ZUR GALOISSCHEN THEORIE DER SCHIEFKÖRPER

ZYOITI SUETUNA Zum 60. Geburtstag gewidmet.

MIKAO MORIYA

In der vorliegenden Note versteht man unter einem Schiefkörper eventuell einen kommutativen Körper. Es sei L ein Schiefkörper und K ein Erweiterungs-(schief-)körper von L. Dann heißt ein Automorphismus σ von K ein L-Automorphismus, wenn L durch Anwendung von σ elementweise invariant ist. Nun heißt K über L *galoissch* (oder K heißt eine galoissche Erweiterung von L), wenn es eine Automorphismengruppe $\mathfrak{H}$ von K gibt, deren Fixkörper L ist. Selbstverständlich besteht $\mathfrak{H}$ aus lauter L-Automorphismen von K. Dabei soll $\mathfrak{H}$ *eine Galoisgruppe* von K/L genannt werden. Unter allen Galoisgruppen von K/L existiert sicher die größte, welche aus allen L-Automorphismen von K besteht. Die galoissche Theorie für Schiefkörper ist bereits von H. Cartan [1] und N. Jacobson [2, 3] im Falle ausführlich entwickelt worden[1], wo galoissche Erweiterungen über den Grundkörpern von einem endlichen Grade sind[2]. Obwohl die meisten Sätze aus der kommutativen galoisschen Theorie auch im nicht-kommutativen Fall gültig bleiben, so findet man doch einige wesentliche Abweichungen vom kommutativen Fall. Davon will ich hier die beiden folgenden hervorheben:

1. Zu einer galoisschen Erweiterung K von L gibt es im allgemeinen mehrere Galoisgruppen.

2. Ein Zwischenkörper von K/L, welcher über L galoissch ist, ist nicht notwendig *normal* in K/L.

Dabei heißt ein Zwischenkörper Z von K/L normal in K/L, wenn jeder L-Automorphismus von K in Z einen Automorphismus induziert.

Als Beispiel betrachte man als L den Körper aller reellen Zahlen und als K den Quaternionenkörper über L. Bekanntlich ist K über L galoissch vom Grade 4, und die Gruppe aller inneren Automorphismen von K bildet

1) Die Zahlen in [ ] beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Note.

2) Wenn man eine galoissche Erweiterung K eines Schiefkörpers L als Rechts- bzw. Linksvektorraum mit L als Skalarenkörper betrachtet, so kann man dementsprechend die Rechts- bzw. Linksdimension von K über L definieren. Die beiden Dimensionen sind einander gleich, wenn die eine von ihnen endlich ist. In diesem Fall nennt man diese gleiche Dimension den Grad von K nach L.

sicher eine (unendliche und sogar die größte) Galoisgruppe von K/L. Bezeichnet man aber mit 1, i, j und k die Quaternioneneinheiten[3], so bestätigt man leicht, daß die durch 1, i, j uud k erzeugten, inneren Automorphismen auch eine (endliche) Galoisgruppe von K/L bilden. Ferner ist $L(i)$ als eine kommutative quadratische Erweiterung von L über L galoissch. Wäre dann $L(i)$ in K/L normal, so müßte $L(i)$ durch Anwendung jedes inneren Automorphismus von K im ganzen invariant sein; dies führt aber nach einem Satz von H. Cartan [1, Théorème 4] zu einem Widerspruch.

§ **1.** In diesem Paragraphen bezeichnet K durchweg eine endliche galoissche Erweiterung über einem Schiefkörper L. Nach der galoisschen Theorie ist dann K stets galoissch über einem beliebigen Zwischenkörper Z von K/L. Unser Ziel ist ein Kriterium dafür anzugeben, daß ein Zwischenkörper von K/L über L galoissch sei[4]. Dazu schicken wir folgende Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Es sei Z ein Zwischenkörper von K/L und $\mathfrak{H}$ eine Galoisgruppe von K/Z. Ist dann σ ein L-Automorphismus von K, so ist $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ eine Galoisgruppe von K/Z^{σ}. Dabei bedeutet Z^{σ} denjenigen zu Z isomorphen Schiefkörper aus K, welcher aus Z durch Anwendung von σ entsteht.*

Beweis. Wenn man mit Z_0 den Fixkörper von $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ bezeichnet, so ist $Z^{\sigma}\subseteqq Z_0$, weil jeder Automorphismus aus $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ Z^{σ} elementweise invariant läßt. Daher gilt:

$$Z \subseteqq Z_0^{\sigma^{-1}}.$$

Da $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ eine Galoisgruppe von K/Z_0 ist, so ist $Z_0^{\sigma^{-1}}$ im Fixkörper von $\sigma(\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma)\sigma^{-1}=\mathfrak{H}$ enthalten; d. h. es ist

$$Z_0^{\sigma^{-1}} \subseteqq Z.$$

Also ist $Z_0^{\sigma^{-1}} = Z$, woraus $Z_0 = Z^{\sigma}$ folgt, w. z. b. w.

Hilfssatz 2. *Es sei Z ein Zwischenkörper von K/L und $\mathfrak{H}$ eine Galoisgruppe von K/Z. Ferner sei $\mathfrak{G}$ eine L-Automorphismengruppe von K, welche $\mathfrak{H}$ als einen Normalteiler enthält. Dann ist der Durchschnitt $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{G}$ und der größten Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K/Z)$ von K/Z ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Ferner induziert $\mathfrak{G}$ in Z eine L-Automorphismengruppe $\mathfrak{g}$, und es gilt:*

3) D. h. es sind $i^2=j^2=k^2=-1$, $ij=-ji=k$, $jk=-kj=i$ und $ki=-ik=j$.

4) H. Cartan hat schon in der zitierten Arbeit [1] ein Kriterium angegeben. Es scheint mir aber, daß unser Kriterium bei Anwendung brauchbarer ist als das von H. Cartan.

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{g}.$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $J(K, \mathfrak{H}_0)$ den Fixkörper von $\mathfrak{H}_0$ aus K. Wegen $\mathfrak{H} \subseteqq \mathfrak{H}_0 \subseteqq \mathfrak{G}(K/Z)$ gilt offenbar:

$$J(K, \mathfrak{H}) \supseteqq J(K, \mathfrak{H}_0) \supseteqq J(K, \mathfrak{G}(K/Z)) = Z,$$

also ist $\mathfrak{H}_0$ auch eine Galoisgruppe von K/Z. Für einen beliebigen Automorphismus σ aus $\mathfrak{G}$ sind $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ und $\sigma^{-1}\mathfrak{H}_0\sigma$ nach Hilfssatz 1 Galoisgruppen von K/Z^σ. Da $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma = \mathfrak{H}$ ist, so ist der Fixkörper Z^σ von $\sigma^{-1}\mathfrak{H}\sigma$ mit Z identisch. Daher ist $\sigma^{-1}\mathfrak{H}_0\sigma$ eine Galoisgruppe von K/Z und infolgedessen ist $\sigma^{-1}\mathfrak{H}_0\sigma \subseteqq \mathfrak{G}(K/Z)$. Hieraus folgt:

$$\sigma^{-1}\mathfrak{H}_0\sigma \subseteqq \mathfrak{G} \cap \mathfrak{G}(K/Z) \subseteqq \mathfrak{H}_0;$$

d. h. $\mathfrak{H}_0$ ist ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Weil für einen beliebigen Automorphismus σ aus $\mathfrak{G}$ stets $Z^\sigma = Z$ gilt, so induziert jeder Automorphismus aus $\mathfrak{G}$ einen L-Automorphismus von Z. Offenbar induzieren dabei alle und nur alle Automorphismen aus $\mathfrak{H}_0$ den identischen Automorphismus von Z, und folglich induzieren alle Automorphismen aus einer Nebengruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_0$ einen und denselben Automorphismus von Z, den ich einfach den einer Nebengruppe zugeordneten Automorphismus von Z nennen will.

Ordnet man nun einer Nebengruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{H}_0$ den ihr zugeordneten Automorphismus von Z zu, so entsteht dadurch aus $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_0$ eine Automorphismengruppe $\mathfrak{g}$ von Z. Es ist klar, daß

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H}_0 \cong \mathfrak{g}$$

ist.

Nach der galoisschen Theorie ist ein L-Isomorphismus τ von Z in K stets auf K fortsetzbar[5]; d. h. es gibt einen L-Automorphismus von K, welcher, auf Z angewandt, den Isomorphismus τ induziert. Ist also $\mathfrak{g}$ eine L-Automorphismengrupppe von Z, so bildet die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von den Fortsetzungen aller Automorphismen aus $\mathfrak{g}$ auf K eine Gruppe. Im folgenden soll $\mathfrak{G}$ einfach die Fortsetzung von $\mathfrak{g}$ auf K heißen.

Satz 1. *Es sei K eine endliche galoissche Erweiterung eines Schiefkörpers L und Z ein Zwischenkörper von K/L. Dann und nur dann ist Z über L galoissch, wenn es eine Galoisgruppe $\mathfrak{H}$ von K/Z und eine Galoisgruppe von K/L gibt, welche $\mathfrak{H}$ als Normalteiler enthält.*

Beweis. $\mathfrak{H}$ sei eine Galoisgruppe von K/Z und $\mathfrak{G}$ eine Galoisgruppe von K/L, welche $\mathfrak{H}$ als Normalteiler enthält. Dann induziert $\mathfrak{G}$ nach Hilfssatz 2 eine L-Automorphismengruppe $\mathfrak{g}$ von Z. Offenbar ist L im Fix-

5) Vgl. etwa [1, Théorème 3] oder [3, §7. 4, Theorem 1, Corollary 1].

körper L' von $\mathfrak{g}$ aus Z enthalten. Nun sei z ein beliebiges Element aus L'. Dann ist z sicher ein Fixelement von $\mathfrak{G}$; d. h. es ist $z \in L$. Also ist $L = L'$. Dies zeigt offenbar, daß Z über L galoissch ist.

Umgekehrt sei Z über L galoissch und $\mathfrak{g}$ ein Galoisgruppe von Z/L. Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{G}$ die Fortsetzung von $\mathfrak{g}$ auf K, so enthält $\mathfrak{G}$ die größte Galoisgrupppe $\mathfrak{G}(K/Z)$ von K/Z, weil jeder Automorphismus aus $\mathfrak{G}(K/Z)$ in L den identischen Automorphismus induziert. Es ist klar, daß L im Fixkörper von $\mathfrak{G}$ aus K enthalten ist. Ist aber x ein Fixelement von $\mathfrak{G}$ aus K, so ist x sicher ein Fixelement von $\mathfrak{G}(K/Z)$, also ist x in Z enthalten. Hieraus folgt ohne weiteres, daß x ein Fixelement von $\mathfrak{g}$ aus Z ist. Also gehört x zu L; d. h. der Fixkörper von $\mathfrak{G}$ ist in L enthalten. Somit ist gezeigt, daß L der Fixkörper von $\mathfrak{G}$ aus K und infolgedessen K über L galoissch ist. Ferner ist dabei $\mathfrak{G}$ eine Galoisgrupppe von K/L.

Für einen beliebigen Automorphismus σ aus $\mathfrak{G}$ ist $\sigma^{-1}\mathfrak{G}(K/Z)\sigma$ nach Hilfssatz 1 eine Galoisgrupppe von K/Z^{σ}. Weil nach Definition $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von Z induziert, so ist $Z^{\sigma} = Z$; d. h. $\sigma^{-1}\mathfrak{G}(K/Z)\sigma$ ist eine Galoisgrupppe von K/Z und folglich ist $\sigma^{-1}\mathfrak{G}(K/Z)\sigma \subseteqq \mathfrak{G}(K/Z)$. Dies zeigt aber, daß $\mathfrak{G}(K/Z)$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ ist, w. z. b. w.

Aus dem Beweis von Satz 1 folgt:

Zusatz 1 zu Satz 1. *Ist ein Zwischenkörper Z von K/L über L galoissch, so ist die Fortsetzung jeder Galoisgruppe von Z/L auf K stets eine Galoisgruppe von K/L.*

Es sei Z wieder ein Zwischenkörper von K/L und $\mathfrak{G}(K/Z)$ die größte Galoisgrupppe von K/Z. Ist dann $\mathfrak{G}(K/Z)$ ein Normalteiler der größten Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K/L)$ von K/L, so ist nach Satz 1 Z über L galoissch. Ferner induziert $\mathfrak{G}(K/L)$ nach Hilfssatz 2 einen L-Automorphismengruppe $\mathfrak{g}$ von Z. Weil die Fortsetzung eines beliebigen L-Automorphismus von Z auf K sicher in $\mathfrak{G}(K/L)$ enthalten ist, so ist $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{G}(Z/L)$ identisch. Daher ist Z normal in K/L, und es gilt nach Hilfssatz 2:

$$\mathfrak{G}(K/L)/\mathfrak{G}(K/Z) \cong \mathfrak{G}(Z/L).$$

Wenn also Z über L galoissch aber in K/L nicht-normal ist, so ist die Fortsetzung jeder Galoisgruppe von Z/L auf K von der größten Galoisgruppe von K/L verschieden, weil sonst Z nach dem eben Bewiesenen in K/L normal sein würde. Hieraus folgt:

Zusatz 2 zu Satz 1. *Besitzt K einen solchen Zwischenkörper Z von K/L, daß Z über L galoissch aber in K/L nicht-normal ist, so existiert eine Galoisgruppe von K/L, welche keine größte Galoisgruppe von K/L ist.*

Aus Satz 1 schließt man auch folgenden

Zusatz 3 zu Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Galoisgruppe von K/L und $\mathfrak{H}$ ein*

Normalteiler von $\mathfrak{G}$, so ist der Fixkörper von $\mathfrak{H}$ aus K über L galoissch.

Bemerkung. Satz 1 gilt für eine unendliche galoissche Erweiterung K über L, wenn K über L lokal endlich-normal ist, und wenn die größte Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K/L)$ von K/L in bezug auf die Krullsche Topologie lokalkompakt ist[6].

§ 2. K sei ein Schiefkörper und L ein Teil-(schief-)körper von K. Ferner sei S eine Teilmenge von K. Dann versteht man unter dem *Zentralisator* $V_K(S)$ von S in K die Gesamtheit aller derjenigen Elemente aus K, die einzeln mit S elementweise vertauschbar sind[7]. Nach Definition bildet $V_K(S)$ einen Teilkörper von K, und für eine Teilmenge S' von S gilt $V_K(S) \subseteqq V_K(S')$. Daher enthält $V_K(S)$ stets den Zentralisator $V_K(K)$ von K in K, welcher definitionsgemäß das Zentrum von K bedeutet. Im folgenden setzen wir stets $V_K(K)=Z$. Nun bezeichnen wir mit $V_K(L)^*$ die multiplikative Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus $V_K(L)$. Dann definiert ein beliebiges Element t aus $V_K(L)^*$ einen inneren L-Automorphismus $\tilde{t}$ von K, wenn für ein beliebiges Element x aus K $x^{\tilde{t}} = txt^{-1}$ gesetzt ist. Ersichtlich definieren alle und nur alle Elemente aus $V_K(K)^*=Z^*$ den identischen Automorphismus von K, und alle Elemente aus einer Nebengruppe von $V_K(L)^*$ nach Z^* definieren einen und denselben inneren L-Automorphismus von K. Also ist die Faktorgruppe $V_K(L)^*/Z^*$ invers isomorph auf die Gruppe $\mathfrak{J}(K/L)$ aller inneren L-Automorphismen von K abgebildet. Im folgenden bezeichnen wir der Bequemlichkeit halber $\mathfrak{J}(K/L)$ oft mit $\widetilde{V_K(L)^*}$.

Setzt man nun $H = V_K(V_K(L))$, so gilt wegen $V_K(V_K(L)) \supseteqq L$:

$$V_K(L) \subseteqq V_K(V_K(V_K(L)))= V_K(H) \subseteqq V_K(L);$$

d. h. es ist $V_K(H) = V_K(L)$. Nach Definition ist H der Fixkörper von $\widetilde{V_K(L)^*}(= \mathfrak{J}(K/L))$, also ist K über H galoissch mit $\mathfrak{J}(K/L)$ als eine Galoisgruppe. Wegen $\mathfrak{J}(K/L) = \widetilde{V_K(H)^*}$ ist $\mathfrak{J}(K/L)$ die größte Galoisgruppe von K/H, falls K über L endlich ist [6, Theorem 4]. Ferner gilt:

6) Eine galoissche Erweiterung K heißt über L lokal endlich-normal, wenn zu einer beliebigen endlichen Teilmenge S von K stets ein in K/L normaler Zwischenkörper Z von K/L existiert derart, daß Z S enthält und Z über L von einem endlichen Grade ist. In diesem Fall kann man in die größte Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K/L)$ von K/L eine Topologie einführen, wie es Krull bei kommutativen, unendlichen galoisschen Erweiterungen durchgeführt hat. Wenn $\mathfrak{G}(K/L)$ in bezug auf diese Topologie lokal-kompakt ist, so kann man für K/L die galoissche Theorie entwickeln. Hierzu vergleiche man: H. Tominaga und T. Nagahara, On Galois theory of division rings, Math. Journ., Okayama Univ., Bd. 6 (1956), 1—21.

7) Wenn S die leere Menge ist, so definieren wir $V_K(S)=K$.

$$
\begin{aligned}
V_H(L) &= V_K(L) \cap H = V_K(H) \cap H = V_H(H) = \text{Zentrum von } H \\
&= V_K(L) \cap V_K(V_K(L)) = V_{V_K(L)}(V_K(L)) = \text{Zentrum von } V_K(L);
\end{aligned}
$$

d. h. das Zentrum von $V_K(L)$ stimmt mit dem von H überein. Weil $V_H(L) = V_H(H)$ ist, so existiert kein eigentlich innerer L-Automorphismus von H.

Von nun an wollen wir stets annehmen, daß K über L endlich galoissch ist. Da offenbar jeder L-Automorphismus von K den Körper $V_K(L)$ (in seiner Gesamtheit) invariant läßt, so induziert die größte Galoisgruppe $\mathfrak{G}(K/L)$ von K/L eine Automorphismengruppe $\mathfrak{g}$ von $V_K(L)$. Dabei ist $V_K(L) \cap L = V_L(L)$ ($=$ Zentrum von L) der Fixkörper von $\mathfrak{g}$ aus $V_K(L)$. Ferner ist das Zentrum $V_H(H)$ von $V_K(L)$ durch Anwendung eines beliebigen Automorphismus von $\mathfrak{g}$ invariant. Also ist $V_H(H)$ als kommutativer Körper über $V_L(L)$ *separabel galoissch.*

Da $V_K(L)$ durch Anwendung jedes Automorphismus aus $\mathfrak{G}(K/L)$ invariant ist, so ist es auch $V_K(V_K(L)) = H$. Also ist H normal in K/L. Offenbar definiert jedes Element a aus K einen Modulendomorphismus $a^{(r)}$ von K, wenn $x \cdot a^{(r)} = xa$ gesetzt ist, wo x alle Elemente aus K durchläuft. Dabei heißt $a^{(r)}$ die durch a definierte Rechtsmultiplikation von K. Wenn man mit $K^{(r)}$ die Gesamtheit aller Rechtsmultiplikationen von K bezeichnet, so ist $K^{(r)}$ zu K ringisomorph. Ein Automorphismus τ von K kann auch als ein Modulendomorphismus von K betrachtet werden. Zwischen einer Rechtsmultiplikation $a^{(r)}$ von K und einem Automorphismus τ von K besteht die Relation: $a^{(r)}\tau = \tau(a^{\tau})^{(r)}$. Ist nun $\mathfrak{G}$ eine Galoisgruppe von K/L, so bildet die Gesamtheit $\mathfrak{G}K^{(r)}$ aller endlichen Produktsummen von den Elementen aus $\mathfrak{G}$ und $K^{(r)}$ einen Ring (einen Teilring aller Endomorphismen von K), welcher gleichzeitig $\mathfrak{G}$ und $K^{(r)}$ enthält. $\mathfrak{G}K^{(r)}$ ist ersichtlich ein Rechtsvektorraum über $K^{(r)}$, und es gilt:

$$
[\mathfrak{G}K^{(r)} : K^{(r)}] = [K : L],
$$

wo $[\mathfrak{G}K^{(r)} : K^{(r)}]$ die Dimension von $\mathfrak{G}K^{(r)}$ über $K^{(r)}$ bedeutet. Ferner enthält $\mathfrak{G}K^{(r)}$ die größte Galoisgruppe von K/L [5].

Nun bildet die Gesamtheit $\mathfrak{J}$ aller inneren Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{J}K^{(r)}$ ein Teilraum von $\mathfrak{G}K^{(r)}$ ist, so besitzt $\mathfrak{J}K^{(r)}$ offenbar eine $K^{(r)}$-Basis aus $\mathfrak{J}$. Es sei $V = \{\widetilde{v}_i,\ i = 1, 2, \dots, s\}$ eine $K^{(r)}$-Basis von $\mathfrak{J}K^{(r)}$ aus $\mathfrak{J}$[8], und $S = \{\sigma_j,\ j = 1, 2, \dots, m\}$ ein Vertretersystem von m verschiedenen Nebengruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{J}$. Ist dann $T = \{\sigma_j\widetilde{v}_i,\ i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, m\}$ über $K^{(r)}$ linear abhängig, so existiert eine Teilmenge $\{\tau_q,\ q = 1, 2, \dots, n\}$ von T von der Art, daß $\tau_q =$

8) Die v_i ($i = 1, 2, \dots, s$) gehören also zu $V_K(L)$.

$\tau_j\tilde{u}_q (q=1, 2, \ldots, n)$ mit $\sum_{q=1}^{n} u_q = 0$ sind, wo die u_q $(q = 1, 2, \ldots, n)$ Elemente aus $V_K(L)^*$ bezeichnen [4, Hilfssatz 1 ; 1, Lemme 1]. Daher gehören die τ_q $(q = 1, 2, \ldots, n)$ zu einer und derselben Nebengruppe von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{J}$; d. h. es existiert ein σ_{j0} aus S, so daß $\tau_q = \sigma_{j0} \tilde{v}'_q$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$ sind, wo $\{\tilde{v}'_q ; q = 1, 2, \ldots, n\}$ eine Teilmenge von V bedeutet. Wegen $\sum_{q=1}^{n} u_q = 0$ sind die $\tilde{u}_q$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$, also auch die τ_q $(=\sigma_{j0}\tilde{v}'_q)$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$, über $K^{(r)}$ linear abhängig [Vgl. etwa 4, Hilfssatz 1]. Dies ist aber ein Widerspruch, weil sonst die Menge $\{\tilde{v}'_q, q =1, 2, \ldots, n\}$ über $K^{(r)}$ linear abhängig sein würde. Hieraus folgt, daß die Menge T über $K^{(r)}$ linear unabhängig und infolgedessen $(\mathfrak{G} : \mathfrak{J})$ endlich ist.

Nun sei $\{\tau_j, j=1, 2, \ldots, t\}$ ein Vertretersystem aller Nebengruppen von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{J}$[9]. Ist dann τ ein beliebiger Automorphismus aus $\mathfrak{G}$, so existieren ein τ_{j0} $(1 \leqq j_0 \leqq t)$ und ein $\tilde{v}$ aus $\mathfrak{J}$, so daß $\tau = \tau_{j0}\tilde{v}$ ist. Da sich $\tilde{v}$ als eine Linearform in $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_s$ mit Koeffizienten aus $K^{(r)}$ darstellen läßt, so ist τ über $K^{(r)}$ von den $\tau_j\tilde{v}_i (i =1, 2, \ldots, s ; j=1, 2, \ldots, t)$ linear abhängig ; d. h. die $\tau_j\tilde{v}_i$ $(i=1, 2, \ldots, s ; j = 1, 2, \ldots, t)$ bilden eine $K^{(r)}$ -Basis von $\mathfrak{G}K^{(r)}$.

Ist nun $\tilde{v}$ ein Automorphismus aus $\widetilde{V_K(L)^*}$, so ist $\tilde{v}$ über $K^{(r)}$ von den $\tau_j\tilde{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s ; j = 1, 2, \ldots, t)$ linear abhängig, weil jeder L-Automorphismus von K in $\mathfrak{G}K^{(r)}$ enthalten ist. Es gibt also unter den $\tau_j\tilde{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s ; j=1, 2, \ldots, t)$ endlich viele Automorphismen $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_q$ derart, daß

$$\rho_i = \tilde{v}\tilde{u}_i \; (i =1, 2, \ldots, q)$$

mit $1 + \sum_{i=1}^{q} u_i = 0$ sind. Da die $\rho_i (i = 1, 2, \ldots, q)$ alle innere L-Automorphismen sind, so müssen die ρ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$ zu V gehören. Ferner folgt aus $1 + \sum_{i=1}^{q} u_i = 0$, daß

$$\tilde{v} + \sum_{i=1}^{q} \rho_i u_i^{(r)} = 0 \qquad \text{(Null-Endomorphismus von } K)$$

ist ; d. h. $\tilde{v}$ ist über $K^{(r)}$ von den $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_s$ linear abhängig. Also ist $v \in Zv_1 + Zv_2 + \ldots + Zv_s \subseteqq V_K(L)$. Da v alle Elemente aus $V_K(L)^*$ durchlaufen kann, so gilt :

$$V_K(L) = Zv_1 + Zv_2 + \ldots + Zv_s ;$$

d. h. es ist $[\mathfrak{J}K^{(r)} : K^{(r)}] = [V_K(L) : Z]$.

Zusammenfassend haben wir bewiesen :

Satz 2. *Es sei K endlich galoissch über L. Ferner sei $\mathfrak{G}$ eine Ga-*

9) Als den Vertreter von $\mathfrak{J}$ nehme man den identischen Automorphismus.

loisgruppe von K/L und $\mathfrak{J}$ derjenige Normalteiter von $\mathfrak{G}$, der aus den sämtlichen inneren Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ besteht. Dann gilt:

$$[K: L] = (\mathfrak{G} : \mathfrak{J})[V_K(L) : Z].$$

Ist ferner $\{\tilde{v}_i,\ i = 1, 2, \ldots, s\}$ eine beliebige $K^{(r)}$-Basis von $\mathfrak{J}K^{(r)}$ aus $\mathfrak{J}$, so bildet $\{v_i,\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, s\}$ stets eine Z-Basis von $V_K(L)$.

Bemerkung. Nach Satz 2 ist der Index von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{J}$ eine Invariante von K/L, weil $(\mathfrak{G} : \mathfrak{J}) = [K: L][V_K(L) : Z]^{-1}$ ist.

Nun heiße K über L *äußer* (*inner*) *galoisssch*, wenn K keinen eigentlich inneren (äußeren) Automorphismus besitzt. Ebenso kann man von einer äußeren (inneren) Galoisgruppe von K/L sprechen, wenn sie keinen eigentlich inneren (äußeren) Automorphismus besitzt. Aus Satz 2 schließt man leicht:

Zusatz 1 zu Satz 2. *K ist dann und nur dann über L äußer (inner) galoissch, wenn es eine äußere (innere) Galoisgruppe von K/L gibt. Wenn insbesondere K über L äußer galoissch, so existiert nur eine einzige Galoisgruppe von K/L.*

Wir betrachten nun den Fixkörper H' von $\mathfrak{J}$ aus K und bezeichnen mit $\{\tilde{v}_i,\ i=1, 2, \ldots, s\}$ eine $K^{(r)}$-Basis von $\mathfrak{J}K^{(r)}$ aus $\mathfrak{J}$. Offenbar ist K nach Zusatz 1 zu Satz 2 über H' inner galoissch, und die $v_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ sind alle in $V_K(H')$ enthalten. Da $V_K(H') \supseteqq Z$ und $H' \supseteqq L$ sind, so gilt einerseits $V_K(H') \supseteqq \sum_{i=1}^{s} Zv_i = V_K(L)$ (nach Satz 2) und anderseits $V_K(H') \subseteqq V_K(L)$, woraus $V_K(H') = V_K(L)$ folgt. Da K über H' inner galoissch ist, so ist $\widetilde{V_K(H')^*}$ $(= \widetilde{V_K(L)^*})$ die größte Galoisgruppe von K/H'. Aber wie schon oben bewiesen ist, ist $H = V_K(V_K(L))$ der Fixkörper von $\widetilde{V_K(L)^*}$ aus K; d. h. es ist $H' = H$. Da $\mathfrak{G} \cap \widetilde{V_K(L)^*} = \mathfrak{J}$ ist, so folgt aus Hilfssatz 2:

Zusatz 2 zu Satz 2. *Der Fixkörper von $\mathfrak{J}$ aus K ist der Schiefkörper $H = V_K(V_K(L))$, und $\mathfrak{G}/\mathfrak{J}$ ist isomorph zur durch $\mathfrak{G}$ induzierten Galoisgruppe von H/L. Ferner ist K über H inner galoissch und H ist über L äußer galoissch, weil H keinen eigentlich inneren L-Automorphismus besitzt.*

§ 3. In diesem Paragraphen betrachten wir eine endliche galoissche Erweiterung K eines Schiefkörpers L, welche eine p-Gruppe $\mathfrak{P}$ von der Ordnung p^e $(e \geqq 1)$ als eine Galoisgruppe besitzt, wo p eine Primzahl bedeutet. Ferner nehmen wir im folgenden durchweg an, daß das Zentrum Z_0 von L keine primitive p-te Einheitswurzel enthält. Diese Annahme ist stets erfüllt, wenn die Charakteristik $\chi(K)$ von K gleich p ist. Ist ferner $\chi(K) \neq p$, so ist p sicher eine ungerade Primzahl.

Zunächst behandeln wir den Fall, wo K über L *inner galoissch* ist. Dann ist $\widetilde{V_K(L)^*}$ die größte Galoisgruppe von K/L und infolgedessen ist $V_K(V_K(L)) = L$. Nach dem in § 2 Gezeigten ist daher Z_0 das Zentrum von $V_K(L)$, und das Zentrum Z von K ist in Z_0 enthalten.

Da $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe ist, so enthält das Zentrum von $\mathfrak{P}$ eine Gruppe $\mathfrak{P}_0$ von der Ordnung p[10]. Es sei $\tilde{v}_0$ ein erzeugender Automorphismus von $\mathfrak{P}_0$ und $\tilde{v}$ ein beliebiges Automorphismus aus $\mathfrak{P}$. Dann gilt:

$$\tilde{v}^{-1}\tilde{v}_0\tilde{v} = \widetilde{vv_0v^{-1}} = \tilde{v}_0.$$

Es existiert also ein solches Element c aus Z, daß $vv_0v^{-1} = cv_0$ ist. Da $\tilde{v}_0{}^p$ der identische Automorphismus von K ist und folglich v_0^p zu Z gehört, so folgt aus $(vv_0v^{-1})^p = (cv_0)^p$:

$$v_0^p = c^p v_0^p;$$

d. h. es ist $c^p = 1$. Wegen der Annahme muß also $c = 1$ sein. Dies zeigt aber, daß $v_0^{\tilde{v}} = v_0$ und $v^{\tilde{v}_0} = v$ sind. Da $\tilde{v}$ alle Automorphismen aus $\mathfrak{P}$ durchlaufen kann, so folgt aus $v_0^{\tilde{v}} = v_0$, daß v_0 zu L und infolgedessen zu $V_K(L) \cap L = Z_0$ gehören muß. Nun kann man nach Satz 2 aus $\mathfrak{P}$ eine Teilmege $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots, \tilde{v}_s\}$ so herausgreifen, daß $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ eine Z-Basis von $V_K(L)$ bildet. Da nach dem eben Gezeigten $v_i^{\tilde{v}_0} = v_i (i = 1, 2, \ldots, s)$ sind, so ist $V_K(L)$ elementweise invariant durch Anwendung aller Automorphismen aus $\mathfrak{P}_0$. Bezeichnet also K_1 den Fixkörper von $\mathfrak{P}_0$ aus K, so ist $V_K(L) \subseteqq K_1$, woraus $V_K(L) = V_{K_1}(L)$ folgt. Ferner gilt:

$$L \subseteqq V_{K_1}(V_{K_1}(L)) \subseteqq V_K(V_{K_1}(L)) = V_K(V_K(L)) = L;$$

d. h. K_1 ist über L inner galoissch.

Da $\mathfrak{P}_0$ eine innere Galoisgruppe von K/K_1 ist, so gilt nach Satz 2:

$$(*) \qquad [K:\ K_1] = [V_K(K_1):\ Z] \leqq p.$$

Nun sei $\tilde{v}_0$ wieder ein erzeugender Automorphismus aus $\mathfrak{P}_0$. Dann ist $v_0^p = z_0$ mit $z_0 \in Z$. Wäre dann die Gleichung $X^p - z_0 = 0$ in Z reduzibel, so müßte diese Gleichung eine Wurzel z_1 aus Z besitzen; d. h. es würde $z_0 = z_1^p$ und folglich $v_0 = z_1$ sein, weil $(v_0 z_1{}^{-1})^p = 1$ gälte[11]. Dies ist aber ein Widerspruch. Daher ist $X^p - z_0 = 0$ in Z irreduzibel und folglich ist v_0 über Z vom Grade p. Wegen $v_0 \in V_K(K_1)$ schließt man aus $(*)$:

$$[K:\ K_1] = [V_K(K_1):\ Z] = p;$$

10) $\mathfrak{P}_0$ ist also ein Normalteiler von $\mathfrak{P}$.

11) v_0 und z_1 gehören zum kommutativen Körper Z_1.

ferner ist $V_K(K_1) = Z + Zv_0 + \ldots + Zv_0^{p-1} \subseteq Z_0$.

Nun setzen wir $\widetilde{V_K(K_1)}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}'_0$. Dann ist nach Hilfssatz 2 $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}'_0$ isomorph zur durch $\mathfrak{P}$ induzierten Galoisgruppe $\mathfrak{P}_1$ von K_1/L ; also ist $\mathfrak{P}_1$ eine p-Gruppe von der Ordnung $< p^e$. Durch vollständige Induktion kann man ohne Schwierigkeit beweisen, daß $V_K(L) = Z_0$ ist, und daß $[K : L]$ eine Potenz von p ist.

Bemerkung. Wenn auch eine endliche galoissche Erweiterung K von L eine endliche Galoisgruppe $\mathfrak{G}$ besitzt, so braucht die Ordnung von $\mathfrak{G}$ nicht durch $[K : L]$ teilbar zu sein.

Vorläufig wollen wir annehmen, daß $p \neq \chi(K)$ ist. Unter dieser Annahme können wir zeigen, daß $\mathfrak{Q} = \widetilde{V_K(K_1)}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ ist. Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, daß $\mathfrak{Q}$ einen Automorphismus von der Ordnung p^a $(a \geqq 2)$ besitzt. In diesem Fall enthält $\mathfrak{Q}$ sicher einen Automorphismus $\tilde{u}$ von der Ordnung p^2, also gilt :

$$u^{p^2} = z \qquad (z \in Z).$$

Da offenbar u zu $V_K(K_1)\backslash Z$[12] gehört, so genügt u einer irreduziblen Gleichung $f(X) = 0$ vom Grade p in Z. Daher ist $X^{p^2} - z$ durch $f(X)$ teilbar. Bezeichnet nun ζ eine primitive p^2-te Einheitswurzel, so stellen $\zeta^i u (i = 1, 2, \ldots, p^2)$ die sämtlichen Wurzeln von $X^{p^2} - z = 0$ dar (in einem $V_K(K_1)$ enthaltenden, algebraisch-abgeschlossenen Körper). Hieraus schließt man ohne Sehwierigkeit, daß das von X freie Glied c von $f(X)$ von der Form $-\zeta^i u^p$ $(0 \leqq i \leqq p^2 - 1)$ ist. Da $cu^{-p} = -\zeta^i$ zu $V_K(K_1)$ gehört und $V_K(K_1)$ keine primitive p-te Einheitswurzel enthält, so ist $-\zeta^i = -1$; d. h. $u^p = -c \in Z$. Dies besagt entgegen der Annahme, daß u von der Ordnung p ist. Die Ordnung eines beliebigen Automorphismus $\mathfrak{Q}$ ist also höchstens gleich p.

Es sei $\tilde{v}_0$ wieder ein erzeugender Automorphismus aus $\mathfrak{P}_0$ und $\tilde{u}$ ein Automorphismus aus $\mathfrak{Q}\backslash\mathfrak{P}_0$. Dann gelten $v_0^p = z_0$ und $u^p = z$, wo z_0, z Elemente aus Z bezeichnen. Ferner sind die Gleichungen $X^p - z_0 = 0$ und $X^p - z = 0$ in Z irreduzibel. Hieraus schließt man mit Hilfe vom folgenden Hilfssatz 4 : $u = cv^i$ mit $c \in Z$. Also ist $u = v^i \in \mathfrak{P}_0$, was aber ein Widerspruch ist. Somit ist gezeigt, daß $\widetilde{V_K(K_1)}^* \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_0$ ist.

Hilfssatz 4. *Es sei k ein kommutativer Körper und p eine von $\chi(k)$ verschiedene Primzahl. Ferner sei W eine kommutative Erweiterung vom Grade p über k mit α und β als primitiven Elementen. Gehören dann α^p und β^p zu k, so existiert ein Element c aus k derart, daß $\beta = c\alpha^\nu$ ist.*

---

12) $V_K(K_1)\backslash Z$ bezeichnet das Komplement von Z in $V_K(K_1)$.

Beweis. Wenn $\alpha^p = a$ und $\beta^p = b$ gesetzt sind, so sind die Gleichungen $X^p - a = 0$ und $X^p - b = 0$ sicher in k irreduzibel. Nun sei $k(\zeta)$ der Körper, welcher aus k durch Adjunktion einer primitiven p-ten Einheitswurzel ζ entsteht. Wäre dann $X^p - a = 0$ in $k(\zeta)$ reduzibel, so besäße diese Gleichung eine Wurzel aus $k(\zeta)$ ($\subseteq W(\zeta)$). Dies ist aber ein Widerspruch, weil jede Wurzel von $X^p - a = 0$ über k vom Grade p aber $[k(\zeta) : k] \leqq p - 1$ ist. Daher bleibt $X^p - a = 0$ in $k(\zeta)$ irreduzibel. Ebenso ist $X^p - b = 0$ auch in $k(\zeta)$ irreduzibel. Da α und β sicher primitive Elemente von $W(\zeta)$ über $k(\zeta)$ sind, so gilt nach der Kummerschen Theorie[13]:

$$b = c_0^p a^\nu \qquad \text{mit } (\nu, p) = 1,$$

wo c_0 ein Element aus $k(\zeta)$ ist. Aus $b = c_0^p a$ schließt man sofort, daß $(\beta\alpha^{-\nu})^p = c_0^p$ ist; d. h. für ein geeigntes i $(0 \leqq i \leqq p - 1)$ gilt:

$$\beta\alpha^{-\nu} = \zeta^i c_0.$$

Da $\beta\alpha^{-\nu} \in W$ und $\zeta^i c_0 \in k(\zeta)$ sind, so muß für ein Element c aus k $\beta\alpha^{-\nu} = c$ sein, weil $W \cap k(\zeta) = k$ ist, w. z. b. w.

Da $\mathfrak{P}_0$ von der Ordnung p ist, so ist nach dem eben Bewiesenen die durch $\mathfrak{P}$ induzierte Galoisgruppe $\mathfrak{P}_1$ von K_1/L von der Ordnung p^{e-1}. Weil aber K_1 über L inner galoissch ist, so kann man durch vollständige Induktion beweisen, daß $[K : L] = p^e$ ist[14].

Zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 3. *Eine endliche galoissche Erweiterung K eines Schiefkörpers L besitze eine p-Gruppe von der Ordnung p^e $(e \geqq 1)$ als eine Galoisgruppe, wo p eine Primzahl bezeichnen. Ferner sei K über L inner galoissch. Enthält dann das Zentrum von L keine primitive p-te Einheitswurzel, so gelten:*

1) *L ist vom Zentrum von K verschieden.*

2) *$V_K(L)$ ist das Zentrum von L; also ist jede Galoisgruppe von K/L abelsch.*

3) *$[K : L]$ ist Teiler von p^e. Wenn insbesondere $p \neq \chi(k)$ ist, so ist $[K : L] = p^e$.*

Nun kehren wir zum allgemeinen Fall zurück, und wir setzen $H = V_K(V_K(L))$. Offenbar induziert $\mathfrak{P}$ im Zentrum $V_H(H)$ von $V_K(L)$ eine Automorphismengruppe, deren Fixkörper $Z_0 (= V_L(L))$ ist. Also ist der Grad von $V_H(H)$ nach Z_0 eine Potenz von p, und $V_H(H)$ enthält auch keine primi-

13) Vgl. etwa H. Hasse, Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia: Beweise zu Teil I (1927), Satz 5.

14) Im Falle, wo $\chi(K) = p$ ist, gilt diese Tatsache nicht mehr, weil die p-te Potenz eines beliebige Elementes aus $V_K(K_1) \setminus Z$ stets zu Z gehört.

tive p-te Einheitswurzel, weil sie über Z_0 einen kleineren Grad als p besitzt.

Im Falle, wo K über L äußer galoissch ist, so ist $K = H$ und infolgedessen ist nach dem in §2 Gezeigten $V_K(L) = V_K(K) \supseteqq V_L(L)$. Ferner gilt nach Satz 2 :

$$[K: L] = p^e.$$

Nun nehmen wir an, daß K über L nicht äußer galoissch ist, und wir bezeichnen mit $\mathfrak{J}$ die Gruppe aller inneren Automorphismen aus $\mathfrak{P}$. Weil K über H inner galoissch ist mit $\mathfrak{J}$ als eine Galoisgruppe, und weil $V_H(H)$ keine primitive p-te Einheitswurzel enthält, so ist nach Satz 3 $V_H(H) = V_K(H)\ (= V_K(L))$ und $[K : H]$ ein Teiler der Ordnung von $\mathfrak{J}$. Wenn insbesondere $p \neq \chi(K)$ ist, so gilt :

$$[K : H] = \text{Ordnung von } \mathfrak{J}.$$

Da $\mathfrak{J}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{P}$ und $\widetilde{V_K(L)^*} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{J}$ ist, so ist nach Hilfssatz 2 die durch $\mathfrak{P}$ induzierte Galoisgruppe $\mathfrak{P}$ von H/L isomorph zu $\mathfrak{P}/\mathfrak{J}$, und es gilt :

$$[H : L] = (\mathfrak{P} : \mathfrak{J}),$$

weil H über L außer galoissch ist. Hieraus schließt man ohne weiteres, daß $[K : L] = [K : H][H : L]$ ein Teiler von p^e ist. Ferner gilt :

$$[K: L] = p^e,$$

falls $p \neq \chi(k)$ ist.

Im weiteren wollen wir zeigen, daß $V_K(L)\ (= V_H(H))$ das Kompositum von Z und Z_0 ist. Zum Beweis bilden wir den Ring $L[Z]$, welcher aus L durch Adjunktion von Z entsteht. Weil $L[Z]$ als Rechtsvektorraum über L endlich-dimensional ist, so wird $L[Z]$ ein Schiefkörper. Ferner gilt wegen $L \subseteqq L[Z] \subseteqq H$:

$$V_K(L) \supseteqq V_K(L[Z]) \supseteqq V_K(H) = V_K(L) = V_H(H)\ ;$$

d. h. es ist $V_K(L[Z]) = V_H(H)$. Da H über L äußer galoissch ist, so ist die durch $\mathfrak{P}$ induzierte Automorphismengruppe $\overline{\mathfrak{P}}$ von H die (einzige) Galoisgruppe von H/L. Ist also $\overline{\mathfrak{H}}$ die $L[Z]$ zugeordnete Untergruppe von $\overline{\mathfrak{P}}$, so existiert $\overline{\mathfrak{H}}$ entsprend diejenige $\mathfrak{J}$ enthaltende Untergruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{P}$, deren Fixkörper aus K identisch ist mit $L[Z]$. Ferner gibt es nach Satz 2 eine Z-Basis $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ von $V_K(L) = V_H(H)$ derart, daß $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_s\}$ zu $\mathfrak{J}$ gehört. Nun gilt für ein beliebiges Element v aus $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$:

$$v^{p^a} = z \qquad (z \in Z),$$

weil die Ordnung von $\tilde{v}$ eine Potenz von p ist. Ist also τ ein Automorphismus aus $\mathfrak{H}$, so besteht :

$$(v^\tau)^{p^a} = z.$$

Da v und v^τ zum kommutativen Körper $V_H(H)$ gehören, so ist $(v^\tau v^{-1})^{p^a} = 1$. Hieraus folgt $v^\tau = v$, weil $V_H(H)$ keine primitive p-te Einheitswurzel enthält. Dies zeigt aber, daß $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, also auch $V_K(L)$, zu $L[Z]$ gehört ; d. h.

$$V_K(L) = V_K(L) \frown L[Z] = V_K(L[Z]) \frown L[Z] = \text{Zentrum von } L[Z].$$

Nun wollen wir direkt das Zentrum von $L[Z]$ bestimmen. Dazu sei $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ eine L-Basis von $L[Z]$ aus Z. Gehört dann ein Element $w = \sum_{i=1}^m z_i l_i$ ($l_i \in L$) aus $L[Z]$ zum Zentrum von $L[Z]$, so muß w mit einem beliebigen Element l aus L vertauschbar sein ; d. h. es ist

$$lw = \sum_{i=1}^m z_i l l_i = \sum_{i=1}^m z_i l_i l = wl.$$

Da $z_1, z_2, \ldots, z_s$ über L linear unabhängig sind, so folgen aus $\sum_{i=1}^m z_i(ll_i - l_i l) = lw - wl = 0$ die Gleichungen :

$$ll_i = l_i l \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

d. h. alle $l_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ liegen in Z_0. Also ist w ein Element aus dem Kompositum $Z \cdot Z_0$ von Z und Z_0. Umgekehrt kann man leicht bestätigen, daß $Z \cdot Z_0$ zum Zentrum von $L[Z]$ gehört. Daraus folgt :

$$V_K(L) = Z \cdot Z_0.$$

Bemerkung. Wenn insbesondere Z zu L, also auch zu $V_L(L)$, gehört, so ist nach dem oben Gezeigten $V_K(L) = V_L(L)$. Daher gilt für ein beliebiges Element v aus $V_K(L)$ und für einen beliebigen Automorphismus τ aus $\mathfrak{P}$:

$$\tau \tilde{v} \tau^{-1} = \tilde{v}^\tau = \tilde{v} ;$$

also gehört $\mathfrak{J}$ zum Zentrum von $\mathfrak{P}$. Somit haben wir bewiesen :

Satz 4. *Es sei K eine endliche galoissche Erweiterung über einem Schiefkörper L, und eine Galoisgruppe $\mathfrak{P}$ von K/L sei eine endliche Gruppe von der Ordnung p^e, wo p eine Primzahl bezeichnet. Ferner enthalte das Zentrum von L keine primitive p-te Einheitswurzel. Dann gelten :*

1) *$V_K(L)$ ist das Kompositum der Zentren von K und L. Also ist die Gruppe $\mathfrak{J}$ aller inneren Automorphismen aus $\mathfrak{P}$ abelsch. Wenn insbesondere das Zentrum von K in L enthalten ist, so gehört $\mathfrak{J}$ zum Zentrum von $\mathfrak{P}$.*

2) $[K: L]$ *ist ein Teiler von* p^e. *Wenn* K *über* L *äußer galoissch ist oder wenn* $p \neq \chi(K)$ *ist, so gilt* :

$$[K: L] = p^e.$$

RITERATUR

1. H. CARTAN, Théorie de Galois pour les corps non commutatifs, Ann. Sci. École Norm. Sup., Bd. 64 (1947), 59—77.
2. N. JACOBSON, A note on division rings, Amer. Journ. Math., Bd. 69 (1947), 27—36.
3. N. JACOBSON, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Bd. 37 (1956).
4. F. KASCH, Über den Endomorphismenring eines Vektorraumes und den Satz von der Normalbasis, Math. Ann., Bd. 129 (1953), 447—463.
5. F. KASCH, Bemerkung zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie für Schiefkörper, Archiv. d. Math., Bd. 6 (1954), 420—422.
6. N. NOBUSAWA, An extension of Krull's Galois theory to division rings, Osaka Math. Journ., Bd, 7 (1955), 1—6.

MATHEMATICAL INSTITUTE
COLLEGE OF GENERAL EDUCATION
TOKYO UNIVERSITY.

(*Received October 12, 1959*)