stetige Funktion von der Art, dass $|\tilde{\kappa}(t)| = 1$ ist. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tilde{p}(w,\ t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{p}(w,\ t)}{\partial w}\, w\, \frac{1+\tilde{\kappa}(t) w}{1-\tilde{\kappa}(t) w}.$$

Es existiert dann nach dem I. Schritte die Lösung $z = \tilde{p}(w,\ t)$ $(|w|<1,$

---

[10] Vgl. K. Löwner. a. a. O.

$0 \leqq t \leqq t_1$) von der obigen Gleichung mit der Anfangsbedingung $\tilde{p}(w, t_1) = w$, derart dass $\tilde{p}(w, t)$ stetig in bezug auf w und t und regulär in bezug auf w ist. Die Funktion $z = \tilde{p}(w, t)$ ist nach dem I. Schritte schlicht in $|w| < 1$, und das Bildgebiet durch die Funktion $z = \tilde{p}(w, t)$ in dem Einheitskreise $|z| < 1$ enthalten ist.

Wir setzen $k_1(\tilde{p}(w, t)) = \tilde{g}(w, t) = e^t\{w + \tilde{g}_1(t)w^2 + \cdots\}$, so genügt $\tilde{g}(w, t)$ der folgenden Differentialgleichung

$$\frac{\partial \tilde{g}(w, t)}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{g}(w, t)}{\partial w} w \frac{1 + \tilde{\kappa}(t)w}{1 - \tilde{\kappa}(t)w}. \tag{25}$$

Es ist offenbar $\tilde{g}(w, t_1) = k_1(w) = \pi_1(w + g_1 w^2 + \cdots + g_n w^{n+1} + \cdots)$. Aus (25) folgt sofort

$$\tilde{g}_n'(t) = n\tilde{g}_n(t) + 2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu + 1)\tilde{g}_\mu(t)\tilde{\kappa}(t)^{n-\mu}(n \geqq 1) \quad (0 \leqq t \leqq t_1),$$

wo wir $g_0(t) = 1$ setzen.

Die Funktion $\tilde{g}(w, t)$ ist regulär und schlicht in $|w| < 1$, so gilt es immer der reelle Teil

$$\Re(\tilde{g}_n(0)) < g_n(0) = p_n$$

3. Schritt: Wir behandeln nun die folgenden Differentialgleichungen

$$g_n'(t) = ng_n(t) + 2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu + 1)g_\mu(t)\kappa(t)^{n-\mu}(n \geqq 1), \ (0 \leqq t < \infty).$$

Wir integrieren die Gleichung $g_1'(t) = g_1(t) + 2\kappa(t)$, so bekommen wir $g_1(t) = e^t\left(\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_1(s)e^{-s}\right)$ für beliebige Werte t und s, wo es $0 \leqq t, \ s < \infty$ ist.

Ebenfalls integrieren wir die Gleichungen $g_2'(t) = 2g_2(t) + 2(\kappa^2 + 2\kappa g_1(t))$, $g_3'(t) = 3g_3(t) + 2(\kappa^3 + 2\kappa^2 g_1(t) + 3\kappa g_2(t))$, so bekommen wir $g_2(t) = e^{2t}\left\{\int_s^t 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 2\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\, ds_1 + 2g_1(s)e^{-s}\right.$ $\left.\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_2(s)e^{-2s}\right\}$, $g_3(t) = e^{3t}\left[\int_s^t 2\kappa^3(s_1)e^{-3s_1}ds_1 + 2\int_s^t 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}\right.$ $\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2 ds_1 + 3\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^2(s_2)e^{-2s_2}ds_2\, ds_1 + 3\cdot 2\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}$ $\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}\int_s^{s_2} 2\kappa(s_3)e^{-s_3}\, ds_3 ds_2\, ds_1 + 2g_1(s)e^{-s}\left\{\int_s^t 2\kappa^2(s_1)e^{-2s_1}ds_1 + 3\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\right.$ $\left.\left.\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\, ds_1\right\} + 3g_2(s)e^{-2s}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_3(s)e^{-3s}\right]$.

Wir nehmen nun an, dass es im allgemeinen für $n \geqq 3$

$$g_n(t) = e^{nt}\left[\left\{\int_s^t 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{p_1=i}^{n} p_1 \sum_{p_2=i-1}^{p_1-1} p_2 \cdots \sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1} p_{i-1}\right.\right.\right.$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\,ds_{i-1}$$

$$\cdots ds_1\Big)\Big\} + \sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\Big\{\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1 + \sum_{i=\mu+2}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-(\mu+1)}\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2\,ds_1\Big)\Big\} + ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}$$

$$\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1 + g_n(s)e^{-ns}\Big] \tag{26}$$

besteht.

Wir integrieren nun die Differentialgleichung $g_n'(t) = ng_n(t) + 2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\, g_\mu(t)\kappa(t)^{n-\mu}$. Es ist

$$g_n(t)e^{-nt} - g_n(s)e^{-ns} = \int_s^t 2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)g_\mu(s_1)\kappa(s_1)^{n-\mu}e^{-ns_1}ds_1$$

$$= \int_s^t 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + 2\int_s^t 2g_1(s_1)\kappa^{n-1}(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + 2\sum_{\mu=2}^{n-1}\int_s^t(\mu+1)g_\mu(s_1)\kappa^{n-\mu}(s_1)$$

$$e^{-ns_1}ds_1 = \int_s^t 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1 + 2\int_s^t 2\kappa^{n-1}(s_1)e^{-(n-1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_1\,ds_2 +$$

$$2g_1(s)e^{-s}\int_s^t 2\kappa^{n-1}(s_1)e^{-(n-1)s_1}ds_1 + \sum_{\mu=2}^{n-1}\Big[\int_s^t 2(\mu+1)\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^\mu(s_2)e^{-\mu s_2}ds_2\,ds_1 + \sum_{i=2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=i}^{\mu}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\times(\mu+1)\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})$$

$$e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1\Big)\Big] + \sum_{\mu=3}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2\sum_{\nu=1}^{\mu-2}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\Big\{\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-\nu}(s_2)e^{-(\mu-\nu)s_2}ds_2 + \sum_{i=\nu+2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=i}^{\mu}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\nu+1)}}^{p_{i-(\nu+2)}-1}p_{i-(\nu+1)}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-\nu}} 2\kappa^{p_{i-(\nu+1)}-(\nu+1)}(s_{i-\nu+1})e^{-(p_{i-(\nu+1)}-(\nu+1))s_{i-\nu+1}}ds_{i-\nu+1}\cdots ds_2\Big)\Big\}ds_1$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\mu\, g_{\mu-1}(s)e^{-(\mu-1)s}\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2\,ds_1$$

$$+ \sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2g_\mu(s)e^{-\mu s}\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1. \tag{27}$$

Erstens berechnen wir

$$\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\sum_{i=2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=i}^{\mu}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})\,e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}\,ds_{i+1}\cdots ds_2\,ds_1\Big). \tag{28}$$

Wenn wir die Grössen $\mu+1,\ p_1,\cdots,p_{i-1}$ beziehungsweise durch die $p_1,\ p_2,\ \cdots,p_i$ ersetzen, so ergibt es sich aus (28)

$$\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\sum_{i=2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=i}^{\mu}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}\,ds_{i+1}\cdots ds_2\,ds_1\Big)=\sum_{p_1=3}^{n}p_1\sum_{p_2=2}^{p_1-1}p_2$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_s^{s_2}2\kappa^{p_2-1}(s_3)e^{-(p_2-1)s_3}\,ds_3\,ds_2\,ds_1+\sum_{p_1=4}^{n}p_1\sum_{p_2=3}^{p_1-1}p_2\sum_{p_3=2}^{p_2-1}p_3\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}$$

$$\int_s^{s_3}2\kappa^{p_3-1}(s_4)e^{-(p_3-1)s_4}\,ds_4\,ds_3\,ds_2\,ds_1+\cdots$$

$$+\sum_{p_1=i+1}^{n}p_1\sum_{p_2=i}^{p_1-1}p_2\sum_{p_3=i-1}^{p_2-1}p_3\cdots\sum_{p_i=2}^{p_{i-1}-1}p_i\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_i}2\kappa^{p_i-1}(s_{i+1})e^{-(p_i-1)s_{i+1}}\,ds_{i+1}\cdots ds_1+\cdots$$

$$+\sum_{p_1=n}^{n}p_1\sum_{p_2=n-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{n-1}=2}^{p_{n-2}-1}p_{n-1}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}\int_s^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}\int_s^{s_2}2\kappa(s_3)e^{-s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_{n-1}}2\kappa(s_n)e^{-s_n}\,ds_n\cdots ds_1=\sum_{i=3}^{n}\Big(\sum_{p_1=i}^{n}p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_i-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1\Big).$$

Daraus folgt es

$$2\int_s^t 2\kappa^{n-1}(s_1)e^{-(n-1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa(s_2)e^{-s_2}\,ds_2\,ds_1+\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu}(s_2)e^{-\mu s_2}\,ds_2\,ds_1+\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\sum_{t=2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=t}^{\mu}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$

$$\sum_{p_{t-1}=2}^{p_{t-2}-1}p_{t-1}\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}$$

$$\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}\,ds_{t+1}\cdots ds_1$$

$$=\sum_{t=2}^{n}\Big(\sum_{p_1=t}^{n}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\sum_{p_2=t-2}^{p_2-1}p_2\cdots\sum_{p_{t-1}=2}^{p_{t-2}-1}p_{t-1}\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_s^{s_{t-1}} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}\,ds_t\,ds_{t-1}\cdots ds_1\Big). \tag{29}$$

Es ist nun

$$\sum_{\mu=3}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2\sum_{\nu=1}^{\mu-2}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\Big\{\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-\nu}(s_2)e^{-(\mu-\nu)s_2}ds_2$$

$$+\sum_{t=\nu+2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=t}^{\mu}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{t-(\nu+1)}=\nu+2}^{p_{t-(\nu+2)}-1}p_{t-(\nu+1)}\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots\int_s^{s_{t-\nu}}2\kappa^{p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1)}(s_{t-\nu+1})e^{-(p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1))s_{t-\nu+1}}$$

$$ds_{t-\nu+1}\cdots ds_2)\Big\}ds_1=\sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{\mu=\nu+2}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-\nu}(s_2)e^{-(\mu-\nu)s_2}ds_2ds_1+\sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{\mu=\nu+2}^{n-1}(\mu+1)\sum_{t=\nu+2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=t}^{\mu}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2$$

$$\cdots\sum_{p_{t-(\nu+1)}=\nu+2}^{p_{t-(\nu+2)}-1}p_{t-(\nu+1)}\int_s^t 2\kappa^{n-\nu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}$$

$$\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-\nu}}2\kappa^{p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1)}(s_{t-\nu+1})e^{-(p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1))s_{t-\nu+1}}ds_{t-\nu+1}\cdots ds_1\Big). \tag{30}$$

Wir berechnen zunächst das zweite Glied von der rechten Seite von (30), so ist es

$$\sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{\mu=\nu+2}^{n-1}(\mu+1)\sum_{t=\nu+2}^{\mu}\Big(\sum_{p_1=t}^{\mu}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{t-(\nu+1)}=\nu+2}^{p_{t-(\nu+2)}-1}p_{t-(\nu+1)}$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{\mu-p_1+1}(s_2)e^{-(\mu-p_1+1)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_{t-\nu}}2\kappa^{p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1)}(s_{t-\nu+1})e^{-(p_{t-(\nu+1)}-(\nu+1))s_{t-\nu+1}}ds_{t-\nu+1}\cdots ds_1\Big)$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{t=\nu+3}^{n}\Big(\sum_{p_1=t}^{n}p_1\sum_{p_2=t-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{t-(\nu+1)}=\nu+2}^{p_{t-(\nu+2)}-1}p_{t-(\nu+1)}$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{l-(\nu+1)}} 2\kappa^{p_{l-(\nu+1)}-(\nu+1)}(s_{l-\nu})e^{-(p_{l-(\nu+1)}-(\nu+1))s_{l-\nu}}ds_{l-\nu}\cdots ds_2 ds_1\Big). \tag{30)'$$

Wir berechnen zweitens das erste Glied von der rechten Seite von (30), so ergibt es sich

$$\sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{\mu=\nu+2}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{\mu-\nu}(s_2)e^{-(\mu-\nu)s_2}ds_2 ds_1 = \sum_{\nu=1}^{n-3}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}\sum_{p_1=\nu+3}^{n} p_1$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-(\nu+1)}(s_2)e^{-(p_1-(\nu+1))s_2}ds_2 ds_1. \tag{30)''$$

Es ist nun

$$2g_1(s)e^{-s}\int_s^t 2\kappa^{n-1}(s_1)e^{-(n-1)s_1}ds_1+\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\mu g_{\mu-1}(s)e^{-(\mu-1)s}$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa(s_2)e^{-s_2}ds_2+\sum_{\mu=2}^{n-1}(\mu+1)\int_s^t 2g_\mu(s)e^{-\mu s}\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}$$

$$ds_1=\sum_{\mu=1}^{n-1}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}$$

$$\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+\sum_{\nu=1}^{n-2}(\nu+1)g_\nu(s)e^{-\nu s}(\nu+2)\int_s^t 2\kappa^{n-(\nu+2)+1}(s_1)e^{-(n-(\nu+2)+1)s_1}$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{(\nu+2)-(\nu+1)}(s_2)e^{-((\nu+2)-(\nu+1))s_2}ds_2 ds_1. \tag{30)'''$$

Aus (29), (30)', (30)'', (30)''' folgt ohne weiteres

$$g_n(t)=e^{nt}\Bigg[\Bigg\{\Bigg(\int_s^t 2\kappa^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{l=2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=l}^{n}p_1\sum_{p_2=l-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{l-1}=2}^{p_{l-2}-1}p_{l-1}$$

$$\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_s^{s_{l-1}} 2\kappa^{p_{l-1}-1}(s_l)e^{-(p_{l-1}-1)s_l}ds_l$$

$$\cdots ds_1\Bigg)\Bigg\}+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\Bigg\{\int_s^t 2\kappa^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{l=\mu+2}^{n}\Bigg(\sum_{p_1=l}^{n}p_1\sum_{p_2=l-1}^{p_1-1}p_2$$

$$\cdots\sum_{p_{l-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{l-(\mu+2)}-1}p_{l-(\mu+1)}\int_s^t 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{l-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{l-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{l-\mu})e^{-(p_{l-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{l-\mu}}ds_{l-\mu}\cdots ds_2 ds_1\Bigg)\Bigg\}$$

$$+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^t 2\kappa(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_n(s)e^{-ns}\Bigg].$$

Also haben wir nach der Mathematischen Induktion bewiesen, dass die Formel (26) im allgemeinen für $n\geqq 3$ gilt.

4. Schritt: Wir integrieren nun die Differentialgleichungen

$$\tilde{g}_n'(t)=n\tilde{g}_n(t)+2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\tilde{g}_n(t)\tilde{\kappa}(t)^{n-\mu}(n\geqq 1)\quad(0\leqq t\leqq t_1),$$

so ergibt es sich aus

$$\tilde{g}_n(0)=\int_s^0 2\tilde{\kappa}^n(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^n\Bigg(\sum_{p_1=i}^n p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}$$
$$\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\tilde{\kappa}^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i$$
$$\cdots ds_1\Bigg)+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\Bigg\{\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-\mu}(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{i=\mu+2}^n\Bigg(\sum_{p_1=i}^n p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$
$$\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+1)}-1}p_{i-(\mu+1)}\int_s^0 2\tilde{\kappa}^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\tilde{\kappa}^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\tilde{\kappa}^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2ds_1\Bigg)\Bigg\}$$
$$+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}\int_s^0 2\tilde{\kappa}(s_1)e^{-s_1}ds_1+g_n(s)e^{-ns},\tag{31}$$

wo wir $s=t_1$ setzen.

Wir setzen $\kappa(t)=e^{i\varphi(t)}$ und $\tilde{\kappa}(t)=e^{i[\varphi(t)+\varepsilon\eta(t)]}$, wo $\varphi(t)$ und $\eta(t)$ die reellen stetigen Funktionen bedeuten und ε eine reelle Veränderliche ist.

Wir differenzieren $\tilde{g}_n(0)$ in bezug auf ε an der Stelle $\varepsilon=0$, so erhalten wir

$$\frac{d\tilde{g}_n(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}=i\Bigg[\int_s^0 2\kappa^n(s_1)\cdot n\eta(s_1)e^{-ns_1}ds_1+\sum_{i=2}^n\Bigg\{\sum_{p_1=i}^n p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots$$
$$\sum_{p_{i-1}=2}^{p_{i-2}-1}p_{i-1}\Bigg(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)$$
$$(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1$$
$$+\cdots+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)(p_{i-1}-1)\eta(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1\Bigg)\Bigg\}+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}$$
$$\int_s^0 2\kappa^{n-\mu}(s_1)(n-\mu)\eta(s_1)e^{-(n-\mu)s_1}ds_1+\sum_{\mu=1}^{n-2}(\mu+1)g_\mu(s)e^{-\mu s}\sum_{i=\mu+2}^n$$
$$\Bigg\{\sum_{p_1=i}^n p_1\sum_{p_2=i-1}^{p_1-1}p_2\cdots\sum_{p_{i-(\mu+1)}=\mu+2}^{p_{i-(\mu+2)}-1}p_{i-(\mu+1)}\Bigg(\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)(n-p_1+1)\eta(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$
$$\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_s^{s_{i-(\mu+1)}}2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots$$
$$ds_2ds_1+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)(p_1-p_2)\eta(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2 ds_1+\cdots$$

$$+\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-(\mu+1)}} 2\kappa^{p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1)}(s_{i-\mu})\,(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))$$

$$\times\,\eta(s_{i-\mu})e^{-(p_{i-(\mu+1)}-(\mu+1))s_{i-\mu}}ds_{i-\mu}\cdots ds_2 ds_1\Big)\Big\}+ng_{n-1}(s)e^{-(n-1)s}$$

$$\int_s^0 2\kappa(s_1)\eta(s_1)e^{-s_1}ds_1\Big]. \tag{32}$$

Da $\Re(\tilde{g}_n(0))<g_n(0)=p_n$ ist, ist es $\Re\frac{d\tilde{g}_\mu(0)}{d\varepsilon_{\varepsilon=0}}$. Der reelle Teil von der rechten Seite von (32) $=0$ für alle stetigen Funktionen $\eta(t)$, so besteht es auch für alle stuckweise stetig differenzierbaren Funktionen $\eta(t)$, so können wir die $\eta(t)$ derart setzen, dass $\eta(t)=\alpha(t)\cdot\beta(t)$ und $\alpha'(t)=0$ in $a<t\leqq s$ und $0\leqq t<b$ und $\alpha'(t)$ eine stetige Funktion in $b\leqq t\leqq a$ ist, und dass der Punkt a bezw. b ein unstetiger Punkt für $\eta'(t)$ von der ersten Art[11] ist, wo $\beta(t)$ eine feste stetige Funktion bedeutet. Wir bestimmen $\alpha(t)$ derart, dass $\alpha(t)=\int_s^t\alpha'(s_1)ds_1$ ist.

Es ist

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$$
$$\int_s^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)(p_{j-1}-p_j)\eta(s_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i$$
$$\cdots ds_1=\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}$$
$$\cdots\int_a^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)(p_{j-1}-p_j)\eta(s_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i$$
$$\cdots ds_1. \tag{B}$$

Wir setzen nun

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\eta}(t)=\tilde{\alpha}(t)\cdot\beta(t)\\ &\tilde{\alpha}'(t)=0,\quad a-h\leqq t\leqq s\\ &\tilde{\alpha}'(t-h)=\alpha'(t),\quad 0\leqq t\leqq a-h\ (h>0),\quad \tilde{\alpha}(t)=\int_s^t\tilde{\alpha}'(s_1)ds_1\end{aligned}\right\}$$

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_s^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$$
$$\int_s^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)(p_{j-1}-p_j)\tilde{\eta}(s_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots$$

$$ds_1=\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{a-h}^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$$
$$\int_{a-h}^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)(p_{j-1}-p_j)\tilde{\eta}(s_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i$$
$$\cdots ds_1. \tag{C}$$

Die rechte Seite von (B)

$$=\int_a^{a-h}\int_a^{s_1}\cdots\int_s^{s_{i-1}}+\int_{a-h}^{0}\int_a^{a-h}\int_a^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}+\int_{a-h}^{0}\int_{a-h}^{s_1}\int_a^{a-h}\int_a^{s_3}\cdots\int_s^{s_{i-1}}$$
$$+\int_{a-h}^{0}\int_{a-h}^{s_1}\int_{a-h}^{s_2}\int_a^{a-h}\int_a^{s_4}\cdots\int_s^{s_{i-1}}+\cdots+\int_{a-h}^{0}\int_{a-h}^{s_1}\int_{a-h}^{s_2}\cdots\int_{a-h}^{s_{j-2}}\int_a^{a-h}\int_s^{s_j}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}+\int_{a-h}^{0}\int_{a-h}^{s_1}\int_{a-h}^{s_2}\cdots\int_{a-h}^{s_{j-1}}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}. \tag{B'}$$

Daher ist (C)—(B′)

$$=\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{a-h}^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}$$
$$\cdots\int_{a-h}^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)(p_{j-1}-p_j)\{\tilde{\eta}(s_j)-\eta(s_j)\}e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1-\int_a^{a-h}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$
$$\int_a^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\cdots\int_a^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\eta(s_j)(p_{j-1}-p_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots$$
$$\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1-\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$
$$\int_a^{a-h}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2}\cdots\int_a^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\eta(s_j)(p_{j-1}-p_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}$$
$$\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1-\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$
$$\int_{a-h}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{a-h}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots\int_a^{s_{j-1}}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\eta(s_j)(p_{j-1}-p_j)$$
$$e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1-\cdots-$$
$$\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_{a-h}^{s_2}2\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$$
$$\int_a^{a-h}2\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\eta(s_j)(p_{j-1}-p_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_a^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i$$
$$\cdots ds_1. \tag{D}$$

Wenn wir die rechte Seite von (D) durch h teilen, und wenn h gegen 0

---

11) D. h. Es existieren die beiden $\lim\limits_{t\to a-0}\eta'(t)$ und $\lim\limits_{t\to a+0}\eta'(t)$, und $\lim\limits_{t\to a-0}\eta'(t)\neq\lim\limits_{t\to a+0}\eta'(t)$.

strebt, so ergibt sich

$$\frac{\text{das erste Glied}}{h} \to \int_a^0 2\,\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1} 2\,\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$\int_a^{s_2} 2\,\kappa^{p_2-p_3}(s_3)e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots\int_a^{s_{j-1}} 2\,\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\,(p_{j-1}-p_j)\,\alpha'(s_j)\,\beta(s_j)$$

$$\times e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots\int_s^{s_{i-1}} 2\,\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)\,e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1. \tag{E}$$

Wenn b gegen a strebt, so strebt $\int_a^0 2\,\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$

$\int_a^{s_1} 2\,\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}\int_a^{s_2} 2\,\kappa^{p_2-p_3}(s_3)\,e^{-(p_2-p_3)s_3}\cdots$

$\int_a^{s_{j-1}} 2\,\kappa^{p_{j-1}-p_j}(s_j)\,(p_{j-1}-p_j)\,\alpha'(s_j)\,\beta(s_j)e^{-(p_{j-1}-p_j)s_j}\int_s^{s_j}\cdots$

$\int_s^{s_{i-1}} 2\,\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1$ gegen 0.

$$\frac{\text{Das zweite Glied}}{h}\ \text{und}\ \frac{\text{die folgenden Glieder}}{h} \to 0.$$

Anderseits ist es nach dem Gesetz von der partiellen Integration

$$\int_s^0 2\,\kappa^{n-p_1+1}(s_1)\,e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\,\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\,\eta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-1}} 2\,\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)\,e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1=\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\,\alpha(s_1)$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\,\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)\,e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1$$

$$-\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1}\alpha'(s_2)\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\,\beta(s_3)$$

$$\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}\,ds_{i+1}\cdots ds_1$$

$$=\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)\,e^{-(n-p_1+1)s_1}\,\alpha(s_1)\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}\,(p_1-p_2)\,\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1-\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}\alpha'(s_2)$$

$$\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\,\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}\,ds_{i+1}$$

$$\cdots ds_1. \tag{B$'$}$$

Ebenfalls ist es

$$\int_s^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)\,e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)\,e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\,\bar{\eta}(s_2)\int_s^{s_2}\cdots$$

$$\int_s^{s_{i-1}} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}\,ds_i\cdots ds_1=\int_{a-h}^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\,\bar{\alpha}(s_1)$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1$$

$$-\int_{a-h}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}\tilde{\alpha}'(s_2)\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)$$

$$\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1 . \tag{C'}$$

Daher ist (C′)—(B′)

$$=\int_{a-h}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}(\tilde{\alpha}(s_1)-\alpha(s_1))$$

$$\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1$$

$$-\int_{a-h}^{0} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_{a-h}^{s_1}(\tilde{\alpha}'(s_2)-\alpha'(s_2))$$

$$\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}$$

$$\cdots ds_1-\int_a^{a-h} 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\alpha(s_1)\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\beta(s_2)$$

$$\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1+\int_a^{a-h}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_a^{s_1}\alpha'(s_2)\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1+\int_{a-h}^{0}2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}$$

$$\int_a^{a-h}\alpha'(s_2)\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1 . \tag{D'}$$

Wenn wir die rechte Seite von (D′) durch h teilen, und wenn h gegen 0 strebt, so ergibt sich

$$\frac{\text{das erste Glied}}{h}\to\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\alpha'(s_1)\int_s^{s_1}2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}$$

$$(p_1-p_2)\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{i-1}}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_i)e^{-(p_{i-1}-1)s_i}ds_i\cdots ds_1$$

$$\frac{\text{das zweite Glied}}{h}\to-\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}\alpha''(s_2)$$

$$\int_s^{s_2}2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_1$$

$$\frac{\text{das dritte Glied}}{h}\to 0$$

$$\frac{\text{das vierte Glied}}{h}\to 0$$

$$\frac{\text{des fünfte Glied}}{h} \to -\alpha'(a)\int_s^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)$$

$$\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}ds_{t+1}\cdots ds_3\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1. \quad \text{(E')}$$

Wir bestimmen die Funktion $\alpha(t)$ derart, dass $\alpha''(0)=0$ in $a<t\leqq s$ und $0\leqq t<b$ und $\alpha''(t)$ eine stetige Funktion in $b\leqq t\leqq a$ ist, und dass $\alpha'(t)=\int_t^s \alpha''(t)\,dt$ in $a<t\leqq s$ und $\alpha'(t)=\omega+\int_a^t \alpha''(t)dt$ $(\omega\neq 0)$ in $a\leqq t\leqq b$ und $\alpha'(t)=\int_b^t \alpha''(t)\,dt$ in $0\leqq t<b$ ist, und dass $\alpha(t)=\int_s^t \alpha'(t)\,dt$ ist.

Wenn b gegen a strebt, so strebt sowohl $\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\alpha'(s_1)$ $\int_s^{s_1} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_2)e^{-(p_1-p_2)s_2}(p_1-p_2)\beta(s_2)\int_s^{s_2}\cdots\int_s^{s_{t-1}} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_t)e^{-(p_{t-1}-1)s_t}ds_t\cdots ds_1$ als auch

$$-\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}\int_a^{s_1}\alpha''(s_2)\int_s^{s_2} 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots$$

$\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}ds_{t+1}\cdots ds_1$ gegen 0.

Folglich ist für $p_{t-1}<p_{t-2}<\cdots<p_2<p_1(\leqq n)$ der imaginäre Teil

$$\Im\alpha'(a)\int_s^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}ds_{t+1}\cdots\; ds_3\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1=0\,.$$

Da $\alpha'(a)=\omega\neq 0$ ist, so folgt

$$\Im\int_s^a 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\beta(s_3)\int_s^{s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}ds_{t+1}\cdots\; ds_3\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1=0. \quad (33)$$

Da die Formel (33) für beliebige stetige Funktion $\beta(t)$ besteht, so besteht[12] (33) auch für die Funktion $\beta(t)$ von der Art, dass $\beta(t)=1$ in $s\geqq t>c(>a)$ und $\beta(t)=0$ in $c<t\leqq a$ ist. Dabei haben wir nur das obige Integral im Lebesgueschen Sinne zu verstehen.

Folglich ist für $s>c>a$

$$\Im\int_s^c 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots$$

$$\int_s^{s_t} 2\kappa^{p_{t-1}-1}(s_{t+1})e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}}ds_{t+1}\cdots ds_3\int_a^0 2\kappa^{n-p_1+1}(s_1)e^{-(n-p_1+1)s_1}ds_1=0. \quad (34)$$

Wir differenzieren die linke Seite von (34) nach a, so bekommen wir

12). Vgl. S. Saks. Theory of the Integral. S. 29.

$$\mathfrak{F}\, 2\kappa^{n-p_1+1}(a)e^{-(n-p_1+1)a}\int_s^c 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots$$
$$\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3=0. \qquad (35)$$

Wir beweisen nun, dass $\int_s^t 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_3^{s_3}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3$ nicht identisch gleich 0 in $t\in[c-\delta, c+\delta]$ ist. Angenommen in der Tat, dass $\int_s^t 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)$ $\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3\equiv 0$ in $[c-\delta, c+\delta]$. Wir differenzieren die Form $\int_s^t 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3$ nach t, so bekommen wir $2\kappa^{p_1-p_2}(t)e^{-(p_1-p_2)t}(p_1-p_2)\int_s^t 2\kappa^{p_2-p_3}(s_4)e^{-(p_2-p_3)s_4}\int_s^{s_4}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_4\equiv 0$ in $[c-\delta, c+\delta]$.

Da $2\kappa^{p_1-p_2}(t)e^{-(p_1-p_2)t}\neq 0$ ist, so ist $\int_s^t 2\kappa^{p_2-p_3}(s_4)e^{-(p_2-p_3)s_4}\int_s^{s_4}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_4\equiv 0$ in $[c-\delta, c+\delta]$. Dieses Verfahren wiederholen wir, so bekommen wir endlich $2\kappa^{p_{i-1}-1}(t)e^{-(p_{i-1}-1)t}\equiv 0$ in $[c-\delta, c+\delta]$; dies ist aber offenbar unmöglich. Daher ist $\int_s^t 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3$ nicht identisch gleich 0 in $t\in[c-\delta, c+\delta]$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $\int_s^c 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots\int_s^{s_i}2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3\neq 0.$ Wir setzen $\int_s^c 2\kappa^{p_1-p_2}(s_3)e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1-p_2)\int_s^{s_3}\cdots$ $\int_s^{s_i} 2\kappa^{p_{i-1}-1}(s_{i+1})e^{-(p_{i-1}-1)s_{i+1}}ds_{i+1}\cdots ds_3=\alpha+i\beta$ und $2\kappa^{n-p_1+1}(a)=\gamma(a)+i\delta(a)$. Da die Formel (35) für beliebige $a\,(s>c>a)$ besteht, so werden wir auf die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\alpha\delta(a)+\beta\gamma(a)&=0\\ \alpha\delta(a')+\beta\gamma(a')&=0\end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

geführt, wo $s>c>a>a'$ ist.

Aus (36) folgt

$$\begin{vmatrix} \delta(a) & \gamma(a) \\ \delta(a') & \gamma(a') \end{vmatrix} = 0 .$$

Daher ist

$$\frac{\delta(a)}{\delta(a')} = \frac{\gamma(a)}{\gamma(a')} = \pm 1 .$$

Da sowohl $\gamma(t)$ als auch $\delta(t)$ eine stetige Funktion von t ist, so muss $\kappa^{n-p_1+1}(t)$ eine Konstante in $0 \leqq t < s$ sein. Folglich muss $\kappa^{n-p_1+1}(t)$ eine Konstante in $0 \leqq t \leqq s$ sein.

Da $\kappa(t)$ eine stetige Funktion von t ist, so ist $\kappa(t)$ eine Konstante in $0 \leqq t \leqq s$. Aus (35) folgt ohne weiteres

$$\Im \kappa^n(t) e^{-(n-p_1+1)t} \int_s^c 2e^{-(p_1-p_2)s_3}(p_1 - p_2) \int_s^{s_3} \cdots \int_s^{s_t} 2e^{-(p_{t-1}-1)s_{t+1}} ds_{t+1} \cdots ds_3 = 0 .$$

Daher muss $\Im \kappa^n(t) = 0$ sein. Also ist $\kappa^n(t) = \pm 1$ in $0 \leqq t \leqq s$. Wenn s unendlich wächst, ist $\kappa^n(t) = \pm 1$ in $0 \leqq t < \infty$.

5. Schritt : Wir integrieren nun die Differentialgleichungen

$$g_n'(t) = n g_n(t) + 2 \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) g_\mu(t) \kappa^{n-\mu}(t) \ (n \geqq 1) \ \ (0 \leqq t < \infty) \tag{37}$$

, wo $\kappa(t)$ eine Konstante ± 1 ist. Wenn $n = 1$ ist, so erhalten wir aus $g_1'(t) = g_1(t) + 2\kappa$ die Formel $g_1(t) = -2\kappa + (g_1(0) + 2\kappa) e^t$.

Wir nehmen nun an, dass es im allgemeinen für $k = 1, 2, \cdots, n-1$

$$g_k(t) = a_0^k \kappa^k + \sum_{r=1}^{k} a_r^k \kappa^{k-r} [g_r(0) - (-1)^r (r+1) \kappa^r + b_1^r \kappa^{r-1} (g_1(0) + 2\kappa) + \cdots$$
$$+ b_{r-1}^r \kappa (g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1} r \kappa^{r-1})] e^{rt} \tag{38}$$

gilt, wo a_0^k, a_1^k, $\cdots$, a_k^k die von 0 verschiedenen ganzen Zahlen bedeuten und b_s^r eine reelle Zahl ist.

Aus (37) und (38) bekommen wir

$$\left\{ g_n'(t) - n g_n(t) \right\} e^{-nt} = 2 \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) \kappa^{n-\mu} \Big\{ a_r^\mu \kappa^\mu e^{-nt} + \sum_{r=1}^{\mu} a_r^\mu \kappa^{\mu-r} \Big[g_r(0)$$
$$-(-1)^r (r+1) \kappa^r + b_1^r \kappa^{r-1} (g_1(0) + 2\kappa) + \cdots + b_{r-1}^r \kappa (g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1} r \kappa^{r-1}) \Big] e^{(r-n)t} \Big\}$$

, wo wir $a_0^0 = 1$ setzen. (39)

Wir integrieren nun die beiden Seiten von (39), so bekommen wir

$$g_n(t) e^{-nt} + C = -\frac{2}{n} \sum_{\mu=0}^{n-1} (\mu+1) \kappa^n a_0^\mu e^{-nt} - 2 \sum_{\mu=1}^{n-1} (\mu+1) \kappa^{n-\mu} \sum_{r=1}^{\mu} a_r^\mu \kappa^{\mu-r}$$
$$\Big[g_r(0) - (-1)^r (r+1) \kappa^r + b_1^r \kappa^{r-1} (g_1(0) + 2\kappa) + \cdots$$
$$+ b_{r-1}^r \kappa (g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1} r \kappa^{r-1}) \Big] \frac{1}{n-r} e^{(r-n)t}$$

$$= -\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^n a_0^\mu e^{-nt} - 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)\kappa^{n-r} a_r^\mu \Big[g_r(0) -$$

$$(-1)^r(r+1)\kappa^r + b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa) + \cdots$$

$$+ b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big] e^{(r-n)t}.$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$g_n(t)e^{-nt} = g_n(0) + \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^n a_0^\mu + 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)\kappa^{n-r} a_r^\mu \Big[g_r(0)$$

$$-(-1)^r(r+1)\kappa^r + b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa) + \cdots + b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big]$$

$$-\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^n a_0^\mu e^{-nt}$$

$$-2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)\kappa^{n-r} a_r^\mu \Big[g_r(0) - (-1)^r(r+1)\kappa^r + b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\ ) +$$

$$\cdots + b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big] e^{(r-n)t}.$$

Wir multiplizieren e^{nt} in die beiden Seiten von der obigen Formel, so bekommen wir

$$g_n(t) = -\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^n a_0^\mu - 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)\kappa^{n-r} a_r^\mu \Big[g_r(0)$$

$$-(-1)^r(r+1)\kappa^r + b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa) + \cdots$$

$$+ b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0) - (-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big] e^{rt}$$

$$+ a_n^n\Big[g_n(0) + \frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^n a_0^\mu + b_1^n\kappa^{n-1}(g_1(0)+2\kappa) + \cdots$$

$$+ b_{n-1}^n\kappa(g_{n-1}(0) - (-1)^{n-1}n\kappa^{n-1})\Big] e^{nt}. \tag{40}$$

Aus (40) folgt ohne weiteres

$$\left.\begin{aligned} & a_0^n = -\frac{2}{n}\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)a_0^n, \quad a_r^n = -\frac{2}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)a_r^\mu \quad (r=1, 2, \\ & \cdots, n-1),\ a_n^n = 1 \\ & b_1^n = 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)a_r^\mu b_1^r,\ b_n^n = 1, \\ & b_s^n = 2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)a_r^\mu b_s^r \quad (s=1, 2, \cdots, n-1) \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Wir wollen den Wert a_r^n aus (41) berechnen. Es ist zunächst

$$a_0^n = -\frac{2(1+2a_0^1+\cdots+na_0^{n-1})}{n}.$$

Aus $g_1(t)=-2\kappa+(g_1(0)+2\kappa)e^t$ folgt $a_0^1=-2$. Wir nehmen nun an, dass es $a_0^r=(-1)^r(r+1)$ $(r=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$ gilt. Es ist dann

$$a_0^n=-\frac{2(1-2^2+3^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2)}{n}=(-1)^n(n+1)\ .$$

Daher besteht es im allgemeinen

$$a_0^n=(-1)^n(n+1) \quad (n=1,2,\cdots)\,. \tag{42}$$

Aus (41) folgt

$$a_r^n=-\frac{2}{n-r}\sum_{\mu=r}^{n-1}(\mu+1)a_r^\mu=\frac{-1}{n-r}\left[2\sum_{\mu=r}^{n-2}(\mu+1)a_r^\mu+2na_r^{n-1}\right]\ .$$

Wenn $r\leqq n-1$ ist, ist es

$$\frac{-1}{n-r}\left[2\sum_{\mu=r}^{n-2}(\mu+1)a_r^\mu+2na_r^{n-1}\right]=\frac{-1}{n-r}\left[-(n-1-r)a_r^{n-1}+2na_r^{n-1}\right]$$
$$=\frac{-(n+r+1)}{n-r}a_r^{n-1}.$$

Daraus folgt ohne weiteres

$$a_r^n=(-1)\frac{n+r+1}{n-r}a_r^{n-1}=(-1)^2\frac{(n+r+1)(n+r)}{(n-r)(n-r-1)}a_r^{n-2}=\cdots$$
$$=(-1)^{n-r-1}\frac{(n+r+1)(n+r)\cdots(2r+3)}{(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2}a_r^{r+1}.$$

Es ist aber aus (41)

$$a_{n-1}^n=-2na_{n-1}^{n-1}=-2n\ .$$

Daher ist

$$a_r^n=(-1)^{n-r}\frac{(n+r+1)(n+r)\cdots(2r+3)(2r+2)}{(n-r)\,!} \quad (r=1,\ 2,$$
$$\cdots,\ n-1)\,. \tag{43}$$

Aus (42) und (43) können wir leicht einsehen, dass die Formel (43) für $r=0$ auch gilt. Also besteht es im allgeimenen

$$g_n(t)=a_0^n\kappa^n+\sum_{r=1}^{n}a_r^n\kappa^{n-r}\Big[g_r(0)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa)+\cdots$$
$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big]e^{rt} \quad (n=1,\ 2,\ \cdots).$$

Der Koeffizient a_r^n wird durch (43) bestimmt.

6. Schritt: Indem wir die Differentialgleichungen

$$g_n'(t)=ng_n(t)+2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)g_\mu(t)\kappa^{n-\mu} \quad (n\geqq 1) \quad (0\leqq t<\infty) \tag{44}$$

integrieren, bekommen wir

$$g_n(s)=a_0^n\kappa^n+\sum_{r=1}^{n}a_r^n\kappa^{n-r}\Big[g_r(t)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(t)+2\kappa)+\cdots$$
$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(t)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big]e^{r(s-t)} \tag{45}$$

, wo s und t beliebige nicht negativen Zahlen bedeuten.

Der Koeffizient a_r^n wird durch (43) bestimmt. Wir wollen nun die Koeffizieten b_s^r berechnen[13].

Wir setzen $s=0$ in der Formel (45), so ergibt sich

$$g_n(0)=a_0^n\kappa^n+\sum_{r=1}^{n}a_r^n\kappa[g_r(t)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(t)+2\kappa)+\cdots$$
$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(t)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})]e^{-rt}.$$

Es ist bemerkenswert dabei, dass der Koeffizient b_s^r nur von r und s und nicht von n abhängig ist.

Daraus folgt ohne weiteres

$$a_r^n\kappa\,[g_r(t)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(t)+2\kappa)+\cdots$$
$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(t)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})]\,e^{-rt}$$
$$=\text{eine Konstante (unabhängig von } t). \tag{46}$$

Wir differenzieren die linke Seite von (46) nach t, so bekommen wir

$$b_1^r\kappa^{r-1}g_1'(t)+\cdots\qquad +b_{r-1}^r\kappa g'_{r-1}(t)+g_r'(t)$$
$$-[b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(t)+2\kappa)+\cdots$$
$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(t)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})+(g_r(t)-(-1)^r(r+1)\kappa^r)]\,r=0 \tag{47}$$

Anderseits kann die Differentialgleichung $g_n'(t)=ng_n(t)+2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)g_\mu(t)\kappa^{n-\mu}$ in der Form

$$g_n'(t)=n(g_n(t)-(-1)^n(n+1)\kappa^n)+2\sum_{\mu=0}^{n-1}(\mu+1)\kappa^{n-\mu}(g_\mu(t)$$
$$-(-1)^\mu(\mu+1)\kappa^\mu) \tag{48}$$

umschrieben werden.

Wir setzen (48) in (47) ein, so bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{r}\{b_i^r i+2(i+1)(b_{i+1}^r+b_{i+2}^r+\cdots+b_{r-1}^r+b_r^r)-rb_i^r\}\kappa^{r-i}g_i(t)=0 \tag{49}$$

, wo wir $b_r^r=1$ setzen.

Wir setzen $t=0$ in (49), so erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{r}\Big\{b_i^r i+2(i+1)(b_{i+1}^r+b_{i+2}^r+\cdots+b_{r-1}^r+b_r^r)-rb_i^r\Big\}\kappa^{r-i}g_i(0)=0. \tag{50}$$

---

[13] Es ist mir zu schwierig aus (43) die b_s^r zu berechnen.

Da $g_1(0)$, $g_2(0)$, $\cdots$, $g_r(0)$ die beliebigen Werte annehmen können, so folgt aus (50)

$$b_i^r i + 2(i+1)(b_{i+1}^r + b_{i+2}^r + \cdots \qquad + b_{r-1}^r + b_r^r) = r b_i^r .$$

Daraus ergibt sich, wenn $i<r$ ist,

$$b_i^r = \frac{2(i+1)}{r-i}(b_{i+1}^r + b_{i+2}^r + \cdots \qquad + b_{r-1}^r + b_r^r).$$

Daher ist

$$b_{i-1}^r = \frac{2i}{r-i+1}(b_i^r + b_{i+1}^r + \cdots \qquad + b_{r-1}^r + b_r^r).$$

Daraus folgt

$$\frac{(r-i)}{2(i+1)} b_i^r = \frac{(r-i+1)}{2i} b_{i-1}^r - b_i^r .$$

Folglich ist

$$b_{i-1}^r = b_i^r \frac{r+i+2}{r-i+1}\cdot\frac{i}{i+1} = b_{i+1}^r \frac{r+i+3}{r-i}\,\frac{i+1}{i+2}\cdot\frac{r+i+2}{r-i+1}\cdot\frac{i}{i+1} = \cdots$$

$$= \frac{i(i+1)\cdots\ r}{(i+1)\ \cdots(r+1)}\cdot\frac{(r+i+2)\cdots(r+r+2)}{(r-i+1)\cdots(r-r+1)} = \frac{i}{r+1}\ {}_{2r+2}C_{r-i+1}.$$

Also bekommen wir

$$b_i^r = \frac{i+1}{r+1}\ {}_{2r+2}C_{r-i} \qquad (i=r-1,\ r-2,\ \cdots,\ 1). \tag{51}$$

Da $b_r^r = 1$ ist, so gilt die Formel (51) für $i=r$ auch.

7. Schritt: Es sei

$$\varphi = k(z) = z + p_1 z^2 + \cdots \qquad + p_n z^{n+1} + \cdots$$

eine innerhalb des Einheitskreises $|z|<1$ reguläre und schlichte Funktion, so dass $p_n = M_n$ ist.

Das Bild von der Kreisscheibe $|z|<1$ durch die Funktion $\varphi = k(z)$ bezeichnen wir mit D. Nach dem Schifferschen Satz ist $D =$ die volle-φ-Ebene$-$eine analytische Kurve l. Wir bezeichnen die beiden Endepunkte von l mit ∞ und a.

Es sei b ($\neq\infty$) ein von a verschiedener Punkt auf l. Die Kurve l wird durch den Punkt b in die beiden Teile l_1 und l_2 zerlegt, einer von denen, etwa l_1, den Punkt a und der andere l_2 nicht den Punkt a enthält.

Wir bilden nun einundeindeutig und konform die Kreisscheibe $|z|<1$ auf das Gebiet $D_1 =$ die volle-φ-Ebene—l_1 ab, und wir bezeichnen diese Abbildungsfunktion mit $\varphi = h_1(z,t) = e^t(z + g_1(t)z^2 + \cdots + g_n(t)z^{n+1} + \cdots)$.

Aus (45) erhalten wir

$$g_n(t)=a_0^n\kappa^n+\sum_{r=1}^{n}a_r^n\kappa^{n-r}\Big[g_r(0)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa)+\cdots$$

$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})\Big]e^{rt}. \tag{52}$$

Anderseits ist es wohl bekannt, dass alle, in $|z|<1$ regulären, normierten schlichten Funktionen eine normale Familie bilden.

Folglich gibt es eine Folge $\{t_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$, so dass $t_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ ist, und dass die Folge $\{h_1(z, t_p)e^{-t_p}\}=z+g_1(t_p)z_2+\cdots\quad+g_n(t_p)z^{n+1}+\cdots$ in jedem abgeschlossenen Teilgebiet von $|z|<1$ gleichmässig konvergiert. Die Grenzfunktion von der Folge $\{h_1(z, t_p)e^{-t_p}\}$ bezeichnen wir mit $q(z)=z+q_1z_2+\cdots\quad+q_nz^{n+1}+\cdots$. Nach dem Weierstrassschen Satz strebt dann die Folge $\{g_n(t_p)\}$ gegen g_n.

Folglich muss aus (52)

$$a_r^n\kappa^{n-r}[g_r(0)-(-1)^r(r+1)\kappa^r+b_1^r\kappa^{r-1}(g_1(0)+2\kappa)+\cdots$$

$$+b_{r-1}^r\kappa(g_{r-1}(0)-(-1)^{r-1}r\kappa^{r-1})]=0$$

sein. Daher ist

$$g_n(t)=a_0^n\kappa^n=(-1)^n(n+1)\kappa^n.$$

Da $\kappa=\pm 1$ ist, ist

$$g^n(t)=(\pm 1)^n(-1)^n(n+1)=(n+1)$$

W. z. b. w.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received February 15, 1960*)