POINCARÉSCHE VERMUTUNG IN TOPOLOGIE

Von KEN'ITI KOSEKI

Ist die 3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, in der jeder geschlossene Weg sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt, mit der 3-Sphäre homöomorph ? Dies ist die berühmte Poincarésche Vermutung[1], die bis heute noch unbewiesen ist.

In dieser Arbeit will ich die Richtigkeit von der Poincaréschen Vermutung beweisen.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine 3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, in der jeder gesclossene Weg sich auf einen Punkt zusammenziehen läßt. $\mathfrak{M}$ ist dann homöomorph mit der 3-Sphäre.*

Bevor wir den Satz 1 beweisen, schicken wir den folgenden Hilfssatz und die einigen Definitionen voraus.

Hilfssatz. *$\mathfrak{M}$ sei 3-Mannigfaltigkeit und nullhomotop. $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ sei ein Kantenweg in $\mathfrak{M}$, wo einige Kanten unter A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$ übereinstimmen mögen. Es gibt dann ein Rechteck R und die Abbildung S von R in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.*

1. *R ist in Dreiecke zerlegt und die Seiten von R sind in Kanten $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $\cdots$, $A'_nA'_1$ untergeteilt, und $S(A'_1A'_2)=A_1A_2$, $\cdots$, $S(A'_nA'_1)=A_nA_1$. Beide Dreiecke auf R haben entweder keine Punkte gemeinsam oder 1, 2, 3 Ecken gemeinsam oder ihre einzige Kante und eine Ecke gemeinsam oder ihren 1, 2 Kanten gemeinsam.*

2. *EFG sei ein Dreieck auf R, so ist $S(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$.*

Beweis. Wir können[2] statt Fundamentalgruppe die Kantenwegegruppe von $\mathfrak{M}$ aufnehmen. $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ ist ein geschlossener Kantenweg. $\mathfrak{M}$ ist nach der Annahme nullhomotop, so kann jeder geschlossene Kantenweg durch folgende elementaren kombinatorischen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden.

(α) Einschalten oder Fortlassen einer hin und zurück durchlaufenen Kante.

(β) Einschalten oder Fortlassen des Randweges eines 2-Simplexes.

Wir nehmen erstens an, daß der Weg $w=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ durch eine einmalige Deformation (α) oder (β) in den Punktweg deformiert werden kann. Wenn w durch eine einmalige Deformation (α) in den Punktweg A_1 deformiert werden kann, so muß w aus den beiden

1) H. Seifert und W. Threlfall. Lehrbuch der Topologie. S. 218.
2) H. Seifert und W. Threlfall. a. a. O. S. 158.

Kanten A_1A_2 und A_2A_1 $(n=2)$ bestehen. A_1A_2B sei ein mit A_1A_2 inzidentes Dreieck in $\mathfrak{M}$.

Wir zerlegen ein Rechteck R in die beiden Dreiecke $A'_1A'_2A'_3(A'_1A'_2=l'_1)$ und $A'_1A'_2A'_3(A'_1A'_2=l'_2)$ derart, daß die Seiten von R in die beiden Kanten l'_1 und l'_2 zerlegt ist und die beiden Dreiecke die beiden Kanten $A'_1A'_3$ und $A'_2A'_3$ gemeinsam haben. Wir bilden die Dreiecke $A'_1A'_2A'_3$ $(A'_1A'_2=l'_1)$ und $A'_1A'_2A'_3(A'_1A'_2=l'_2)$ auf das Dreieck A_1A_2B derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S bezeichnen, $S(l'_1)=S(l'_2)=A_1A_2$, $S(A'_1A'_3)=A_1B$, $S(A'_2A'_3)=A_2B$ ist.

Wenn w durch eine einmalige Deformation (β) in den Punktweg A_1 deformiert werden kann, so muß w aus den drei Kanten A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_1 bestehen und $A_1A_2A_3$ muß ein Dreieck in $\mathfrak{M}$ sein. Wir zerlegen ein Rechteck R in ein einziges Dreieck $A'_1A'_2A'_3$ und die Seiten von R in die drei Kanten $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_3A'_1$. Wir bilden das Dreieck $A'_1A'_2A'_3$ auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S bezeichnen, $S(A'_1A'_2)=A_1A_2$, $S(A'_1A'_3)=A_1A_3$, $S(A'_2A'_3)=A_2A_3$ ist. Also ist der Hilfssatz richtig, wenn w durch eine einmalige Deformation (α) oder (β) in den Punktweg deformiert werden kann.

Wir nehmen nun an, daß, wenn der Weg w durch $p-1$-maligen Defomationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden kann, es ein Rechteck R und die Abbildung S von R in $\mathfrak{M}$ mit den obigen Bedingungen 1 und 2 gibt.

Wir wollen nun beweisen, daß, wenn der Weg w durch die p-maligen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden kann, es ein Rechteck R und die Abbildung S von R in $\mathfrak{M}$ gibt, so daß R und S den obigen Bedingungen 1 und 2 genügen.

Wir nehmen erstens an, daß w durch Fortlassen einer hin und zurück durchlaufenen Kanten $A_iA_{i+1}+A_{i+1}A_{i+2}$ in den Weg w' deformiert wird. Der Weg w' kann durch die $p-1$-maligen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden, und daher ist der Hilfssatz nach der Annahme für w' richtig. Der Weg w' besteht aus den Kanten A_1A_2, A_2A_3, $\cdots$, $A_{i-1}A_i$, $A_{i+2}A_{i+3}$, $\cdots$, A_nA_1. Es gibt dann ein Rechteck R_1 und die Abbildung S_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und S_1 den folgenden Bedingungen genügen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt und die Seiten von R_1 sind in Kanten $A'_1A'_2$, $\cdots$, $A'_{i-1}A'_i$, $A'_{i+2}A'_{i+3}$, $\cdots$, $A'_nA'_1$ zerlegt, und $S_1(A'_1A'_2)=A_1A_2$, $\cdots$, $S_1(A'_{i-1}A'_i)=A_{i-1}A_i$, $S_1(A'_{i+2}A'_{i+3})=A_{i+2}A_{i+3}$, $\cdots$, $S_1(A'_nA'_1)=A_nA_1$.

2. EFG sei ein Dreieck auf R_1, so ist $S_1(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$.

Wir nehmen die Dreiecke $A_iA_{i+1}B_1$, $A_iB_1B_2$, $A_iB_2B_3$, $\cdots$, $A_iB_qA_{i+3}$ aus $\mathfrak{M}$ auf. Es gibt dann ein Rechteck R'_1, das in die Dreiecke $\mathring{A}'_iA'_{i+1}B'_1$, $\mathring{A}'_iB'_1B'_2$, $\cdots$, $\mathring{A}'_iB'_q\mathring{A}'_{i+3}$, $A'_{i+2}A'_{i+1}B'_1$, $A'_{i+2}B'_1B'_2$, $\cdots$, $A'_{i+2}B'_q\mathring{A}'_{i+3}$ zerlegt ist. Wir bilden R'_1 in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S'_1 bezeichnen, $S'_1(\mathring{A}'_i A'_{i+1} B'_1) = S'_1(A'_{i+2} A'_{i+1} B'_1) = A_i A_{i+1} B_1, \cdots, S'_1 (\mathring{A}'_i B'_q \mathring{A}'_{i+3}) = S'_1(A'_{i+2} B'_q \mathring{A}'_{i+3}) = A_i B_q A_{i+3}$ ist. Wir identifizieren nun die beiden Seiten $A'_{i+2}A'_{i+3}$ und $\mathring{A}'_i\mathring{A}'_{i+3}$, so erhalten wir ein Rechteck R, das in Dreiecke zerlegt ist. Wir bilden das R in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S bezeichnen, für ein in R_1 enthaltenes Dreieck EFG es $S(EFG) = S_1(EFG)$ gilt und für ein in R'_1 enthaltenes Dreieck EFG es $S(EFG) = S'_1(EFG)$ gilt.

Wir nehmen zweitens an, daß w durch Einschalten der hin und zurück durchlaufenen Kanten $\widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1} + \widetilde{A}_{i+1}\widetilde{A}_{i+2}$ in den Weg w' deformiert wird. Der Weg w' kann durch die $p-1$-maligen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden, und daher ist der Hilfssatz nach der Annahme für w' richtig. Der Weg w' besteht aus A_1A_2, $A_2A_3, \cdots$, $A_{i-1}A_i$, $\widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1}$, $\widetilde{A}_{i+1}\widetilde{A}_{i+2}$, $A_iA_{i+1}, \cdots$, A_nA_1. Es gibt dann ein Rechteck R_1 und die Abbildung S_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und S_1 den Bedingungen 1 und 2 genügen.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es auf R_1 die beiden Kanten $E\widetilde{A}'_i$ und $E\widetilde{A}'_{i+2}$ gibt und es gilt $S_1(E\widetilde{A}'_i) = S_1(E\widetilde{A}'_{i+2})$. Wenn dies in der Tat nicht der Fall ist, so nehmen wir ein mit der Kante $\widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1}$ inzidentes Dreieck $\widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1}B$ auf. Wir zerlegen ein neues Rechteck R'_1 in vier Dreiecke $\widetilde{A}''_i\widetilde{A}''_{i+1}B'$, $\widetilde{A}''_{i+2}\widetilde{A}''_{i+1}B'$, $\widetilde{A}''_i\widetilde{A}'''_{i+1}B'$, $\widetilde{A}''_{i+2}\widetilde{A}'''_{i+1}B'$ und bilden alle diese Dreiecke auf $\widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1}B$ ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit S'_1 bezeichnen, $S'_1(\widetilde{A}''_i\widetilde{A}''_{i+1}) = \widetilde{A}_i\widetilde{A}_{i+1}$, $S'_1(\widetilde{A}''_iB') = \widetilde{A}_iB$ usw. ist. Wir haben nur zu die beiden Kanten $\widetilde{A}'_i\widetilde{A}'_{i+1}$ von R_1 und $\widetilde{A}''_i\widetilde{A}''_{i+1}$ von R'_1 und die beiden Kanten $\widetilde{A}'_{i+1}\widetilde{A}'_{i+2}$ von R_1 und $\widetilde{A}''_{i+1}\widetilde{A}''_{i+2}$ von R'_1 identifizieren. Also können wir von Anfang an annehmen, daß es auf R_1 die beiden Kanten $E\widetilde{A}'_i$ und $E\widetilde{A}'_{i+2}$ gibt und es gilt $S_1(E\widetilde{A}'_i) = S_1(E\widetilde{A}'_{i+2})$.

Wir bezeichnen den durch $\widetilde{A}'_i\widetilde{A}'_{i+1}$, $\widetilde{A}'_{i+1}\widetilde{A}'_{i+2}$, $E\widetilde{A}'_i$, $E\widetilde{A}'_{i+2}$ berandeten 2-Teilkomplex von R_1 mit R_2, und wir lassen alle zu R_2 gehörigen Dreiecke fort und wir identifizieren die beiden Kanten $E\widetilde{A}'_i$ und $E\widetilde{A}'_{i+2}$, so erhalten wir ein Rechteck R. Wenn EFG ein zu R gehöriges Dreieck ist, so bilden wir das Dreieck EFG auf $S_1(EFG)$ ab. Diese Abbildung von R in $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir mit S. R und S genügen dann offenbar den Bedingungen 1 und 2.

Wir behandeln nun den Fall, wo w durch Fortlassen des Randwegs $A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3}$ in den Weg w' deformiert wird. Der Weg w' kann durch die $p-1$-maligen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden, und daher ist der Hilfssatz nach der Annahme für w' richtig. Der Weg w' besteht aus den Kanten A_1A_2, $A_2A_3, \cdots$, $A_{i-1}A_i$, $A_{i+3}A_{i+4}, \cdots$, A_nA_1. Es gibt dann ein Rechteck R_1 und die Abbildung S_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und S_1 den Bedingungen 1 und 2 genügen.

Wir nehmen die Dreiecke $A_{i+3}A_{i+2}B_1$, $A_{i+3}B_1B_2, \cdots$, $A_{i+3}B_{q-1}B_q$, $A_{i+3}B_qA_{i+4}$ auf. Es gibt ein Rechteck R'_1, das in die Dreiecke $\mathring{A}'_iA'_{i+1}A'_{i+2}$, $\mathring{A}'_iA'_{i+2}B'_1, \cdots$, $\mathring{A}'_iB'_q\mathring{A}'_{i+4}$, $A'_{i+3}A'_{i+2}B'_1, \cdots$, $A'_{i+3}B'_q\mathring{A}'_{i+4}$ zerlegt ist. Wir bilden das Rechteck R'_1 in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S'_1 bezeichnen, $S'_1(\mathring{A}'_iA'_{i+1}A'_{i+2}) = A_iA_{i+1}A_{i+2}$, $S'_1(\mathring{A}'_iA'_{i+2}B'_1) = S'_1(A'_{i+3}A'_{i+2}B'_1) = A_iA_{i+2}B_1, \cdots$, $S'_1(\mathring{A}'_iB'_q\mathring{A}'_{i+4}) = S'_1(A'_{i+3}B'_q\mathring{A}'_{i+4}) = A_iB_qA_{i+4}$ ist.

Wir identifizieren nun die Kanten $A'_iA'_{i+4}$ von R_1 und $\mathring{A}'_i\mathring{A}'_{i+4}$ von R'_1, so erhalten wir ein Rechteck R. Wir bilden nun das Rechteck R in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S bezeichnen, für ein in R_1 enthaltenes Dreieck EFG es $S(EFG) = S'_1(EFG)$ gilt und für ein in R'_1 enthaltenes Dreieck EFG es $S(EFG) = S'_1(EFG)$ gilt. R und S genügen dann den Bedingungen 1 und 2.

Wir behandeln nun den Fall, wo w durch Einschalten des Randwegs $\tilde{A}_i\tilde{A}_{i+1} + \tilde{A}_{i+1}\tilde{A}_{i+2} + \tilde{A}_{i+2}\tilde{A}_i(\tilde{A}_i = A_i)$ in den Weg w' deformiert wird. Der Weg w' kann durch die $p-1$-maligen Deformationen (α) und (β) in den Punktweg deformiert werden, und daher ist der Hilfssatz nach der Annahme für w' richtig. Der Weg w' besteht aus den Kanten $A_1A_2, \cdots$, $A_{i-1}A_i$, $\tilde{A}_i\tilde{A}_{i+1}$, $\tilde{A}_{i+1}\tilde{A}_{i+2}$, $\tilde{A}_{i+2}\tilde{A}_i$, $A_iA_{i+1}, \cdots$, A_nA_1. Es gibt dann ein Rechteck R_1 und die Abbildung S_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und S_1 den Bedingungen 1 und 2 genügen.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß es auf R_1 die die beiden Ecken $\tilde{A}'_i$ und $\tilde{A}'_{i+2}$ verbindende und nicht auf der Seite von R_1 liegende Kante gibt. Andernfalls haben wir nur zu ein Rechteck R'_1, das in die beiden Dreiecke $\tilde{\mathring{A}}'_i\tilde{\mathring{A}}'_{i+1}\tilde{\mathring{A}}'_{i+2}$ und $\tilde{\mathring{A}}'_i\tilde{A}'_{i+1}\tilde{\mathring{A}}'_{i+2}$ zerlegt ist, aufnehmen und die beiden Kanten $\tilde{A}'_i\tilde{A}'_{i+1}$ von R_1 und $\tilde{\mathring{A}}'_i\tilde{\mathring{A}}'_{i+1}$ von R'_1 und die beiden Kanten $\tilde{A}'_{i+1}\tilde{A}'_{i+2}$ von R_1 und $\tilde{\mathring{A}}'_{i+1}\tilde{\mathring{A}}'_{i+2}$ von R'_1 beziehungsweise identifizieren. Daher können wir von Anfang an annehmen, daß es auf R_1 die die Ecken $\tilde{A}'_i$ und $\tilde{A}'_{i+2}$ verbindende und nicht auf der Seite von R_1 liegende Kante gibt.

Das Rechteck R_1 wird durch die Kante $\tilde{A}'_i\tilde{A}'_{i+2}$ in die beiden Rechtecke R'_1 und R''_1 zerlegt und zwar, daß die Seiten von R'_1 in die Kanten $A'_1A'_2, \cdots$, $\tilde{A}'_i\tilde{A}'_{i+2}$, $\tilde{A}'_{i+2}\tilde{A}''_i, \cdots$, $A'_nA'_1$ und die Seiten von R''_1 in die Kanten $\tilde{A}'_i\tilde{A}'_{i+2}$, und $\tilde{A}'_{i+2}\tilde{A}'_{i+1}$, $\tilde{A}'_{i+1}\tilde{A}'_i$ zerlegt sind. Wir identifizieren die beiden Kanten $\tilde{A}'_i\tilde{A}'_{i+2}$ und $\tilde{A}'_{i+2}\tilde{A}''_i$ von R'_1, so erhalten wir ein Rechteck R.

Wir bilden das Rechteck R derart in $\mathfrak{M}$ ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit S bezeichnen, für jedes Dreieck EFG auf R es $S(EFG) = S_1(EFG)$ gilt. R und S genügen dann den Bedingungen 1 und 2.

W. z. b. w.

$\mathfrak{G}$ sei der 2-Komplex, der aus allen 0-, 1- und 2-Simplexen von $\mathfrak{M}$ besteht. $\mathfrak{G}_i$ sei ein 2-Teilkomplex von $\mathfrak{G}$ und stark[1]-zusammenhängend.

Definition I. AB sei eine in $\mathfrak{G}_i$ enthaltene Kante und ABC_1, ABC_2, $\cdots$, ABC_n seien alle mit AB inzidenten und in $\mathfrak{M}$ enthaltenen Dreiecke, so daß ABC_1, ABC_2, $\cdots\cdots$ und ABC_n zyklisch angeordnet sind. D. h. ABC_iC_{i+1} $(i=1, \cdots, n-1)$ und ABC_nC_1 sind die 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Wenn die Dreiecke ABC_i und $ABC_j (i<j)$ in $\mathfrak{G}_i$ enthalten sind, und wenn jedes $ABC_p (i<p<j)$ nicht in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so heisst die Folge ABC_i, ABC_{i+1}, $\cdots\cdots$, ABC_j ein Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ mit der Achse AB, und wir bezeichnen den obigen Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$ und wir sagen, daß jedes $ABC_p (i\leqq p\leqq j)$ in $\mathfrak{P}(AB)$ enthalten ist. Die Dreiecke ABC_i und ABC_j nennen wir Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB)$.

Insbesondere mögen die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB)$ übereinstimmen. In diesem Falle besteht $\mathfrak{P}(AB)$ aus allen mit AB inzidenten Dreiecken in $\mathfrak{M}$ oder aus einem einzigen mit AB inzidenten Dreieck. Wenn $\mathfrak{P}(AB)$ aus einem einzigen Dreieck besteht, so nennen wir $\mathfrak{P}(AB)$ ausgeartet.

Definition II. A sei eine in $\mathfrak{G}_i$ enthaltene Ecke und S_A sei ein aus allen mit A inzidenten und in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Dreiecken bestehender 2-Komplex. Die Kugel mit dem Mittelpunkt A wird durch S_A in endlich viele Komponenten $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$ zerlegt. Alle mit A inzidenten und sowohl in $\mathfrak{M}$ als auch in einer und derselben $\overline{\mathfrak{K}}_i$[2] $(i=1, 2, \cdots, p)$ enthaltenen Dreiecke bezeichnen wir als ein Kegel mit der Spitze A und bezeichnen wir den Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$. $\mathfrak{B}(A)$ ist dann ein 2-Komplex.

Definition III. $\mathfrak{P}(AB)$ sei ein Schnitt in $\mathfrak{G}_i$. Wenn alle in $\mathfrak{P}(AB)$ enthaltenen Dreiecke in einem Kegel $\mathfrak{B}(A)$ enthalten sind, so sagen wir, daß der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ in dem Kegel $\mathfrak{B}(A)$ enthalten ist.

Beweis **des Satzes 1. 1. Schritt.** ABC und ABD seien die beiden die Kante AB gemeinsam enthaltenden Dreiecke in $\mathfrak{M}$. Wir bezeichnen den aus den ABC und ABD bestehenden Komplex mit $\mathfrak{G}_1$. So können wir offenbar $\mathfrak{G}_1$ in den 3-dimensionalen Euklidischen Raum (∞ einschlagend) E^3 einbetten derart, daß $E^3-\mathfrak{G}_1$ homöomorph mit der 3-Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ ist.

Wir bezeichnen die topologische Abbildung von $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf E^3

1) P. Alexandroff. Topologie. S. 189.

2) $\overline{\mathfrak{K}}_i$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{K}_i$.

$-\mathfrak{G}_1$ mit T. Wir zerlegen die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ in Dreiecke $A'B'C'$ $(A'B'=l_1)$, $A'B'C'(A'B'=l_2)$, $A'B'D'(A'B'=l_1)$, $A'B'D'(A'B'=l_2)$. Wir können die Abbildung T derart konstruieren, daß, wenn wir die induzierte Abbildung von $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ auf $\mathfrak{G}_1$ der Einfachheit halber wiederum mit T bezeichnen, so $T(A'B'C',\ A'B'=l_1)=ABC=T(A'B'C',\ A'B'=l_2)$, $T(A'B'D',\ A'B'=l_1)=ABD=T(A'B'D',\ A'B'=l_2)$ ist und die Abbildung T in jedem Dreiecke auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ topologisch ist.

Die beiden Dreiecke ABC und ABD bestimmen die beiden Schnitte in $\mathfrak{G}_1$ $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, die Endedreiecke von denen aus den Dreiecken ABC und ABD bestehen. Alle mit AC bezw. AD bezw. BC bezw. BD inzidenten Dreiecke in $\mathfrak{M}$ bilden den Schnitt $\mathfrak{P}(AC)$ bezw. $\mathfrak{P}(AD)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(BD)$. Wir lassen zu der Kante l_1, l_2, $A'C'$, $B'C'$, $A'D'$, $B'D'$ beziehungsweise den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$, $\mathfrak{P}_2(AB)$, $\mathfrak{P}(AC)$, $\mathfrak{P}(BC)$, $\mathfrak{P}(AD)$, $\mathfrak{P}(BD)$ ordnen.

Alle mit A bezw. B bezw. C bezw. D inzidenten Dreiecke bilden den Kegel $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(C)$ bezw. $\mathfrak{B}(D)$. Wir lassen zu der Ecke A', B', C', D' auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ beziehungsweise den Kegel $\mathfrak{B}(A)$, $\mathfrak{B}(B)$, $\mathfrak{B}(C)$, $\mathfrak{B}(D)$ ordnen.

Es ist dann offenbar, daß, wenn $E'F'$ eine Kante auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ ist und $\mathfrak{P}(EF)$ zu $E'F'$ geordnet und $\mathfrak{B}(E)$ zu E' geordnet ist, so $\mathfrak{P}(EF)$ in $\mathfrak{B}(E)$ enthalten ist.

Wir konstruieren die Folge der 2-Komplexe $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{G}_j$, so daß $\mathfrak{G}_i (i \leqq j)$ aus $\mathfrak{G}_{i-1}$ und einem Dreiecke in $\mathfrak{M}$ besteht und jeder $\mathfrak{G}_i$ starkzusammenhängend und nullhomotop ist. Wir nehmen zunächst an, daß wir $\mathfrak{G}_{i-1}$ in E^3 derart einbetten können, daß jede Komponente von $E^3-\mathfrak{G}_{i-1}$ homöomorph mit der 3-Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ ist und den folgenden Bedingungen genügt.

1. Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3-\mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$ und die topologischen Abbildungen von $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$ mit T_1, T_2, $\cdots$, T_p. Die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, die wir mit S_1, S_2, $\cdots$, S_p bezeichnen, ist trianguliert, wo die beiden Dreiecke in ihren beiden Seiten oder in einem ihren Seite und einer Ecke oder in drei, zwei, einer Ecke inzident sein mögen. Die induzierte[1] Abbildung $T_i (i=1, 2, \cdots, p)$ von S_i auf die Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ bildet jedes Dreieck auf S_i topologisch auf das in der Begrenzung von $\mathfrak{K}_i$ enthaltenes Dreieck ab.

2. Zu jeder Kante, etwa $A'B'$, auf S_i ist ein Schnitt mit der Achse $T_i(A'B')$ geordnet. Wenn $A'B'$ etwa auf S_1 liegt und $A'B'C'$ und $A'B'D'$ die beiden mit $A'B'$ inzidenten Dreiecke auf S_1 sind, und wenn $T_1(A'B')$

---

[1] K. Koseki. Über die Abbildungen von mehrdimensionalen einfachzusammenhängenden Gebieten auf Kugeln und ihre Begrenzungen (1). Jap. Journ. Math.

$= AB$, $T_1(A'B'C') = ABC$ und $T_1(A'B'D') = ABD$ ist, so hat $\mathfrak{P}(AB)$ als Endedreiecke die Dreiecke ABC und ABD.

Umgekehrt sei $\mathfrak{P}(AB)$ ein Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ und ABC und ABD seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB)$. Es gibt dann auf einer bestimmten unter $S_1, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, eine Kante $A'B'$ und die Dreiecke $A'B'C'$ und $A'B'D'$ von der Art, daß $T_1(A'B') = AB$, $T_1(A'B'C') = ABC$, $T_1(A'B'D') = ABD$ ist, und daß zu $A'B'$ der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ geordnet ist. In dieser Weise sind alle nicht ausgearteten Schnitte in $\mathfrak{G}_{i-1}$ und alle Kanten auf $S_1, S_2, \cdots, S_p$ $1-1$ zugeordnet.

Wenn $ABC = ABD$, so ist die Kante AB frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$. Umgekehrt, ist Kante AB in $\mathfrak{G}_{i-1}$ frei, so sind $T_1(A'B'C') = T_1(A'B'D')$.

3. Zu jeder Ecke, etwa A', auf S_j ist ein Kegel $\mathfrak{B}(A)$ mit der Spitze $T_j(A') = A$ geordnet. Wenn A' etwa auf S_1 liegt und das Dreieck $A'B'C'$ mit der Ecke A' inzident ist, so ist $T_1(A'B'C')$ in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten.

Umgekehrt sei $\mathfrak{B}(A)$ ein Kegel in $\mathfrak{G}_{i-1}$ und ein Dreieck ABC sei sowohl in $\mathfrak{G}_{i-1}$ als auch in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten. Es gibt dann auf einer bestimmten unter $S_1, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, eine Ecke A' und das Dreieck $A'B'C'$ von der Art, daß $T_1(A') = A$ und $T_1(A'B'C') = ABC$ ist, und daß zu A' der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ geordnet ist. In dieser Weise sind alle Kegel in $\mathfrak{G}_{i-1}$ und alle Ecken auf $S_1, \cdots, S_p$ $1-1$ zugeordnet.

4. $A'B'$ sei eine Kante auf S_j und $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{B}(A)$ sei zu der Kante $A'B'$ bezw. der Ecke A' geordnet. $\mathfrak{P}(AB)$ ist dann in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten.

5. Es seien A_1A_2, A_2A_3 die sowohl in $\mathfrak{G}_{i-1}$ als auch in einem Kegel $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen Kanten[1] von der Art[2], daß A_1A_2 und A_2A_3 durch die Folge der in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen und nicht noch in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthaltenen Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2$, $\cdots$, $A_2C_lA_3$ verbunden werden können, wo die Kanten A_2C_1, A_2C_2, $\cdots$, A_2C_l nicht noch in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten und je zwei von A_2C_1, A_2C_2, $\cdots$, A_2C_l voneinander verschieden sind. Durch die obige Folge der Dreiecke wird $\mathfrak{B}(A_2)$ offenbar in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und $\mathfrak{B}_2(A_2)$ zerlegt.

Es gibt auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, die Ecke A'_2 und die Kanten $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$ von der Art, daß $T_1(A'_1A'_2) = A_1A_2$, $T_1(A'_2A'_3) = A_2A_3$ ist und $A_1A_2C_1$ bezw. $A_2C_lA_3$ in dem zu $A'_1A'_2$ bezw. $A'_2A'_3$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ enthalten ist. $\mathfrak{B}(A_2)$ ist dann nach der Bedingung 4 zu A'_2 geordnet. Wir nehmen an, daß $A'_1A'_2$ und $A'_2A'_3$ nicht miteinander übereinstimmen. Die folgende Bedingung ist dann erfüllt.

Wenn ein in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthaltenes Dreieck A_2CD sowohl in $\mathfrak{B}_1(A_2)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A_2)$ enthalten ist und die Kante A_2D weder mit A_2A_1 noch mit A_2A_3

---

1) Die Kanten A_2A_1 und A_2A_3 mögen miteinander übereinstimmen.

2) Es mag sein, daß $A_1A_2A_3$ ein Dreieck bildet.

übereinstimmt, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2C'D'$ und $A'_2C''D''$ und die beiden Kantenwege $A'_2D'+A'_2D''$ und $A'_2A'_1+A'_2A'_3$ sich kreuzen.

Wenn ein in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthaltenes Dreieck A_2CD in $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und nicht in $\mathfrak{B}_2(A_2)$ enthalten ist, so gibt es auf S_1 ein Dreieck $A'_2C'D'$ und es gibt auf einer unter S_1, $S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_j, ein Dreieck $\mathring{A}'_2C''D''$, so daß $T_1(A'_2C'D') = T_j(\mathring{A}'_2C''D'') = A_2CD$ ist. In diesem Falle, auch wenn $\mathring{A}'_2$ mit A'_2 übereinstimmt, können die beiden Kantenwege $A'_2D' + A'_2D''$ und $A'_2A'_1 + A'_2A'_3$ nicht sich kreuzen.

Wenn die beiden in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthaltenen Dreiecke A_2CD und A_2EF in $\mathfrak{B}_1(A_2)$ enthalten sind, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2C'D'$ und $A'_2E'F'$, so daß $T_1(A'_2E'F') = A_2EF$ und $T_1(A'_2C'D') = A_2CD$ und ein zu A'_2C' bezw. A'_2E' geordneter Schnitt $\mathfrak{P}(A_2C)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2E)$ in $\mathfrak{B}_1(A_2)$ enthalten ist. Die beiden Kantenwege $A'_2A'_1 + A'_2A'_3$ und $A'_2C' + A'_2E'$ können dann keineswegs sich kreuzen, wenn je zwei von $A'_2A'_1$, $A'_2A'_3$, A'_2C', A'_2E' voneinander verschieden sind.

6. Es sei $A'B'C'$ ein Dreieck auf S_1 und $T_1(A'B'C') = ABC$, und die beiden mit ABC inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$ seien $ABCD$ und $ABCE$. Zu $A'B'C'$ ist ein bestimmtes 3-Simplex von den beiden $ABCD$ und $ABCE$, etwa $ABCD$, geordnet, und zwar, daß das Dreieck ABD bezw. BCD bezw. CAD in dem zu der Kante $A'B'$ bezw. $B'C'$ bezw. $C'A'$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ enthalten ist.

Es sei ABC ein Dreieck in $\mathfrak{G}_{i-1}$ und $ABCD$ und $ABCE$ seien die beiden mit ABC inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Es gibt dann genau die beiden Dreiecke $A'B'C'$ auf S_j und $A''B''C''$ auf S_k, so daß $T_j(A'B'C') = ABC$ und $T_k(A''B''C'') = ABC$ ist, wo S_j und S_k miteinander übereinstimmen mögen.

Wenn $ABCD$ zu $A'B'C'$ geordnet ist, so ist $ABCE$ zu $A''B''C''$ geordnet.

7. $T_1(S_1)$ ist offenbar ein 2-Komplex in $\mathfrak{M}$. Es gibt ein 3-Teilkomplex $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, so daß $T_1(S_1)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$ bildet und ein zu einem auf S_1 liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist. $\mathfrak{M}_1$ mag mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmen.

Wir haben bereits $\mathfrak{G}_1$ in E^3 eingebettet. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{G}_1$ erfullt sind.

Wir wollen nun beweisen, daß wir $\mathfrak{G}_i$ auch in E^3 einbetten können derart, daß jede Komponente von $E^3 - \mathfrak{G}_i$ homöomorph mit der 3-Kugel ist und die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt sind.

$\mathfrak{G}_i$ ist die Vereinigung von $\mathfrak{G}_{i-1}$ und einem Dreieck ABC, und wir unterscheiden nun die folgenden drei Fälle.

1. *Fall.* Die beiden Kanten unter AB, AC und BC, etwa AB und AC, sind in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten und die übrige Kante BC ist nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$

enthalten,

2. *Fall.* Nur eine einzige Kante von AB, AC und BC, etwa BC, ist in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten.

3. *Fall.* Drei Kanten AB, AC und BC sind in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten.

Wir behandeln erstens den

1. *Fall.* Das Dreieck ABC ist in nur einem bestimmten Schnitte $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(AC)$ mit der Achse AB bezw. AC in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Nach der Bedingung 2 gibt es auf einer bestimmten unter S_1, $S_2, \cdots$, S_p, etwa auf S_j, eine Kante $A'B'$ und $\mathfrak{P}(AB)$ ist zu $A'B'$ geordnet. Ebenfalls gibt es eine Kante $\mathring{A}'C'$ auf S_k, so daß $\mathfrak{P}(AC)$ zu $\mathring{A}'C'$ geordnet ist.

Wir bezeichnen den zu A' bezw. $\mathring{A}'$ geordneten Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(A)$. Nach der Bedingung 4 ist ABC sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. Da ABC nicht noch in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so müssen $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ miteinander übereinstimmen. Folglich muß $A' = \mathring{A}'$ und $S_j = S_k$ sein. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß $S_j = S_1$ ist. Also gibt es auf S_1 die beiden Kanten $A'B'$ und $A'C'$, und sowohl der zu $A'C'$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(AC)$ als auch der zu $A'B'$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ enthält das Dreieck ABC.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt von der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ mit O, und wir verbinden jeden Punkt y auf $A'B'+A'C'$ mit dem Punkte O, und diese die beiden Punkte O und y verbindende Strecke (als Punktmenge betrachtet) bezeichnen wir mit (O, y) und die Vereinigungsmenge $\sum(O, y)$ $(y \in A'B'+A'C')$ mit $(O, A'B'+A'C')$.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Kanten $A'B'$ und $A'C'$ auf der Ebene $x_3 = 0$ liegen. Die Menge $(O, A'B'+A'C')$ (und daher die Menge $T_1\{(O, A'B'+A'C')\}$ auch) ist homöomorph mit einem Dreieck. Die Differenz $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(O, A'B'+A'C')$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$. Die Menge $\mathfrak{P}$ ist dann offenbar homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$.

Wir können eine topologische Abbildung T'_1 von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{P}$ derart konstruieren, daß die induzierte Abbildung von T'_1, die wir wiederum mit T'_1 bezeichnen, die beiden Dreiecke $C''A''B''$ und $C''A'''B''$ auf das Dreieck $(O, A'B'+A'C')$ abbildet und übrigens die Abbildung T'_1 die Menge $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}-(C''A''B''+C''A'''B'')$ einundeindeutig auf die Menge $\{[\text{die Begrenzung von } \mathfrak{P}]-(O, A'B'+A'C')\}$ abbildet.

$T_1\{(O, A'B'+A'C')\}$ bezeichnen wir mit ABC, und wir setzen $T_1(A'B') = AB$, $T_1((O, B')+(O, C')) = BC$, $T_1(A'C') = AC$ und $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}_{i-1} + ABC$. Also haben wir den Komplex $\mathfrak{G}_i$ in E^3 eingebettet.

$E^3 - \mathfrak{G}_i = (\mathfrak{K}_1 - ABC) + \mathfrak{K}_2 + \cdots + \mathfrak{K}_p$ und $T_1(\mathfrak{P}) = \mathfrak{K}_1 - ABC$, und die Abbildung $T_1T'_1$ bildet topologisch die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1 - ABC$ ab.

Bedingung 1. Wir bezeichnen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ mit S'_1. Die Bedingung 1 ist offenbar für die Abbildungen $T_1 T'_1$, $T_2, \cdots, T_p$ und die Sphären S'_1, $S_2, \cdots, S_p$ erfüllt.

Bedingung 2. Es sei l' eine Kante auf S'_1, und wir nehmen erstens an, daß $l' = C''A''$ ist. $T'(C''A'') = C'A'$, und den zu $C'A'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{S}_{i-1}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(CA)$.

CAD und CAE seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(CA)$. Wenn CAD und CAE nicht miteinander übereinstimmen, so wird der Schnitt $\mathfrak{P}(CA)$ durch das Dreieck CAB in die beiden Schnitte in $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{P}_1(CA)$ und $\mathfrak{P}_2(CA)$ zerlegt, und zwar, daß $\mathfrak{P}_1(CA)$ als Endedreiecke die beiden CAB und CAD und $\mathfrak{P}_2(CA)$ als Endedreiecke die beiden CAB und CAE hat.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $C'A'D'$ und $C'A'E'$, so daß $T_1(C'A'D') = CAD$ und $T_1(C'A'E') = CAE$. Das mit $C''A''$ inzidente Dreieck auf S'_1 ist dann $C''A''D''$ oder $C''A''E''$, wo $T'_1(C''A''D'') = C'A'D'$ und $T'_1(C''A''E'') = C'A'E'$. Jenachdem das mit $C''A''$ inzidente Dreieck auf S'_1 mit $C''A''D''$ oder $C''A''E''$ übereinstimmt, läßt sich $\mathfrak{P}_1(CA)$ oder $\mathfrak{P}_2(CA)$ zu der Kante $C''A''$ ordnen.

Wenn $CAD = CAE$ ist, so ist die Kante CA in $\mathfrak{S}_{i-1}$ frei. So gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $C'A'D'$ und $C'A'E'$, so daß $T_1(C'A'D') = CAD$ und $T_1(C'A'E') = CAE$.

$CADF$ und $CADG$ seien die beiden mit CAD inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Mindestens eine von den beiden Kanten AD und CD, etwa AD, ist nicht frei in $\mathfrak{S}_{i-1}$, da $\mathfrak{S}_{i-1}$ stark-zusammenhängend ist. So stimmt $A'D'$ nicht mit $A'E'$ überein, und eines von den beiden $CADF$ und $CADG$, etwa $CADF$, ist zu $C'A'D'$ und das andere $CADG$ ist zu $C'A'E'$ geordnet.

Die beiden Dreiecke ACD und ABC bestimmen genau die beiden Schnitte in $\mathfrak{S}_i$ mit der Achse AC. Mindestens einer von diesen beiden Schnitte enthält das Dreieck ACF. Wenn ACF nicht mit ACB übereinstimmt, so enthält einer und nur einer von den beiden Schnitten das Dreieck ACF. Diesen das Dreieck ACF enthaltenden Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(AC)$. Wenn ACF mit ACB übereinstimmt, so enthalten die beiden durch ACD und ACB bestimmten Schnitte das Dreieck ACF. Wir bezeichnen dann den aus ACD und ACB bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AC)$.

Den anderen, durch ACD und ACB bestimmten, Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_2(AC)$. Das Dreieck ACG ist dann offenbar in $\mathfrak{P}_2(AC)$ enthalten.

Jenachdem $A''C''D''$ oder $A''C''E''$ mit $A''C''$ inzident ist, läßt sich $\mathfrak{P}_1(AC)$ oder $\mathfrak{P}_2(AC)$ zu $A''B''$ ordnen.

Wenn $l' = A''B''$ oder $= A'''B''$ oder $= A'''C''$ ist, so verläuft Diskussion ganz analog mit der obigen.

Wenn $l' = B''C''$ ist, so läßt sich der aus allen in $\mathfrak{M}$ enthaltenen und mit BC inzidenten Dreiecken bestehende Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ zu $B''C''$ ordnen.

Wenn $l' \neq A''C''$, $A'''C''$, $A''B''$, $A'''B''$, $B''C''$ ist, und wenn $T'_1(l') = l_1$ und der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu l_1 geordnet ist, so läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ in $\mathfrak{G}_i$ auch zu l' ordnen.

Wenn m' eine Kante auf $S_i (i = 2, \cdots, p)$, und wenn der Schnitt $\mathfrak{P}(T_i(m'))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu m' geordnet ist, so läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}(T_i(m'))$ in $\mathfrak{G}_i$ zu m' ordnen.

Also ist die Bedingung 2 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 3. Es sei K'' eine Ecke auf S'_1. Wenn K'' nicht mit A'' oder A''' übereinstimmt, und wenn $T'_1(K'') = K'$ ist, so läßt sich der zu K' geordnete Kegel mit der Spitze $T_1(K')$ zu der Ecke K'' ordnen.

Wir nehmen an, daß K'' mit A'' übereinstimmt und ein Kegel $\mathfrak{B}(A)$ zu der Ecke $T'_1(A'') = A'$ geordnet ist. $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt.

Es sei ADE ein in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthaltenes Dreieck, das in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und nicht mit ABC übereinstimmt. ADE ist dann in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten. Daher gibt es auf S_1 ein Dreieck $A'D'E'$, so daß $T_1(A'D'E') = ADE$ ist. Mindestens eine von den beiden Kanten AD und AE, etwa AD, kann nicht mit ABC inzident sein.

Wenn die Kante AD frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'D'E'$ und $A'D'E''$, und $T_1(A'D'E') = T_1(A'D'E'') = ADE$. In diesem Falle lassen wir zu der Ecke A'' oder A''' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen, jenachdem es $A''D''E''_0$ oder $A'''D''E''_0$ gibt und es $T'_1(A''D''E''_0) = A'D'E'$ oder $T'_1(A'''D''E''_0) = A'D'E'$ gilt.

Wir nehmen an, daß die Kante AD nicht frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist. Wenn ADE in $\mathfrak{B}_2(A)$ auch enthalten ist, so gibt es auf S_1 nach der Bedingung 5 die beiden Dreiecke $A'D'E'$ und $A'D''E''$ und die beiden Kantenwege $A'D' + A'D''$ und $A'B' + A'C'$ kreuzen sich.

$ADEF$ und $ADEG$ seien die beiden mit ADE inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Da die Bedingung 6 für $\mathfrak{G}_{i-1}$ gilt, so ist eines von den beiden $ADEF$ und $ADEG$, etwa $ADEF$, zu $A'D'E'$ geordnet und das andere $ADEG$ ist zu $A'D''E''$ geordnet. Wenn mindestens eines von den beiden ADF und ADG, etwa ADG, nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so ist es leicht einzusehen, daß ADG in einem und nur einem von $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_2(A)$, enthalten ist. Wenn sowohl ADF als auch ADG in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist und ADF sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist, so ist es leicht einzusehen, daß ADG in einem und nur einem von $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_2(A)$, enthalten ist.

Wir lassen zu der Ecke A'' oder A''' den Kegel $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen, jenachdem es auf S'_1 das Dreieck $A''D''_0E''_0 (T'_1(A''D''_0E''_0) = A'D''E'')$ oder das Dreieck $A'''D''_0E''_0 (T'_1(A'''D''_0E''_0) = A'D''E'')$ gibt. Wenn $\mathfrak{B}_2(A)$ zu

A''' sich ordnen läßt, so lassen wir zu A'' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen.

Wir nehmen nun an, daß ADE nicht in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist. Es gibt auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa S_j, ein Dreieck $\mathring{A}''D''E''$ und $T_j(\mathring{A}''D''E'') = ADE$. Nach der Bedingung 5 können die beiden Kantenwege $A'D' + A'D''$ und $A'B' + A'C'$ nicht sich kreuzen, auch wenn A''_0 mit A' übereinstimmt.

Wir lassen zu der Ecke A'' oder A''' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen, jenachdem es auf S'_1 das Dreieck $A''D''E''(T'_1(A''D''E'') = A'D'E')$ oder das Dreieck $A'''D''E''(T'_1(A'''D''E'') = A'D'E')$ gibt. Wenn $\mathfrak{B}_1(A)$ zu A'' sich ordnen läßt, so lassen wir zu A''' den Kegel $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen.

Wenn K'' auf $S_j(j = 2, \cdots, p)$ liegt, und wenn der Kegel $\mathfrak{B}(T_j(K''))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu K'' geordnet ist, so läßt sich der Kegel $\mathfrak{B}(T_j(K''))$ in $\mathfrak{G}_i$ auch zu K'' ordnen.

Also ist die Bedingung 3 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 4. $D'E'$ sei eine Kante auf S'_1 und $\mathfrak{P}(DE)$ bezw. $\mathfrak{B}(D)$ sei zu der Kante $D'E'$ bezw. der Ecke D' geordnet. Wir nehmen erstens an, daß D' mit A'' übereinstimmt. DEF sei in $\mathfrak{P}(DE)$ enthalten. DEG und DEH seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(DE)$. Sowohl DEG als auch DEH ist in dem zu A'' geordneten Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist, so muß das Dreieck DEF auch in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten sein.

Wenn D' mit A''' übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog mit der obigen.

Wenn D' mit B'' übereinstimmt, und wenn $D'E'$ nicht mit $B''C''$ übereinstimmt, so ist sowohl DEG als auch DEH in dem zu $T'_1(B'')$ geordneten Kegel $\mathfrak{B}(B)$ enthalten ist, so muß DEF auch in dem zu B'' geordneten Kegel $\mathfrak{B}(B)$ enthalten sein. Wenn $D'E'$ mit $B''C''$ übereinstimmt, so ist DEF offenbar in $\mathfrak{B}(B)$ enthalten.

Wenn D' mit C'' übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog. Also is die Bedingung 4 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 5. Es seien A_1A_2 und A_2A_3 die sowohl in $\mathfrak{G}_i$ als auch in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen Kanten von der Art, daß A_1A_2 und A_2A_3 durch die Folge der in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen und nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2, \cdots, A_2C_lA_3$ verbunden werden können, wo die Kanten $A_2C_1, A_2C_2, \cdots, A_2C_l$ nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthalten sind und je zwei von $A_2C_1, A_2C_2, \cdots, A_2C_l$ voneinander verschieden sind. Durch die obigen Folge der Dreiecke wird $\mathfrak{B}(A_2)$ offenbar in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A_2)$ und $\mathfrak{B}''(A_2)$ zerlegt.

Es gibt auf einer unter $S'_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S'_1, die Ecke A''_2 und die Kanten $A''_1A''_2$ und $A''_2A''_3$ von der Art, daß $\mathfrak{B}(A_2)$ zu A''_2 geordnet ist und $T_1T'_1(A''_1A''_2) = A_1A_2$ und $T_1T'_1(A''_2A''_3) = A_2A_3$ ist, und daß das Dreieck $A_2A_1C_1$ bezw. $A_2C_lA_3$ in dem zu der Kante $A''_1A''_2$ bezw. $A''_2A''_3$

geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ enthalten ist.

Wir nehmen erstens an, daß die Ecke A''_2 mit A'' übereinstimmt und $\mathfrak{B}_1(A)$ zu A'' geordnet ist. A_2DE sei ein in $\mathfrak{S}_i$ enthaltenes Dreieck, das sowohl in $\mathfrak{B}'(A)$ als auch in $\mathfrak{B}''(A)$ enthalten ist, und zwar, daß die Kante A_2D weder mit A_2A_1 noch mit A_2A_3 übereinstimmt. ABC ist offenbar in nur einem von $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)$, etwa in $\mathfrak{B}''(A)$, enthalten. Daher kann A_2DE nicht mit ABC übereinstimmen, und A_2DE ist damit bereits in $\mathfrak{S}_{i-1}$ enthalten.

Der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ is zu $T'_1(A''_2) = A'_2$ geordnet, und $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt. Durch die Folge $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2, \cdots$, $A_2C_iA_3$ wird der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ in $\mathfrak{S}_{i-1}$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)+\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt. Da die Bedingung 5 nach der Annahme für $\mathfrak{S}_{i-1}$ erfüllt ist, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2D'_0E'_0$, und die beiden Kantenwege $A'_2D' + A'_2D'_0$ und $A'_1A'_2 + A'_2A'_3$ kreuzen sich, wo $T_1(A'_2D'E') = T_1(A'_2D'_0E'_0) = A_2DE$ und $T'_1(A''_1A''_2) = A'_1A'_2$ $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ ist.

Es gibt auf S'_1 die Kanten $A''_1A''_2$ und $A''_2A''_3$ und die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2D''_0E''_0$ derart, daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(A''_2D''_0E''_0) = A'_2D'_0E'_0$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D''+A''_2D''_0$ und $A''_1A''_2+A''_2A''_3$ kreuzen sich offenbar.

Wir nehmen nun an, daß A_2DE in einem von den beiden $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)$, etwa in $\mathfrak{B}'(A)$, enthalten ist. Wenn A_2DE mit ABC übereinstimmt, so gibt es auf S'_1 das Dreieck $A''B''C''$ von der Art, daß $T_1T'_1(A''B''C'') = ABC$ ist. Wenn A_2DE nicht mit ABC übereinstimmt, so ist A_2DE bereits in $\mathfrak{S}_{i-1}$ enthalten. ABC ist offenbar in nur einem von $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)$, etwa in $\mathfrak{B}''(A)$, enthalten. Durch die Folge der Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2, \cdots$, $A_2C_iA_3$ wird der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ in $\mathfrak{S}_{i-1}$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)+\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt. Es gibt auf S_1 bezw. S_j das Dreieck $A'_2D'E'$ bezw. $\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ und die Kanten $A'_2A'_1$ und $A'_2A'_3$, derart daß $T_1(A'_2D'E') = T_j(\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}') = A_2DE$, $T'_1(A''_2A''_1) = A'_2A'_1$, $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ ist. Die beiden Kantenwege $A'_2D' + \mathring{A}'_2\mathring{D}'$ und $A'_1A'_2 + A'_2A'_3$ kreuzen dann nicht sich, auch wenn $\mathring{A}'_2 = A'_2$ ist.

Wir nehmen an, daß $\mathring{A}'_2 = A'_2$ ist. Es gibt auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $\mathring{A}''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$ derart, daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(\mathring{A}''_2\mathring{C}''\mathring{D}'') = \mathring{A}'_2\mathring{C}'\mathring{D}'$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D'' + \mathring{A}''_2\mathring{D}''$ und $A''_1A''_2 + A''_2A''_3$ kreuzen nicht sich.

Es seien A_2DE und A_2FG die beiden, sowohl in $\mathfrak{S}_i$ als auch in $\mathfrak{B}''(A)$ enthaltenen Dreiecke. Wenn die beiden Dreiecke A_2DE und A_2FG bereits in $\mathfrak{S}_{i-1}$ enthalten sind, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2F'G'$, so daß $T_1(A'_2D'E') = A_2DE$ und $T_1(A'_1F'G') = A_2FG$ ist, und daß ein zu A'_2D' bezw. A'_2F' geordneter Schnitt in $\mathfrak{B}''(A)$ enthalten ist. Die beiden Kantenwege $A'_2D'+A'_2F'$ und $A'_1A'_2+A'_2A'_3$ keineswegs kreuzen sich, wenn je zwei von A'_2D', A'_2F', $A'_2A'_1$, $A'_2A'_3$ voneinander verschieden sind.

Es gibt auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2F''G''$ und die beiden Kanten $A''_1A''_2$ und $A''_2A''_3$, so daß $T'_1(A''_2D''E'')=A'_2D'E'$, $T'_1(A''_2F''G'')=A'_2F'G'$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D''_2+A''_2F''$ und $A''_1A''_2+A''_2A''_3$ keineswegs kreuzen sich, wenn je zwei von A''_2D'', A''_2F'', $A''_2A''_1$, $A''_2A''_3$ voneinander verschieden sind.

Wenn eines von den beiden A_2DE und A_2FG, etwa A_2DE, mit ABC übereinstimmt, so nehmen wir das auf S'_1 liegende und mit $A''C''$ oder mit $A''B''$, etwa mit $A''B''$, inzidente Dreieck $A''B''H''$ auf, so daß $T_1T'_1(A''B''H'')=ABH$ ist und ABH in $\mathfrak{B}''(A)$ enthalten ist. Wir haben nur zu den Fall behandeln, in dem ABH nicht mit A_2FG übereinstimmt.

Es gibt auf S'_1 nach dem obigen die beiden Dreiecke $A''_2F''G''$ und $A''B''H''$ und die beiden Kanten $A''_1A''_2$ und $A''_2A''_3$, so daß $T_1T'_1(A''_2F''G'')=A_2FG$, $T_1T'_1(A''B''H'')=ABH$ ist, und daß die beiden Kantenwege $A''_2B''+A''_2F''$ und $A''_1A''_2+A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen. Folglich können die beiden Kantenwege $A''_2D''+A''_2F''$ und $A''_1A''_2+A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen, wenn je zwei von A''_2D'', A''_2F'', $A''_2A''_1$, $A''_2A''_3$ voneinander verschieden sind.

Wenn $A''_2=A'''$ ist, so läuft Diskussion ganz analog.

Wir nehmen zweitens an, daß die Ecke A''_2 mit B'' übereinstimmt und $\mathfrak{B}(B)$ zu B'' geordnet ist. Wenn weder A_2A_1 noch A_2A_3 mit BC übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog mit der obigen. Wenn eine von den beiden A_2A_1 und A_2A_3, etwa A_2A_1, mit BC übereinstimmt, so wird $\mathfrak{B}(B)$ durch die Folge der Dreiecke A_2AC, $A_2A_1C_1$, $A_2C_1C_2$, $\cdots$, $A_2C_tA_3$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(B)$ und $\mathfrak{B}_2(B)$ zerlegt.

Wir nehmen an, daß ein in $\mathfrak{G}_i$ enthatenes Dreieck A_2DE sowohl in $\mathfrak{B}_1(B)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(B)$ enthalten ist. Wenn A_2DE nicht mit BCA übereinstimmt, so ist A_2DE bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Es gibt auf S_1 die Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ und die Kanten $A'_2A'_3$ und A'_2A', so daß $T_1(A'_2D'E')=T_1(A'_2\mathring{D}'\mathring{E}')=A_2DE$, $T_1(A'_2A'_3)=A_2A_3$, $T_1(A'_2A')=A_2A$ ist, und daß ein zu der Kante $A'_2A'_3$ bezw. A'_2A' geordneter Schnitt $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2A)$ das Dreieck $A_2C_tA_3$ bezw. BAC enthält. Wenn die Kante A_2D weder mit BA noch mit A_2A_3 übereinstimmt, so kreuzen die beiden Kantenwege $A'_2A'_3+A'_2A'$ und $A'_2D'+A'_2\mathring{D}'$ sich.

Es gibt daher auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$ und die Kanten $A''_2A''_3$ und A''_2A'', so daß $T'_1(A''D''E'')=A'_2D'E'$, $T'_1(A''_2\mathring{D}''\mathring{E}'')=A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$, $T'_1(A''_2A''_3)=A'_2A'_3$, $T'_1(A''_2A'')=A'_2A'=B'A'$ ist.

Die beiden Kantenwege $A''_2A''_3+A''_2A''$ und $A''_2D''+A''_2\overset{\circ}{D}''$ kreuzen sich. Folglich kreuzen die beiden Kantenwege $A''_2A''_3+B''C''$ und $A''_2D''+A''_2\overset{\circ}{D}''$ sich.

Wenn die Kante A_2D mit BA oder mit A_2A_3 übereinstimmt und die Kante A_2E weder mit BA noch mit A_2A_3 übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog.

Wir nehmen nun an, daß A_2DE mit BCA übereinstimmt. Es ist leicht einzusehen, daß die Katenwege $B''C''+A''_2A''_3$ und $B''A''+B''A'''$ sich kreuzen.

Auf ganz analoge Weise können wir beweisen, daß, wenn ein in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenes Dreieck A_2DE in $\mathfrak{B}_1(B)$ und nicht in $\mathfrak{B}_2(B)$ enthalten ist, und wenn für die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\overset{c}{D}''\overset{c}{E}''$ $T_1T'_1(A''_2D''E'')=T_1T'_1(A''_2\overset{\circ}{D}''\overset{\circ}{E}'')=A_2DE$ gilt, so die beiden Kantenwege $A''_2D''+A''_2\overset{\circ}{D}''$ und $A''_2A''_1+A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen können. Ebenfalls können wir beweisen, daß, wenn die beiden Dreiecke A_2DE und A_2FG in $\mathfrak{B}(B)$ enthalten sind, und wenn für $A''_2D''E''$ und $A''_2F''G''$ $T_1T'_1(A''_2D''E'')=A_2DE$ und $T_1T'_1(A''_2F''G'')=A_2FG$ gilt und ein zu A''_2D'' bezw. A''_2F'' geordneter Schnitt in $\mathfrak{B}_1(B)$ enthalten ist, so die beiden Kantenwege $A''_2D''+A''_2F''$ und $A''_2A''_1+A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen können, wenn je zwei von A''_2D'', A''_2F'', $A''_2A''_1$, $A''_2A''_3$ voneinander verschieden sind.

Also ist die Bedingung 5 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 6. Es sei $A''_1A''_2A''_3$ ein Dreieck auf S'_1 und $T_1T'_1(A''_1A''_2A''_3)=A_1A_2A_3$. Wenn $A_1A_2A_3$ und ABC nicht miteinander übereinstimmen, so setzen wir $T'_1(A''_1A''_2A''_3)=A'_1A'_2A'_3$ und wir lassen zu $A''_1A''_2A''_3$ das zu $A'_1A'_2A'_3$ geordnete 3-Simplex ordnen.

Wir nehmen nun an, daß $A''_1A''_2A''_3$ und $A''B''C''$ miteinander übereinstimmen. $ABCD$ und $ABCE$ seien die beiden, mit ABC inzidenten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Wir setzen $T'_1(A''B'')=A'B'$ und $T'_1(A''C'')=A'C'$, und wir bezeichnen den zu $A'B'$ bezw. $A'C'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(AC)$ und den zu $A''B''$ bezw. $A''C''$ bezw. $A'''B''$ bezw. $A'''C''$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(AC)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(AC)$.

Wenn sowohl ABD als auch ABE nicht in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so ist eines und nur eines von den beiden ABD und ABE, etwa ABD, in $\mathfrak{P}_1(AB)$ enthalten. Wir lassen dann zu $A''B''C''$ bezw. $A'''B''C''$ das Simplex $ABCD$ bezw. $ABCE$ ordnen. Wenn ABD bereits in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AB)$, aus den beiden Dreiecken ABD und ABC. Wir lassen dann zu $A''B''C''$ bezw. $A'''B''C''$ das Simplex $ABCD$ bezw. $ABCE$ ordnen.

Wir nehmen nun an, daß sowohl ABD als auch ACD nicht in $\mathfrak{G}_i$

enthalten ist. Da ABC und ACD nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so ist ACD wie ACB in $\mathfrak{P}(AC)$ enthalten. Folglich ist ACD in $\mathfrak{P}_1(AC)$ oder $\mathfrak{P}_2(AC)$ enthalten. Wenn ABD in $\mathfrak{P}_1(AB)$ enthalten ist, so ist ABD in dem zu A'' geordneten Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten. ABD und ACD sind offenbar in einem und demselben Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten. Wenn ACD in $\mathfrak{P}_2(AC)$ enthalten ist, so muß ACD in dem zu A''' geordneten Kegel enthalten sein. Da ACD nicht in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so kann ACD nicht in den beiden voneinander verschiedenen Kegeln enthalten sein. Folglich ist ACD in $\mathfrak{P}_1(AC)$ enthalten.

Wir nehmen zweitens an, daß ABD nicht in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und ACD aber bereits in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist. Wenn ABD in $\mathfrak{P}_1(AB)$ enthalten ist, so ist ABD in dem zu A'' gordneten Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten. Durch das Dreieck ABD wird der Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ in die beiden Kegel zerlegt, und einer von diesen beiden Kegeln besteht offenbar aus den Dreiecken ABC, ABD und ACD. Nach der Bedingung 5 gibt es auf S'_1 die Dreiecke $A''B''C''$ und $A''C''D''$, so daß $T_1T'_1(A''C''D'') = ACD$. Daher besteht der zu $A''C''$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}_1(AC)$ aus den Dreiecken ABC und ACD.

Wir nehmen drittens an, daß sowohl ABD als auch ACD bereits in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ aus den beiden Dreiecken ABC und ABD besteht, so gibt es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A''B''D''$, so daß $T_1T'_1(A''B''D'') = ABD$ ist. Der zu $A' = T'_1(A'')$ geordnete Kegel $\mathfrak{B}(A)$ wird durch ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt. Es ist leicht einzusehen, daß einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ aus den Dreiecken ABC, ABD und ACD besteht. Wenn $\mathfrak{B}_2(A)$ aus den Dreiecken ABC, ABD und ACD besteht, so gibt es auf S'_1 die Dreiecke $A'''B''C''$, $A'''B''D''$, $A'''C''D''$, so daß $T_1T'_1(A'''B''D'') = ABD$ und $T_1T'_1(A'''C''D'') = ACD$ ist. Nach der Bedingung 2 muß der Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB)$ aus den beiden Dreiecken ABC und ABD bestehen. $\mathfrak{P}_1(AB)$ besteht aber aus ABC und ABD. Damit müssen $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$ identisch sein; dies widerspricht aber der Bedingung 2. Damit besteht $\mathfrak{B}_1(A)$ aus den Dreiecken ABC, ABD und ACD, und daher gibt es auf S'_1 die Dreiecke $A''B''C''$, $A''B''D''$ und $A''C''D''$, so daß $T_1T'_1(A''C''D'') = ACD$ ist. $\mathfrak{P}_1(AC)$ besteht dann aus den Dreiecken ABC und ACD.

Also können wir zu $A''B''C''$ widerspruchslos ein bestimmtes 3-Simplex ordnen lassen. Wir haben gleichzeitig bewiesen, daß, wenn $ABCD$ zu $A''B''C''$ sich ordnen läßt, so ABD bezw. ACD in dem zu $A''B''$ bezw. $A''C''$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(AC)$ enthalten ist. Das Dreieck BCD ist offenbar in dem zu $B''C''$ geordneten Schnitt enthalten.

Also ist die Bedingung 6 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 7. Es gilt $T_1(S_1) = T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2). Es gibt aber ein 3-Teilkomplex $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, so daß $T_1(S_1)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$ bildet und ein zu einem beliebigen auf S_1 liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist. Da $T_1(S_1)=T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) ist, so bildet $T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$.

Es seien $ABCD$ und $ABCE$ die beiden mit ABC inzidenten 3-Simplexe, und wir nehmen an, daß $ABCD$ bezw. $ABCE$ zu $A''B''C''$ bezw. $A'''B''C''$ geordnet ist, und daß $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(AC)$ zu $A''B''$ bezw. $A''C''$ geordnet ist. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ seien ABC und ABG. Es gibt dann auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A''B''G''$, so daß $T_1T'_1(A''B''G'')=ABG$ ist.

$ABGH$ sei das zu $A''B''G''$ geordnete 3-Simplex. $ABGH$ ist dann in $\mathfrak{M}_1$ enthalten, da die Bedingung 7 für $\mathfrak{G}_{i-1}$ erfüllt ist. Wenn ABH mit ABC übereinstimmt, so stimmt $ABGH$ nach der Bedingung 6 mit $ABCD$ überein.

Wenn ABH nicht mit ABC übereinstimmt, so ist es leicht einzusehen, daß kein Dreieck in $\mathfrak{P}_1(AB)$, außer ABG, auf dem Rand von $\mathfrak{M}_1$ liegt. Damit ist $ABCD$ in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Ebenfalls ist $ABCE$ auch in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Also ist die Bedingung 7 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Wir behandeln zweitens den

2. *Fall.* Es gibt auf einer bestimmten unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, eine Kante $B'C'$, so daß der zu $B'C'$ geordnete Schnitt das Dreieck ABC enthält.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt von der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ mit O. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Kante $B'C'$ auf der Ebene $x_3=0$ liegt. Die Menge $(O,\ B'C')$ (und daher die Menge $T_1\{(O,\ B'C')\}$ auch) ist homöomorph mit einem Dreieck. Die Differenz $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'C')$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$. Die Menge $\mathfrak{P}$ ist dann offenbar homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$.

Wir können eine topologische Abbildnng T'_1 von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{P}$ derart konstruieren, daß die induzierte Abbildung von T'_1, die wir wiederum mit T'_1 bezeichnen, die beiden Dreiecke $A''B''C''(B''C''=l_1)$ und $A''B''C''(B''C''=l_2)$ auf das Dreieck $(O,\ B'C')$ abbildet und übrigens die Abbildung T'_1 die Menge $(y_1^2+y_2^2+y_3^2=1)-\{A''B''C''(B''C''=l_1)+A''B''C''(B''C''=l_2)\}$ einundeindeutig auf die Menge $\{[\text{die Begrenzung von } \mathfrak{P}]-(O,\ B'C')\}$ abbildet.

$T_1\{(O,\ B'C')\}$ bezeichnen wir mit ABC, und wir setzen $T_1(O,\ B')=AB$, $T_1(O,\ C')=AC$ und $\mathfrak{G}_i=\mathfrak{G}_{i-1}+ABC$. Also haben wir den Komplex $\mathfrak{G}_i$ in E^3 eingebettet.

$E^3-\mathfrak{G}_i=(\mathfrak{K}_1-ABC)+\mathfrak{K}_2+\cdots+\mathfrak{K}_p$ und $T_1(\mathfrak{P})=\mathfrak{K}_1-ABC$, so bildet $T_1T'_1$ topologisch die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1-ABC$ ab.

Bedingung 1. Wir bezeichnen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ mit S'_1. Die Bedingung 1 ist offenbar für die Abbildungen $T_1T'_1$, $T_2, \cdots, T_p$ und die Sphären S'_1, S_2, $\cdots$, S_p erfüllt.

Bedingung 2. Es sei l' eine Kante auf S'_1, und wir nehmen erstens an, daß $l'=l_1$ ist. Es gilt $T'_1(l')=B'C'$, und den zu $B'C'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(BC)$.

BCD und BCE seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(BC)$. Wenn $BCD \neq BCE$ ist, so wird der Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Schnitte in $\mathfrak{G}_i$ $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$ zerlegt, und zwar, daß $\mathfrak{P}_1(BC)$ als Endedreiecke die beiden ABC und BCD und $\mathfrak{P}_2(BC)$ als Endedreiecke die beiden ABC und BCE hat.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$, derart daß $T_1(B'C'D')=BCD$ und $T_1(B'C'E')=BCE$. Die mit l_1 inzidenten Dreiecke auf S'_1 sind dann $A''B''C''(B''C''=l_1)$ und $B''C''E''$ oder $A''B''C''$ und $B''C''D''$, wo $T'_1(B''C''D'')=B'C'D'$ oder $T'_1(B''C''E'')=B'C'E'$ ist. Jenachdem $B''C''E''$ oder $B''C''D''$ mit l_1 inzident ist, läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}_2(BC)$ oder $\mathfrak{P}_1(BC)$ zu der Kante l_1 ordnen. Es ist dann offenbar, daß, wenn $\mathfrak{P}_1(BC)$ zu l_1 sich ordnen läßt, $\mathfrak{P}_2(BC)$ zu l_2 sich ordnen läßt.

Wenn $BCD=BCE$ ist, so ist die Kante BC frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$. So gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$, so daß $T_1(B'C'D')=BCD$ und $T_1(B'C'E')=BCE$ ist.

$BCDF$ und $BCDG$ seien die beiden mit BCD inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Mindestens eine von den beiden Kanten BD und DC, etwa DC, ist nicht frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$, da $\mathfrak{G}_{i-1}$ stark-zusammenhängend ist. So stimmt $C'D'$ nicht mit $C'E'$ überein, und wir bezeichnen den zu $C'D'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{P}_1(CD)$ und den zu $C'E'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_2(CD)$. Wenn sowohl CDF als auch CDG nicht in $\mathfrak{G}_i$(damit auch nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$) enthalten ist, so ist eines von den beiden CDF und CDG, etwa CDF, in $\mathfrak{P}_1(CD)$ und das andere CDG ist in $\mathfrak{P}_2(CD)$ enthalten. Wenn mindestens eines von den beiden CDF und CDG, etwa CDF, in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(CD)$ und $\mathfrak{P}_2(CD)$, etwa $\mathfrak{P}_1(CD)$, aus den beiden CDB und CDF. Wenn $\mathfrak{P}_1(CD)$ aus den beiden Dreiecken CDB und CDG besteht, so ist das Dreieck CDG in $\mathfrak{P}_2(CD)$ und nicht in $\mathfrak{P}_1(CD)$ enthalten. Wenn $\mathfrak{P}_2(CD)$ aus den beiden Dreiecken CDB und CDG besteht, so ist das Dreieck CDF in $\mathfrak{P}_1(CD)$ und nicht in $\mathfrak{P}_2(CD)$ enthalten. Also ist das Dreieck CDF in $\mathfrak{P}_1(CD)$ und das andere CDG ist in $\mathfrak{P}_2(CD)$ enthalten.

Die beiden Dreiecke BCD und BCA bestimmen genau die beiden Schnitte in $\mathfrak{G}_i$ mit der Achse BC. Mindestens einer von diesen beiden Schnitten enthält das Dreieck BCF. Wenn BCF mit BCA nicht übereinstimmt, so enthält einer und nur einer von den beiden Schnitten das Dreieck BCF. Diesen das Dreieck BCF enthaltenden Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(BC)$. Wenn BCF mit BCA übereinstimmt, so enthalten die beiden durch BCD und BCA bestimmten Schnitte das Dreieck BCF. Wir bezeichnen dann den aus BCD und BCA bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(BC)$.

Den anderen, durch BCD und ABC bestimmten, Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_2(BC)$. Das Dreieck BCG ist dann offenbar in $\mathfrak{P}_2(BC)$ enthalten.

Jenachdem $B''C''D''$ oder $B''C''E''(B''C''=l_1)$ mit l_1 inzident ist, wo $T'_1(B''C''D'')=B'C'D'$ oder $T'_1(B''C''E'')=B'C'E'$ ist, läßt sich $\mathfrak{P}_1(BC)$ oder $\mathfrak{P}_2(BC)$ zu l_1 ordnen. Wenn $\mathfrak{P}_1(BC)$ zu l_1 sich ordnen läßt, so läßt sich offenbar $\mathfrak{P}_2(BC)$ zu l_2 ordnen.

Wenn $l'=A''B''$ ist, so bezeichnen wir den aus allen in $\mathfrak{M}$ enthaltenen und mit AB inzidenten Dreiecken bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$, und den Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ in $\mathfrak{S}_i$ lassen wir zu $A''B''$ ordnen. Wenn $l'=A''C''$ ist, so bezeichnen wir den aus allen in $\mathfrak{M}$ enthaltenen und mit AC inzidenten Dreiecken bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}(AC)$, und den Schnitt $\mathfrak{P}(AC)$ in $\mathfrak{S}_i$ lassen wir zu $A''C''$ ordnen.

Wenn $l'\neq A''B''\neq A''C''\neq l_1\neq l_2$ ist, und wenn $T'_1(l')=l$ ist und der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l))$ in $\mathfrak{S}_{i-1}$ zu l sich ordnen läßt, so läßt sich $\mathfrak{P}(T_1(l))$ zu l' ordnen.

Wenn m' eine Kante auf $S_j (j=2, \cdots, p)$ ist, und wenn der Schnitt $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ in $\mathfrak{S}_{i-1}$ zu m' geordnet ist, so ist $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ offenbar ein Schnitt auch in $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ läßt sich zu m' ordnen.

Also ist die Bedingung 2 für $\mathfrak{S}_i$ erfüllt.

Bedingung 3. Es sei K'' eine Ecke auf S'_1. Wenn K'' nicht mit A'' übereinstimmt, und wenn $T'_1(K'')=K'$ ist, so läßt sich der zu K' geordnete Kegel mit der Spitze $T_1(K')$ zu der Ecke K'' ordnen.

Wenn K'' mit A'' übereinstimmt, so läßt sich der aus allen mit A inzidenten Dreiecken in $\mathfrak{M}$ bestehende Kegel $\mathfrak{B}(A)$ zu der Ecke A'' ordnen.

Wenn eine Ecke K'' auf $S_j (j=2, \cdots, p)$ liegt, und wenn der Kegel $\mathfrak{B}(T_j(K''))$ in $\mathfrak{S}_{i-1}$ zu K'' geordnet ist, so läßt sich der Kegel $\mathfrak{B}(T_j(K''))$ in $\mathfrak{S}_i$ auch zu K'' ordnen. Also ist die Bedingung 3 für $\mathfrak{S}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 4. $D'E'$ sei eine Kante auf S'_1 und $\mathfrak{P}(DE)$ bezw. $\mathfrak{B}(D)$ sei zu der Kante $D'E'$ bezw. der Ecke D' geordnet. Wir nehmen erstens an, daß $D'E'$ mit $l_1=B''C''$ übereinstimmt und der Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ zu der Kante l_1 bezw. $T'_1(l_1)=B'C'$ geordnet ist. Ein Dreieck BCF sei in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten, so ist BCF auch in $\mathfrak{P}(BC)$ enthalten. Da die Bedingung 4 nach der Annahme für $\mathfrak{S}_{i-1}$ erfüllt ist, so ist BCF in dem zu B' geordneten Kegel enthalten. Da der zu B' geordnete Kegel mit dem zu B'' geordneten Kegel übereinstimmt, so ist BCF in dem zu B'' geordneten Kegel enthalten.

Wenn $D'E'$ mit l_2 übereinstimmt, so verläuft Diskussion ganz analog.

Wenn $D'E'$ mit $A''B''$ übereinstimmt, so ist offenbar der zu $A''B''$

geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ in dem zu A'' bezw. B'' geordnete Kegel $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ enthalten.

Also ist die Bedingung 4 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 5. Es seien A_1A_2 und A_2A_3 die beiden, sowohl in $\mathfrak{G}_i$ als auch in einem Kegel $\mathfrak{B}(A_2)$ in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Kanten von der Art, daß A_1A_2 und A_2A_3 durch die Folge der in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen und nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2$, $\cdots$, $A_2C_lA_3$ verbunden werden können, wo die Kanten A_2C_1, A_2C_2, $\cdots$, A_2C_l nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthalten sind und je zwei von A_2C_1, A_2C_2, $\cdots$, A_2C_l voneinander verschieden sind. Durch die obige Folge der Dreiecke wird $\mathfrak{B}(A_2)$ offenbar in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A_2)$ und $\mathfrak{B}''(A_2)$ zerlegt.

Es gibt auf einer unter S'_1, S_2, $\cdots$, S_p, etwa auf S'_1, die Ecke A''_2 und die Kanten $A''_1A''_2$ und $A''_2A''_3$ von der Art, daß $\mathfrak{B}(A_2)$ zu A''_2 geordnet ist und $T_1T'_1(A''_1A''_2) = A_1A_2$ und $T_1T'_1(A''_2A''_3) = A_2A_3$ ist, und daß der zu der Kante $A''_1A''_2$ bezw. $A''_2A''_3$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ das Dreieck $A_1A_2C_1$ bezw. $A_2C_lA_3$ enthält.

Wir nehmen erstens an, daß die Ecke A''_2 mit B'' übereinstimmt. A_2DE sei ein in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenes Dreieck, das sowohl in $\mathfrak{B}'(A_2)$ als auch in $\mathfrak{B}''(A_2)$ enthalten ist, und zwar, daß die Kante A_2D weder mit A_2A_1 noch mit A_2A_3 übereinstimmt.

Wenn weder A_2A_1 noch A_2A_3 mit BA übereinstimmt, so ist offenbar BCA in nur einem von den beiden $\mathfrak{B}'(A_2)$ und $\mathfrak{B}''(A_2)$ enthalten. Daher kann A_2DE nicht mit BCA übereinstimmen, und A_2DE ist damit bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Da die Bedingung 5 nach der Annahme für $\mathfrak{G}_{i-1}$ erfüllt ist, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ und die beiden Kantenwege $A'_2D' + A'_2\mathring{D}'$ und $A'_1A'_2 + A'_2A'_3$ kreuzen sich, wenn BC nicht mit BD übereinstimmt, wo $T'_1(A''_1A''_2) = A'_1A'_2$ und $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ ist.

Es gibt auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$ derart, daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(A''_2\mathring{D}''\mathring{E}'') = A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ und $A''_2A''_1 + A''_2A''_3$ dann offenbar keuzen sich.

Wir nehmen nun an, daß eine von den beiden A_2A_1 und A_2A_3, etwa A_2A_1, mit BA übereinstimmt. Wenn A_2DE mit BCA übereinstimmt, so kreuzen sich die beiden Kantenwege l_1+l_2 und $A''_2A''_1+A''_2A''_3$. Wenn A_2DE nicht mit BCA übereinstimmt, so ist A_2DE bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Durch die Folge der Dreiecke BCA, BAC_1, $A_2C_1C_2$, $\cdots$, $A_2C_lA_3$ wird $\mathfrak{B}(A_2)$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A_2)$ und $\mathfrak{B}''(A_2)$ zerlegt. Es gibt daher auf S_1 die beiden Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$, und die beiden Kantenwege $A'_2D'+A'_2\mathring{D}'$ und $B'C'+A'_2A'_3$ kreuzen sich, wenn BC nicht mit BD übereinstimmt, wo $T_1(A'_2D'E') = T_1(A'_2\mathring{D}'\mathring{E}') = A_2DE$ und $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ ist.

Es gibt auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$, so daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(A''_2\mathring{D}''\mathring{E}'') = A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ und $l_1 + A''_2A''_3$ dann offenbar kreuzen sich. Folglich kreuzen sich die beiden Kantenwege $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ und $B''A'' + A''_2A''_3$.

Wenn BC mit BD übereinstimmt, so ist es offenbar, daß $l_1 + l_2$ und $B''A'' + A''_2A''_3$ sich kreuzen.

A_2DE sei ein in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenes Dreieck, das in $\mathfrak{B}'(A_2)$ und nicht in $\mathfrak{B}''(A_2)$ enthalten ist. Wenn A_2DE mit BAC und A_2D mit BA übereinstimmt, so kann offenbar weder A_2A_1 noch A_2A_3 mit BA übereinstimmen. Es ist klar, daß die beiden Kantenwege $l_1 + l_2$ und $A''_1A''_2 + A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen.

Wenn A_2DE nicht mit BAC übereinstimmt, so ist A_2DE bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Wir nehmen erstens an, daß weder A_2A_1 noch A_2A_3 mit BA übereinstimmt. Es gibt dann auf S_1 bezw. S_j das Dreieck $A'_2D'E'$ bezw. $\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ und die beiden Kanten $A'_2A'_1$ und $A'_2A'_3$, so daß $T_1(A'_2D'E') = T_j(\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}') = A_2DE$ und $T'_1(A''_2A''_1) = A'_2A'_1$, $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ ist. Da die Bedingung 5 nach der Annahme für $\mathfrak{G}_{i-1}$ erfüllt ist, so können die beiden Kantenwege $A'_2A'_1 + A'_2A'_3$ und $A'_2D' + \mathring{A}'_2\mathring{D}'$ nicht sich kreuzen, auch wenn A'_2 und $\mathring{A}'_2$ miteinander übereinstimmen.

Wir nehmen an, daß $A'_2 = \mathring{A}'_2$ ist. Es gibt dann auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$ von der Art, daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(A''_2\mathring{D}''\mathring{E}'') = A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ ist. Die beiden Kantenwege $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ und $A''_2A''_1 + A''_2A''_3$ kreuzen dann nicht sich.

Wir nehmen zweitens an, daß eine von den beiden A_2A_1 und A_2A_3, etwa A_2A_1, mit BA übereinstimmt. Mindestens eine Kante von den beiden A_2D und A_2E, etwa A_2D, stimmt nicht mit der Kante A_2A_3 überein. Durch die Folge der Dreiecke BCA, $A_2A_1C_1$, $A_2C_1C_2, \cdots$, $A_2C_tA_3$ wird $\mathfrak{B}(A_2)$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A_2)$ und $\mathfrak{B}''(A_2)$ zerlegt.

Wir nehmen nun an, daß die Kante A_2D nicht mit BC übereinstimmt. Es gibt auf S_1 bezw. S_j das Dreieck $A'_2D'E'$ bezw. $\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ und die beiden Kanten $B'C'$ und $A'_2A'_3$, so daß $T_1(A'_2D'E') = T_j(\mathring{A}'_2\mathring{D}'\mathring{E}') = A_2DE$ und $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ $T'_1(l_1) = B'C'$ ist. Die beiden Kantenwege $B'C' + A'_2A'_3$ und $A'_2D' + A'_2\mathring{D}'$ können dann nicht sich kreuzen, auch wenn A'_2 und $\mathring{A}'_2$ miteinander übereinstimmen. Wenn $\mathring{A}'_2$ mit A'_2 übereinstimmt, so gibt es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''_2D''E''$ und $A''_2\mathring{D}''\mathring{E}''$, so daß $T'_1(A''_2D''E'') = A'_2D'E'$ und $T'_1(A''_2\mathring{D}''\mathring{E}'') = A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ ist, und die beiden

Kantenwege $l_1 + A''_2A''_3$ und $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ kreuzen nicht sich. Folglich können die beiden Kantenwege $B''A'' + A''_2A''_3$ und $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ nicht sich kreuzen.

Wenn A_2D mit BC übereinstimmt und A_2E weder mit BC noch mit A_2A_3 übereinstimmt, so nehmen wir statt A_2D die Kante A_2E auf, und Diskussion läuft ganz analog mit der obigen.

Wenn A_2D mit BC übereinstimmt und A_2E mit A_2A_3 übereinstimmt, so kann die Kante A_2D nicht in $\mathfrak{G}_{l-1}$ frei sein. Angenommen in der Tat, daß A_2D in $\mathfrak{G}_{l-1}$ frei ist. Es ist dann leicht einzusehen, daß A_2DE sowohl in $\mathfrak{B}'(A_2)$ als auch in $\mathfrak{B}''(A_2)$ enthalten ist. Dies widerspricht aber der Annahme, daß A_2DE nicht in $\mathfrak{B}''(A_2)$ enthalten ist. Ebenfalls ist die Kante A_2E nicht frei in $\mathfrak{G}_{l-1}$.

Wir behandeln den Fall, worin es auf S_l die beiden Dreiecke $A'_2D'E'$ und $A'_2\mathring{D}'\mathring{E}'$ gibt, und zwar, daß $T_1(A'_2D'E') = T_1(A'_2\mathring{D}'\mathring{E}') = A_2DE$ ist. Es gibt auf S_1 auch die Kanten $A'_2A'_3$ und $A'_2A'_1$, so daß $T'_1(A''_2A''_3) = A'_2A'_3$ und $T'_1(l_1) = B'C'$ ist. Wenn $B'C'$ weder mit A'_2D' noch mit $A'_2\mathring{D}'$ übereinstimmt, so können die beiden Kantenwege $A'_2A'_3+B'C'$ und $A'_2D' + A'_2\mathring{D}'$ nicht sich kreuzen. Daher kreuzen die beiden Kantenwege $A''_2A''_3 + A''_2A''_1$ und $A''_2D'' + A''_2\mathring{D}''$ nicht sich, wo $T'_1(A''_2D'') = A'_2D'$ und $T'_1(A''_2\mathring{D}'') = A'_2\mathring{D}'$ ist.

Wenn eine von den beiden A'_2D' und $A'_2\mathring{D}'$ mit $B'C'$ übereinstimmt, und wenn weder A'_2E' noch $A'_2\mathring{E}'$ mit $A'_2A'_3$ übereinstimmt, so können wir ebenfalls einsehen, daß die beiden Kantenwege $A''_2A''_3 + A''_2A''_1$ und $A''_2E''+A''_2\mathring{E}''$ nicht sich kreuzen, wo $T'_1(A''_2E'')=A'_2E'$ und $T'_1(A''_2\mathring{E}'')= A'_2\mathring{E}'$ ist. Folglich können die beiden Kantenwege $A''_2A''_3 + A''_2A''_1$ und $A''D'' + A''_2\mathring{D}''$ nicht sich kreuzen.

Wir nehmen nun an, daß eine von den beiden A'_2D' und $A'_2\mathring{D}'$ mit $B'C'$ übereinstimmt und eine von den beiden A'_2E' und $A'_2\mathring{E}'$, etwa A'_2E', mit $A'_2A'_3$ übereinstimmt. Den zu $A'_2A'_3$ geordneten Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}(A_2A_3)$. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ seien A_2ED und A_2EG. Da A_2E nicht frei in $\mathfrak{G}_{l-1}$ ist, so können A_2ED und A_2EG nicht miteinander übereinstimmen. Durch das Dreieck $A_2A_3C_l$ wird der Schnitt $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(A_2A_3)$ und $\mathfrak{P}_2(A_2A_3)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(A_2A_3)$ und $\mathfrak{P}_2(A_2A_3)$, etwa $\mathfrak{P}_1(A_2A_3)$, hat als Endedreiecke die beiden Dreiecke $A_2A_3C_l$ und A_2ED und der andere $\mathfrak{P}_2(A_2A_3)$ hat als Endedreiecke die beiden Dreiecke $A_2A_3C_l$ und A_2EG.

Alle in $\mathfrak{P}_2(A_2A_3)$ enthaltenen Dreiecke seien $A_2A_3C_l$, $A_2A_3C_{l+1}$, $\cdots$, $A_2A_3C_{m-1}$, $A_2A_3C_m(=A_2A_3G)$. A_2C_{l+p} sei die Kante von der Art, daß A_2C_l, A_2C_{l+1}, $\cdots$, A_2C_{l+p-1} nicht noch in $\mathfrak{G}_l$ enthalten sind und A_2C_{l+p} in $\mathfrak{G}_l$

enthalten ist. $A_2C_{l+q-1}(0<q<p)$ sei die Kante von der Art, daß jede Kante von $A_2C_{l+q}, \cdots, A_2C_{l+p-1}$ nicht mit einem von $A_2A_1, \cdots, A_2A_l$ übereinstimmt und die Kante A_2C_{l+q-1} aber mit einem von $A_2A_1, \cdots, A_2C_s, \cdots, A_2A_l$, etwa $A_2C_s(s<l)$, übereinstimmt. Durch die Folge der Dreiecke $A_2A_1C_1$, $A_2C_1C_2, \cdots, A_2C_{s-1}C_s$, $A_2C_{l+q-1}C_{l+q}, \cdots$, $A_2C_{l+p-1}C_{l+p}$ wird $\mathfrak{B}(A_2)$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und $\mathfrak{B}_2(A_2)$ zerlegt. Es ist leicht einzusehen, daß A_2DE in nur einem von den beiden $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und $\mathfrak{B}_2(A_2)$ enthalten ist, und daß die Kante A_2C_{l+p} nicht mit A_2D übereinstimmt. Denn, wenn $A_2A_3C_{l+p}$ nicht mit A_2EG übereinstimmmt, so ist $A_2A_3C_{l+p}$ nicht noch in $\mathfrak{G}_l$ enthalten ist und die Kante A_2C_{l+p} damit stimmt nicht mit A_2D überein. Wenn $A_2A_3C_{l+p}$ mit A_2EG übereinstimmt, so stimmt die Kante A_2C_{l+p} mit A_2G und damit nicht mit A_2D überein.

Es gibt auf S'_1 die Kanten $A''_2C''_{l+p}$, A''_2A'', A''_2D'', $A''_2\overset{\circ}{D}''$, so daß $T_1T'_1(A''_2C''_{l+p}) = A_2C_{l+p}$, $T_1T'_1(A''_2A'') = BA$, $T'_1(A''_2D'') = A'_2D'$, $T'_1(A''_2\overset{\circ}{D}'') = A'_2\overset{\circ}{D}'$ ist und der zu $A''_2C''_{l+p}$ geordnete Schnitt das Dreieck $A_2C_{l+p-1}C_{l+p}$ enthält. Die Kantenwege $A''_2\overset{\circ}{D}''+A''_2D''$ und $A''B''+A''_2C''_{l+p}$ kreuzen dann nicht sich.

Durch die Folge der Dreiecke $A_2A_3C_l$, $A_2C_lC_{l+1}, \cdots$, $A_2C_{l+p-1}C_{l+p}$ wird $\mathfrak{B}(A_2)$ in die beiden Kegel zerlegt. Es ist leicht einzusehen, daß A_2DE in nur einem von diesen beiden Kegeln enthalten ist. Daher kreuzen die beiden Kantenwege $A''_2\overset{\circ}{D}''+A''_2D''$ und $A''_2C''_{l+p}+A''E''$ nicht sich. Folglich kreuzen die beiden Kantenwege $A''_2\overset{\circ}{D}''+A''_2D''$ und $A''B''+A''_2A''_3$ nicht sich.

Ebenfalls können wir beweisen, daß, wenn die beiden Dreiecke A_2DE und A_2FG in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthalten sind, und wenn für $A''_2D''E''$ und $A''_2F''G''$ es $T_1T''_1(A''_2D''E'') = A_2DE$ und $T_1T'_1(A''_2F''G'') = A_2FG$ gilt und ein zu A''_2D'' bezw. A''_2F'' geordneter Schnitt in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthalten ist, so die beiden Kantenwege $A''_2D''+A''_2F''$ und $A''_2A''_1+A''_2A''_3$ nicht sich kreuzen können.

Also ist die Bedingung 5 für $\mathfrak{G}_l$ auch erfüllt.

Bedingung 6. Es sei $A''_1A''_2A''_3$ ein Dreieck auf S'_1 und $T_1T'_1(A''_1A''_2A''_3) = A_1A_2A_3$. Wenn $A_1A_2A_3$ und ABC nicht miteinander übereinstimmen, so setzen wir $T'_1(A''_1A''_2A''_3) = A'_1A'_2A'_3$ und wir lassen zu $A''_1A''_2A''_3$ das zu $A'_1A'_2A'_3$ geordnete 3-Simplex selbst ordnen.

Wir nehmen nun an, daß $A''_1A''_2A''_3$ mit $A''B''C''(B''C''=l_1)$ übereinstimmt. $ABCD$ und $ABCE$ seien die beiden, mit ABC inzidenten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Wir setzen $T'_1(l_1) = B'C'$, und wir bezeichnen den zu $B'C'$ bezw. l_1 bezw. l_2 geordnete Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(BC)$.

Wenn sowohl BCD als auch BCE nicht in $\mathfrak{G}_l$ enthalten ist, so ist eines und nur eines von den beiden BCD und BCE, etwa BCD, in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten. Wir lassen dann zu $A''B''C''(B''C''=l_1)$ bezw. $A''B''C''(B''C''$

$= l_2$) das Simplex $BCAD$ bezw. $BCAE$ ordnen. Wenn BCD bereits in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa $\mathfrak{P}_1(BC)$, aus den beiden Dreiecken BCD und BCA. Wir lassen dann zu $A''B''C''(B''C''=l_1)$ bezw. $A''B''C''(B''C'' = l_2)$ das Simplex $BCAD$ bezw. $BCAE$ ordnen.

Also ist die Bedingung 6 für $\mathfrak{G}_i$ erfüllt.

Bedingung 7. Es gilt $T_1(S_1) = T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2). Es gibt aber ein 3-Teilkomplex $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, so daß $T_1(S_1)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$ bildet und ein zu einem beliebigen auf S_1 liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist. Da $T_1(S_1) = T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) ist, so bildet $T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$.

Es seien $ABCD$ und $ABCE$ die beiden mit ABC inzidenten 3-Simplexe. Es leicht einzusehen, daß sowohl $ABCD$ als auch $ABCE$ in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist[1].

Wir behandeln nun den

3. *Fall.* Die Kanten AB, BC, CA des Dreiecks ABC sind bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten, und das Dreieck ABC ist aber nicht noch in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten.

Das Dreieck ABC ist dann in einem bestimmten Schnitte $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten. Nach der Bedingung 2 gibt es auf einer S_i bezw. S_j bezw. S_k eine Kante $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'\mathring{C}'$ bezw. $C'_1A'_1$, und $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ ist zu der Kante $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'\mathring{C}'$ bezw. $C'_1A'_1$ geordnet.

Wir bezeichnen den zu A' bezw. A'_1 geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}_1(A)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(A)$. Nach der Bedingung 4 ist ABC sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. Da ABC nicht noch in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so müssen $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ miteinander übereinstimmen. Folglich muß $A' = A'_1$ und $S_i = S_k$ sein. Ebenfalls muß $B' = \mathring{B}'$ und $\mathring{C}' = C'_1$ sein. Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, daß $S_i = S_k = S_j = S_1$ ist. Also gibt es auf S_1 drei Kanten $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$, und der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ ist zu der Kante $A'B'$ bezw. $B'C'$ bezw. $C'A'$ geordnet, und $\mathfrak{P}(AB)$, $\mathfrak{P}(BC)$ und $\mathfrak{P}(CA)$ enthalten das Dreieck ABC.

Wir bezeichnen den Mittelpunkt von der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ mit O. Indem wir jeden Punkt auf $A'B' + B'C' + C'A'$ mit O verbinden, wir konstruieren die Menge $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Kanten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ auf der Ebene $x_3 = 0$ liegen. Die Menge $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ ist dann offenbar homöomorph mit einem Dreieck, und damit ist die Menge $T_1\{(O,\ A'B' + B'C' + C'A')\}$ auch homöomorph mit einem Dreieck. $T_1\{(O,\ A'B' + B'C' + C'A')\}$ bezeichnen wir mit ABC.

---

[1] Vgl. Bedingung 7 im 1. Falle.

Die Sphäre S_1 wird durch den Kantenweg $A'B' + B'C' + C'A'$ in die beiden Gebiete $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ in bezug auf S_1 zerlegt, und $A'B' + B'C' + C'A'$ bildet die gemeinsame Begrenzung von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$. Die Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ wird durch die Menge $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ in die beiden Gebiete $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zerlegt, und $\bar{\mathfrak{H}}_1 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ bildet die Begrenzung von einem unter $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, etwa von $\mathfrak{P}_1$, und $\bar{\mathfrak{H}}_2 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ bildet die Begrenzung von dem anderen $\mathfrak{P}_2$.

$\mathfrak{K}_1$ wird durch ABC in die beiden Gebiete $\mathfrak{K}'_1$ und $\mathfrak{K}''_1$ zerlegt, und wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $T_1(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{K}'_1$ und $T_1(\mathfrak{P}_2) = \mathfrak{K}''_1$ ist. Wir können eine topologische Abbildung T'_1 von der Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$ auf $\mathfrak{P}_1$ derart konstruieren, daß die induzierte Abbildung $\bar{T}'_1$ von der Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, auf $\bar{\mathfrak{H}}_1 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ einundeindeutig ist und ein Dreieck auf S'_1 durch T'_1 auf eines Dreieck auf $\bar{\mathfrak{H}}_1 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ abgebildet wird. Ebenfalls können wir eine topologische Abbildung T''_1 von der Kugel $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 < 1$ auf $\mathfrak{P}_2$ derart konstruieren, daß die induzierte Abbildung $\bar{T}''_1$ von der Sphäre $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, auf $\bar{\mathfrak{H}}_2 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ einundeindeutig ist und ein Dreieck auf S''_1 durch T''_1 auf eines Dreieck auf $\bar{\mathfrak{H}}_2 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ abgebildet wird.

Es sei $D'E'F'$ ein Dreieck auf $\bar{\mathfrak{H}}_1$, so bezeichnen wir $T'^{-1}_1(D'E'F')$ mit $D''E''F''$. Es sei $D'E'F'$ ein Dreieck auf $\bar{\mathfrak{H}}_2$, so bezeichnen wir $T''^{-1}_1(D'E'F')$ mit $D'''E'''F'''$. Wir bezeichnen auch $T'^{-1}_1\{(O,\ A'B' + B'C' + C'A')\}$ bezw. $T''^{-1}_1\{(O,\ A'B' + C'C' + C'A')\}$ mit $A''B''C''$ bezw. $A'''B'''C'''$.

Wir setzen $\mathfrak{G}_{t-1} + ABC = \mathfrak{G}_t$, so haben wir $\mathfrak{G}_t$ in E^3 eingebettet. Die Komponenten von $E^3 - \mathfrak{G}_t$ bestehen aus $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{K}''_1$, $\mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$.

Bedingung 1. Die Bedingung 1 ist offenbar für die Abbildungen $T_1T'_1$, $T_1T''_1$, $T_2, \cdots, T_p$ und die Sphären S'_1, S''_1, $S_2, \cdots, S_p$ erfüllt.

Bedingung 2. Es sei l' eine Kante auf S'_1, und wir nehmen erstens an, daß $l' = A''B''$ ist. $T'_1(A''B'') = A'B'$, und der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ in $\mathfrak{G}_{t-1}$ ist zu der Kante $A'B'$ geordnet. ABD und ABE seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB)$. Wenn ABD nicht mit ABE übereinstimmt, so wird der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Schnitte in $\mathfrak{G}_t$ $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$ zerlegt. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{P}_1(AB)$ als Endedreiecke die beiden ABC und ABD und $\mathfrak{P}_2(AB)$ als Endedreiecke die beiden ABC und ABE hat.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'D'$ und $A'B'E'$, so daß $T_1(A'B'D') = ABD$ und $T_1(A'B'E') = ABE$ ist. Jenachdem $A'B'D'$ oder $A'B'E'$ in $\bar{\mathfrak{H}}_1$ enthalten ist, läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ oder $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu der Kante $A''B''$ ordnen. Es ist dann offenbar, daß, wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ zu $A''B''$ sich ordnen läßt, so der Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu der Kante $A'''B'''$ sich ordnen läßt.

Wenn ABD mit ABE übereinstimmt, so ist die Kante AB frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$. Es gibt dann auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'D'$ und $A'B'E'$, so daß $T_1(A'B'D') = ABD$ und $T_1(A'B'E') = ABE$ ist.

$ABDF$ und $ABDG$ seien die beiden, mit ABD inzidenten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Mindestens eine von den beiden Kanten AD und BD, etwa AD, ist nicht frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$. So stimmt $A'D'$ nicht mit $A'E'$ überein, und wir bezeichnen den zu $A'D'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{P}_1(AD)$ und den zu $A'E'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_2(AD)$.

Wenn sowohl ADF als auch ADG nicht in $\mathfrak{G}_i$(damit auch nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$) enthalten ist, so ist eines von den beiden ADF und ADG, etwa ADF, in $\mathfrak{P}_1(AD)$ und das andere ADG ist in $\mathfrak{P}_2(AD)$ enthalten. Wenn mindestens eines von den beiden ADF und ADG, etwa ADF, in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AD)$ und $\mathfrak{P}_2(AD)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AD)$, aus den beiden ADF und ADB. Das Dreieck ADG ist dann in $\mathfrak{P}_2(AD)$ und nicht in $\mathfrak{P}_1(AD)$ enthalten. Wenn ADG in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, und wenn $\mathfrak{P}_2(AD)$ aus den beiden Dreiecken ADB und ADG besteht, so ist das Dreieck ADF in $\mathfrak{P}_1(AD)$ und nicht in $\mathfrak{P}_2(AD)$ enthalten. Also ist jedenfalls das Dreieck ADF in $\mathfrak{P}_1(AD)$ und das andere ADG ist in $\mathfrak{P}_2(AD)$ enthalten.

Die beiden Dreiecke ABD und ABC bestimmen genau die beiden Schnitte in $\mathfrak{G}_i$ mit der Achse AB. Mindestens einer von diesen beiden Schnitte enthält das Dreieck ABF. Wenn ABF nicht mit ABC übereinstimmt, so enthält einer und nur einer von den beiden Schnitten das Dreieck ABF. Diesen das Dreieck ABF enthaltenden Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(AB)$. Wenn ABF mit ABC übereinstimmt, so enthält die beiden durch ABC und ABD bestimmten Schnitte das Dreieck ABF. Wir bezeichnen dann den aus ABD und ABF bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AB)$.

Den anderen, durch ABD und ABC bestimmten, Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_2(AB)$. Das Dreieck ABG ist dann offenbar in $\mathfrak{P}_2(AB)$ enthalten.

Jenachdem $A'B'D'$ in $\bar{\mathfrak{H}}_1$ oder in $\bar{\mathfrak{H}}_2$ enthalten ist, läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ oder $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu der Kante $A''B''$ ordnen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ zu $A''B''$ sich ordnen läßt, so läßt sich offenbar $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu $A'''B'''$ ordnen.

Für $B''C''$, $B'''C'''$, $C''A''$, $C'''A'''$ auch läuft Diskussion ganz analog.

Wenn $l' \neq A''B'' \neq B''C'' \neq C''A''$ ist, und wenn $T'_1(l') = l$ und der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu l geordnet ist, so läßt sich $\mathfrak{P}(T_1(l))$ zu l' ordnen.

Wenn m' eine Kante auf S''_1 ist und $m' \neq A'''B''' \neq B'''C''' \neq C'''A'''$ ist, und wenn $T'_1(m') = m$ und der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(m))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu m geordnet ist, so läßt sich $\mathfrak{P}(T_1(m))$ zu m' ordnen.

Wenn m' eine Kante auf $S_j(j = 2, \cdots, p)$ ist, und wenn der Schnitt $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ zu m' geordnet ist, so ist $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ offenbar ein Schnitt auch in $\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{P}(T_j(m'))$ läßt sich zu m' ordnen.

Also ist die Bedingung 2 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 3. Es sei K'' eine Ecke auf S'_1. Wenn K'' nicht mit A'' oder B'' oder C'' übereinstimmt, und wenn $T'_1(K'') = K'$ ist, so läßt sich der zu K' geordnete Kegel mit der Spitze $T_1(K')$ zu der Ecke K'' ordnen.

Wir nehmen an, daß K'' mit A'' übereinstimmt und ein Kegel $\mathfrak{B}(A)$ zu der Ecke $T'_1(A'') = A'$ geordnet ist. $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt.

Es sei ADE ein in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthaltenes Dreieck, das in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und nicht mit ABC übereinstimmt. ADE ist dann in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten. Daher gibt es auf S_1 ein Dreieck $A'D'E'$, so daß $T_1(A'D'E') = ADE$ ist. Mindestens eine von den beiden Kanten AD und AE, etwa AD, kann nicht mit ABC inzident sein.

Wenn die Kante AD frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist, so gibt es auf S_1 die beiden Dreiecke $A'D'E'$ und $A'D'E''$, und $T_1(A'D'E') = T_1(A'D'E'') = ADE$. Jenachdem das Dreieck $A'D'E'$ (damit auch $A'DE''$) in $\bar{\mathfrak{H}}_1$ oder in $\bar{\mathfrak{H}}_2$ enthalten ist, läßt sich der Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ oder $\mathfrak{B}_2(A)$ zu der Ecke A'' ordnen. Wenn $\mathfrak{B}_1(A)$ sich zu A'' ordnen läßt, so läßt sich $\mathfrak{B}_2(A)$ zu A''' ordnen.

Wir nehmen nun an, daß die Kante AD nicht frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist. Wenn ADE in $\mathfrak{B}_2(A)$ auch enthalten ist, so gibt es auf S_1 nach der Bedingung 5 die beiden Dreiecke $A'D'E'$ und $A'D''E''$ und die beiden Kantenwege $A'D' + A'D''$ und $A'B' + A'C'$ kreuzen sich.

$ADEF$ und $ADEG$ seien die beiden, mit ADE inzidenten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Eines von den beiden $ADEF$ und $ADEG$, etwa $ADEF$, ist zu $A'D'E'$ geordnet und das andere $ADEG$ ist zu $A'D''E''$ geordnet. Wenn mindestens eines von den beiden ADF und ADG, etwa ADG, nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so ist es leicht einzusehen, daß ADG in nur einem von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_2(A)$, enthalten ist. Wenn sowohl ADF als auch ADG in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist und ADF sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist, so ist es leicht einzusehen, daß ADG in nur einem von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_2(A)$, enthalten ist. Wir lassen zu der Ecke A'' oder A''' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen, jenachdem $A'D'E'$ in $\bar{\mathfrak{H}}_1$ oder in $\bar{\mathfrak{H}}_2$ enthalten ist. Wenn $\mathfrak{B}_1(A)$ zu A'' sich ordnen läßt, so läßt sich $\mathfrak{B}_2(A)$ zu A''' ordnen.

Wenn $K'' = B'' = B''' = C'' = C'''$ ist, so läuft Diskussion ganz analog.

Also ist die Bedingung 3 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

Bedingung 4. Bedingung 4 ist für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt. Der Beweis ist ganz analog mit dem im 1. Falle, so lassen wir den Beweis weg.

Bedingung 5. Bedingung 5 ist für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt. Der Beweis ist ganz analog mit dem im 1. Falle.

Bedingung 6. Bedingung 6 ist für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt. Der Beweis ist ganz analog mit dem im 1. Falle.

Bedingung 7. Sowohl Rand von $T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) als auch Rand von $T_1T''_1(S''_1)$ (mod. 2) ist offenbar Nullkomplex (mod. 2). Folglich bildet $T_1T'_1(S'_1)$ (mod. 2) bezw. $T_1T''_1(S''_1)$ (mod. 2) einen Rand von einem 3-Teilkomplex $\mathfrak{M}'$ bezw. $\mathfrak{M}''$ von $\mathfrak{M}$, und zwar, daß ein zu einem beliebigen auf S'_1 bezw. S'' liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex in $\mathfrak{M}'$ bewz. $\mathfrak{M}''$ enthalten ist.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'D'$ und $A'B'E'$, so daß das Dreieck ABC in dem zu $A'B'$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ enthalten ist. $ABDF$ sei ein 3-Simplex und zu $A'B'D'$ geordnet. ABF ist dann nach der Bedingung 6 für $\mathfrak{G}_{i-1}$ in $\mathfrak{P}(AB)$ enthalten. $ABDF$ ist aber in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Damit ist ABC in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Daher ist sowohl $\mathfrak{M}'$ als auch $\mathfrak{M}''$ ein Teilkomplex von $\mathfrak{M}_1$.

Wenn $T_1T'_1(S'_1)$ und $T_1T''_1(S''_1)$ nicht miteinander übereinstimmen, so gibt es auf S'_1 ein Dreieck $A''_1A''_2A''_3$, so daß $T_1T'_1(A''_1A''_2A''_3) = A_1A_2A_3$ ist und kein Dreieck auf S''_1 durch $T_1T''_1$ auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ abgebildet ist, oder gibt es auf S''_1 ein Dreieck $A''_1A''_2A''_3$, so daß $T_1T''_1(A''_1A''_2A''_3) = A_1A_2A_3$ ist und kein Dreieck auf S'_1 durch $T_1T'_1$ auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ abgebildet ist.

Wir nehmen nun an, daß es auf S_1 ein Dreieck $A''_1A''_2A''_3$ gibt, so daß $T_1T'_1(A''_1A''_2A''_3) = A_1A_2A_3$ ist und kein Dreieck auf S''_1 durch $T_1T''_1$ auf das Dreieck $A_1A_2A_3$ abgebildet wird. $A_1A_2A_3A_4$ sei das zu $A''_1A''_2A''_3$ geordnete Simplex. $A_1A_2A_3A_4$ ist dann offenbar in $\mathfrak{M}'$ enthalten.

Anderseits ist es leicht einzusehen, daß, wenn $A_1A_2A_3A_4$ in $\mathfrak{M}'$ enthalten ist, so ein zu einem beliebigen auf S'_1 liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex auch in $\mathfrak{M}'$ enthalten ist.

Wir nehmen zweitens an, daß $T'_1(S'_1)$ und $T''_1(S''_1)$ völlig übereinstimmen. $\mathfrak{M}_1$ stimmt dann mit $\mathfrak{M}$ überein. $A''_1A''_2A''_3$ sei ein auf S'_1 liegendes Dreieck, so daß $T_1T'_1(A''_1A''_2A''_3) = A_1A_2A_3$ ist und das Simplex $A_1A_2A_3A_4$ zu $A''_1A''_2A''_3$ geordnet ist. $A_1A_2A_3A_4$ ist in einem von $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ enthalten. In diesem Falle können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit den das $A_1A_2A_3A_4$ enthaltenden Komplex mit $\mathfrak{M}'$ bezeichnen.

Also ist die Bedingung 7 für $\mathfrak{G}_i$ auch erfüllt.

2. Schritt. Wir konstruieren die Folge der 2-Komplexe $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{i-1}$, so daß $\mathfrak{G}_j (j \leqq i-1)$ aus $\mathfrak{G}_{j-1}$ und einem Dreieck von $\mathfrak{M}$ besteht und jeder $\mathfrak{G}_j$ stark-zusammenhängend und nullhomotop ist.

Wir können, wie im 1. Schritte gezeigt worden ist, $\mathfrak{G}_{i-1}$ in E^3 derart einbetten, daß jede Komponente von $E^3 - \mathfrak{G}_{i-1}$ homöomorph mit der 3-Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ ist, und daß, wenn wir die Komponenten von $E^3 - \mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ und die topologischen Abbildungen von $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ auf $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ mit $T_1, T_2, \cdots, T_p$ bezeichnen, so $T_1, T_2, \cdots, T$ den Bendingungen 1—7 genügen.

Wir wollen nun die folgende Behauptung beweisen.

Zwischenbehauptung 1. *Wir bezeichnen die Komponenten von* $E^3 - \mathfrak{G}_{i-1}$ *mit* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ *und die topologischen Abbildungen von* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ *auf* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ *mit* $T_1, T_2, \cdots, T_p$ *und die Sphären* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ *mit* $S_1, S_2, \cdots, S_p$. *Nach der Bedingung 7 bildet* $T_j(S_j)$ (*mod.* 2) ($j = 1, 2, \cdots, p$) *den Rand eines 3-Komplex* $\mathfrak{M}_j$.

$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ *sei ein in einem von* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_p$, *etwa in* $\mathfrak{M}_1$, *enthaltener Kantenweg und genüge der folgenden Bedingung.*

Bedingung. *Wenn eine Ecke unter* $A_1, A_2, \cdots, A_n$, *etwa* A_q, *in* $\mathfrak{G}_{i-1}$ *enthalten ist, so ist eine bestimmte Ecke* A'_q *auf* S_1 *zu* A_q *geordnet und sowohl* $A_{q-1}A_q$ *als auch* A_qA_{q+1} *ist in dem zu* A'_q *geordneten Kegel enthalten. Wenn die Kante* A_qA_{q+1} *in* $\mathfrak{G}_{i-1}$ *enthalten ist, so gibt es auf* S_1 *eine Kante* $A'_qA'_{q+1}$, *so daß* A'_q *bezw.* A'_{q+1} *zu* A_q *bezw.* A_{q+1} *geordnet ist.*

Es gibt dann ein Rechteck R *und die Abbildung* Q *von* R *in* $\mathfrak{M}$, *und zwar, daß* R *und* Q *den folgenden Bedingungen genügen.*

1. *R ist in Dreiecke zerlegt und die Seite von R ist in Kanten $A''_1A''_2, \cdots, A''_{n-1}A''_n, A''_nA''_1$ zerlegt. Beide Dreiecke auf R haben entweder keine Punkte gemeinsam oder* 1, 2, 3 *Ecken gemeinsam oder ihre einzige Kante und eine Ecke gemeinsam oder ihren* 1, 2 *Kanten gemeinsam.*

2. *EFG sei ein Dreieck auf R, so ist $Q(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$.* $Q(A''_1A''_2) = A_1A_2, \cdots, Q(A''_{n-1}A''_n) = A_{n-1}A_n, Q(A''_nA''_1) = A_nA_1$.

3. *Wenn A_q in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, und wenn A'_q auf S_1 zu A_q geordnet ist und ein Kegel $\mathfrak{B}(A_q)$ zu A'_q geordnet ist, so ist das Bild jedes, mit A''_q inzidenten Dreiecks auf R durch die Abbildung Q in dem Kegel $\mathfrak{B}(A_q)$ enthalten.*

Beweis. Die Behauptung gilt offenbar für $\mathfrak{G}_1$. $\mathfrak{G}_1$ besteht in der Tat aus den beiden Dreiecken ABC und ABD. Wir zerlegen die Sphäre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ in Dreiecke $A'B'C'$ ($A'B' = l_1$), $A'B'C'$ ($A'B' = l_2$), $A'B'D'$ ($A'B' = l_1$), $A'B'D'$ ($A'B' = l_2$). Wir können die topologische Abbildung T von $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ auf $E^3 - \mathfrak{G}_1$ derart konstruieren, daß $T(A'B'C'\,;\ A'B' = l_1) = ABC = T(A'B'C'\,;\ A'B' = l_2)$, $T(A'B'D'\,;\ A'B' = l_1) = ABD = T(A'B'D'\,;\ A'B' = l_2)$ ist. Wir bezeichnen den zu A' bezw. B' bezw. C' bezw. D' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(C)$ bezw. $\mathfrak{B}(D)$. $\mathfrak{B}(A)$ besteht dann aus allen mit A inzidenten Dreiecken in $\mathfrak{M}$. Dasselbe gilt für $\mathfrak{B}(B)$, $\mathfrak{B}(C)$ und $\mathfrak{B}(D)$.

$A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ sei ein in $\mathfrak{M}$ enthaltener Kantenweg. Es gibt dann nach dem Hilfssatz ein Rechteck R und die Abbildung Q von R in $\mathfrak{M}$, so daß R und Q den obigen Bedingungen 1 und 2 genügen. Wenn $A_q = A$ ist, so ist die Ecke A' zu $A_q = A$ geordnet. Das Bild jedes, mit A''_q inzidenten, Dreiecks auf R durch Q ist offenbar in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten, da $\mathfrak{B}(A)$ aus allen mit A inzidenten Dreiecken besteht.

Wir nehmen nun an, daß die Zwischenbehauptung für $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_j$ gilt, und wir wollen beweisen, daß die Behauptung für $\mathfrak{G}_{j+1}$ auch gilt.

Wir können $\mathfrak{G}_i$ in E^3 derart einbetten, daß, wenn wir die Komponenten von $E^3-\mathfrak{G}_j$ mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ und die topologischen Abbildungen von $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ mit $T_1, T_2, \cdots, T_p$ bezeichnen, so $T_1, T_2, \cdots, T_p$ den Bedingungen $1-7$ im 1. Schritte genügen. Wir bezeichnen die Sphären $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ mit $S_1, S_2, \cdots, S_p$.

Wir setzen $\mathfrak{G}_{j+1}=\mathfrak{G}_j+ABC$, und wir unterscheiden nun die folgenden Fälle.

Fall 1. ABC hat mit $\mathfrak{G}_j$ nur eine Kante BC gemeinsam.

Fall 2. ABC hat mit $\mathfrak{G}_j$ die beiden Kanten AB und AC gemeinsam.

Fall 3. ABC hat mit $\mathfrak{G}_j$ drei Kanten gemeinsam.

Wir behandeln erstens

Fall 1. Es gibt etwa auf S_1 eine Kante $B'C'$, so daß der zu $B'C'$ geordnete Schnitt das Dreieck ABC enthält.

Die Menge $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(O, B'C')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''(B''C''=l_1)$ und $A''B''C''(B''C''=l_2)$ gibt und $S'_1-\{A''B''C''(B''C''=l_1)+A''B''C''(B''C''=l_2)\}$ ebenso wie S_1 in Dreiecke zerlegt ist. Wir können eine topologische Abbildung T von der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(O, B'C')$ derart konstruieren, daß $T(A''B''C''\,;\, B''C''=l_1)=T(A''B''C''\,;\, B''C''=l_2)=(O, B'C')$ ist und die anderen Dreiecke auf S'_1 durch T auf die Dreiecke auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$ und $T'_1(A''B''C'')=ABC$. $T'_1(S'_1)$ (mod. 2) bildet den Rand von $\mathfrak{M}_1$. $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ sei ein in $\mathfrak{M}_1$ enthaltener Kantenweg. Wenn[1] $A_q=B$ und die Ecke B'' zu A_q geordnet ist, so lassen wir zu A_q die Ecke $T(B'')=B'$ ordnen. Da die Zwischenbehauptung nach der Annahme für $\mathfrak{G}_j$ richtig ist, so gibt es ein Rechteck R und die Abbildung Q von R in $\mathfrak{M}$, so daß R und Q den Bedingungen 1, 2 und 3 genügen. Da der zu B'' bezw. C'' geordnete Kegel und der zu B' bezw. C' geordnete Kegel miteinander übereinstimmen, so ist die Behauptung richtig für $\mathfrak{G}_{j+1}$ im Falle 1.

Wir behandeln zweitens

Fall 2. Es gibt etwa auf S_1 die beiden Kanten $A'B'$ und $A'C'$, so daß das Dreieck ABC sowohl in dem zu $A'B'$ geordneten Schnitt als auch in dem zu $A'C'$ geordneten Schnitt enthalten ist.

Die Menge $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(O, A'B'+A'C')$ ist homöomorph mit

---

1) Vgl. S. 29. Zeile 11.

der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A'''B''C''$ gibt und $S'_1-\{A''B''C''+A'''B''C''\}$ ebenso wie S_1 in Dreiecke zerlegt ist. Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $(x_1^2+x_2^2+x_3^2<1)-(O,A'B'+A'C')$ derart konstruieren, daß $T(A''B''C'')=T(A'''B''C'')=(O,\ A'B'+A'C')$ ist und die anderen Dreiecke auf S'_1 durch T auf die Dreiecke auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$ und $T'_1(A''B''C'')=ABC$. $T'_1(S'_1)$ (mod. 2) bildet den Rand von $\mathfrak{M}_1$. Wir bezeichnen den zu der Ecke A' auf S_1 geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$. $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa $\mathfrak{B}_1(A)$, ist zu der Ecke A'' und der andere $\mathfrak{B}_2(A)$ ist zu A''' geordnet.

$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ sei ein in $\mathfrak{M}_1$ enthaltener Kantenweg. Wenn $A_q=A$ und die Ecke A'' zu A_q geordnet ist, so gibt es eine Folge der Dreiecke $A_{q-1}A_qD_1$, $A_qD_1D_2$, $\cdots$, $A_qD_{l-1}D_l$, $A_qD_lA_{q+1}$, derart daß alle Dreiecke $A_{q-1}A_qD_1$, $A_qD_1D_2$, $\cdots$, $A_qD_{l-1}D_l$, $A_qD_lA_{q+1}$ sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist, und daß, wenn eine Ecke $D_k(1\leqq k\leqq l)$ bereits in $\mathfrak{G}_{j+1}$ enthalten ist, so eine Ecke D' auf S'_1 sich zu D ordnen läßt und sowohl $D_{k-1}D_k(D_0=A_{q-1})$ als auch $D_kD_{k+1}(D_{l+1}=A_{q+1})$ in dem zu D' geordneten Kegel enthalten ist, und daß, wenn A_{q-1} oder A_{q+1}, etwa A_{q-1}, in $\mathfrak{G}_{j+1}$ enthalten ist und A'_{q-1} auf S'_1 zu A_{q-1} geordnet ist, so $A_{q-1}D_1$ in dem zu A'_{q-1} geordneten Kegel enthalten ist

Für alle mit A übereinstimmenden und zu A'' oder A''' geordneten Ecken unter A_1, A_2, $\cdots$, A_n nehmen wir die obigen Folgen der Dreiecke auf. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $A_q=A$ und die Ecke A'' zu A_q geordnet ist und dasselbe für die anderen Ecken unter A_1, A_2, $\cdots$, A_n nicht der Fall ist.

Es gibt dann nach der Annahme ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und Q_1 den folgenden Bedingungen genügen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt und die Seite von R_1 ist in Kanten $A''_1A''_2$, $\cdots$, $A''_{q-2}A''_{q-1}$, $A''_{q-1}D''_1$, $D''_1D''_2$, $\cdots$, $D''_{l-1}D''_l$, $D''_lA''_{q+1}$, $A''_{q+1}A''_{q+2}$, $\cdots$, $A''_{n-1}A''_n$, $A''_nA''_1$ zerlegt.

2. EFG sei ein Dreieck auf R_1, so ist $Q_1(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q_1(A''_1A''_2)=A_1A_2$, $\cdots$, $Q_1(A''_{q-2}A''_{q-1})=A_{q-2}A_{q-1}$, $Q_1(A''_{q-1}D''_1)=A_{q-1}D_1$, $Q_1(D''_1D''_2)=D_1D_2$, $\cdots$, $Q_1(D''_{l-1}D''_l)=D_{l-1}D_l$, $Q_1(D''_lA''_{q+1})=D_lA_{q+1}$, $\cdots$, $Q(A''_nA''_1)=A_nA_1$.

3. Bedingung 3 gilt für R_1 und Q_1.

Wir nehmen ein Rechteck R_2 auf, und wir zerlegen das Rechteck $\dot{R}_2$ in Dreiecke $A''_q\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_1$, $A''_q\widetilde{D}''_1\widetilde{D}''_2$, $\cdots$, $A''_q\widetilde{D}''_{l-1}\widetilde{D}''_l$, $A''_q\widetilde{D}''_l\widetilde{A}''_{q+1}$ und wir bilden das Rechteck R_2 in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit Q_2 bezeichnen, $Q_2(A''_q\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_1) = A_qA_{q-1}D_1$, $Q_2(A''_q\widetilde{D}''_1\widetilde{D}''_2) = A_qD_1D_2, \cdots$, $Q_2(A_q\widetilde{D}''_{l-1}\widetilde{D}''_l) = A_qD_{l-1}D_l$, $Q_2(A''_q\widetilde{D}''_l\widetilde{A}''_{q+1}) = A_qD_lA_{q+1}$ ist.

Wir setzen $\widetilde{D}''_0 = \widetilde{A}''_{q-1}$, $\widetilde{D}''_{l+1} = \widetilde{A}''_{q+1}$, und wir identifizieren die Kante $\widetilde{D}''_{s-1}\widetilde{D}''_s$ $(s = 1, 2, \cdots, l+1)$ von R_2 und die Kante $D''_{s-1}D''_s$ von R_1, so erhalten wir ein neues Rechteck R. Wir bilden nun das Rechteck R in $\mathfrak{M}$ ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit Q bezeichnen, für ein auf R_1 liegendes Dreieck EFG es $Q_1(EFG) = Q(EFG)$ gilt und für ein auf R_2 liegendes Dreieck EFG es $Q_2(EFG) = Q(EFG)$ gilt. R und Q genügen dann den Bedingungen 1, 2 und 3 in der Zwischenbehauptung.

Wir behandeln drittens

Fall 3. Es gibt auf etwa S_1 drei Kanten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$, so daß das Dreieck ABC in dem zu $A'B'$ bezw. $B'C'$ bezw. $C'A'$ geordneten Schnitt enthalten ist.

Die Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ wird durch $(O, A'B' + B'C' + C'A')$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zerlegt. Die Sphäre S_1 wird durch $A'B' + B'C' + C'A'$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt, und die Begrenzung von $\mathfrak{N}_1$ besteht aus der Menge $(O, A'B' + B'C' + C'A')$ und einer von den beiden H_1 und H_2, etwa H_1, und die Begrenzung von $\mathfrak{N}_2$ besteht aus der Menge $(O, A'B' + B'C' + C'A')$ und H_2.

Wir zelegen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke, so daß es auf S'_1 ein Dreieck $A''B''C''$ gibt und $S'_1 - A''B''C''$ ebenso wie H_1 in Dreiecke zerlegt ist. Wir konstruieren eine topologische Abbildung T von der Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$ auf $\mathfrak{N}_1$, derart daß $T(A''B''C'') = (O, A'B' + B'C' + C'A')$ und die anderen Dreiecke auf S'_1 durch T auf die Dreiecke auf H_1 abgebildet werden.

Ebenfalls zerlegen wir die Sphäre $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke, so daß es auf S''_1 ein Dreieck $A'''B'''C'''$ gibt und $S''_1 - A'''B'''C'''$ ebenso wie H_2 in Dreiecke zerlegt ist. Wir konstruieren eine topologische Abbildung T' von der Kugel $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 < 1$ auf $\mathfrak{N}_2$, derart daß $T'(A'''B'''C''') = (O, A'B' + B'C' + C'A')$ und die anderen Dreiecke auf S''_1 durch T' auf die Dreiecke auf H_2 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T = T'_1$ $T_1T' = T''_1$ und $T'_1(A''B''C'') = T''_1(A'''B'''C''') = ABC$. $\mathfrak{K}_1$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Gebiete $\mathfrak{K}'_1$ und $\mathfrak{K}''_1$ zerlegt, und eines von den beiden $\mathfrak{K}'_1$ und $\mathfrak{K}''_1$, etwa $\mathfrak{K}'_1$, stimmt mit $T_1(\mathfrak{N}_1)$ überein und das andere $\mathfrak{K}''_1$ stimmt mit $T_1(\mathfrak{N}_2)$ überein.

Nach der Bedingung 7 bildet $T'_1(S'_1)$ bezw. $T''_1(S''_1)$ den Rand von dem 3-Komplex $\mathfrak{M}'_1$ bezw. $\mathfrak{M}''_1$, und es gilt $\mathfrak{M}'_1 + \mathfrak{M}''_1 = \mathfrak{M}_1$.

Wir bezeichnen den zu der Ecke A' bezw. B' bezw. C' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(C)$. $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa $\mathfrak{B}_1(A)$, ist zu A'' auf S'_1 geordnet und der andere $\mathfrak{B}_2(A)$ ist zu A''' auf S''_1 geordnet. $\mathfrak{B}(B)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(B)$ und $\mathfrak{B}_2(B)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(B)$ und $\mathfrak{B}_2(B)$, etwa $\mathfrak{B}_1(B)$, ist zu B'' auf S'_1 geordnet und der andere $\mathfrak{B}_2(B)$ ist zu B''' auf S''_1 geordnet. Ebenfalls wird $\mathfrak{B}(C)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(C)$ und $\mathfrak{B}_2(C)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(C)$ und $\mathfrak{B}_2(C)$, etwa $\mathfrak{B}_1(C)$, ist zu C'' auf S'_1 geordnet und der andere $\mathfrak{B}_2(C)$ ist zu C''' auf S''_1 geordnet.

$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ sei ein in $\mathfrak{M}'_1$ enthaltener Kantenweg. Wir nehmen an, daß eine Ecke A_q unter $A_1, A_2, \cdots, A_n$ mit einer von A, B, C, etwa mit A, übereinstimmt und die Ecke A'' auf S'_1 zu A_q geordnet ist. Nach der Annahme[1] ist sowohl $A_{q-1}A_q$ als auch $A_qA_{q+1}(A_0=A_n, A_{n+1}=A_1)$ in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten. Wenn die Kante $A_{q-1}A_q$ nicht in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist, so gibt es eine Folge der Dreiecke $A_{q-1}A_qD_1$, $A_qD_1D_2, \cdots$, $A_qD_{l-1}D_l$, so daß diese Dreiecke in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist und die Kanten $A_{q-1}A_q$, A_qD_1, A_qD_2, $\cdots$, A_qD_{l-1} nicht noch in $\mathfrak{G}_j$ enthalten sind und die Kante A_qD_l aber in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist. Es gibt dann eine Kante $A''D''_l$ auf S'_1, und das Dreieck $A_qD_{l-1}D_l$ ist in dem zu der Kante $A''D''_l$ geordneten Schnitt enthalten.

Ebenfalls, wenn die Kante A_qA_{q+1} nicht in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist, so gibt es eine Folge der Dreiecke $A_qA_{q+1}E_1$, $A_qE_1E_2$, $\cdots$, $A_qE_{m-1}E_m$, so daß diese Dreiecke in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist und die Kanten A_qA_{q+1}, A_qE_1, $\cdots$, A_qE_{m-1} nicht noch in $\mathfrak{G}_j$ enthalten sind und die Kante A_qE_m aber in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist. Es gibt dann eine Kante $A''E''_m$ auf S'_1, und das Dreieck $A_qE_{m-1}E_m$ ist in dem zu der Kante $A''E''_m$ geordneten Schnitt enthalten.

Wir nehmen an, daß sowohl $A''D''_l$ als auch $A''E''_m$ weder mit $A''B''$ noch mit $A''C''$ übereinstimmt. Wir bezeichnen die Menge aller auf S'_1 liegenden und mit A'' inzidenten Dreiecke mit M. M wird durch den Kantenweg $A''D''_l+A''E''_m$ in die beiden stark-zusammenhängenden 2-Komplexen M_1 und M_2 zerlegt, und das Dreieck $A''B''C''$ ist nur in einem von den beiden M_1 und M_2, etwa in M_2, enthalten.

Es sei $A''D''_l+D''_lF''_1+F''_1F''_2+\cdots+F''_{n-1}F''_n+F''_nE''_m+E''_mA''$ der Rand von M_2. Wir setzen $T'_1(A''D''_l)=AD_l$, $T'_1(D''_lF''_1)=D_lF_1$, $T'_1(F''_1F''_2)=F_1F_2$, $\cdots$, $T'_1(F''_{n-1}F''_n)=F_{n-1}F_n$, $T'_1(F''_nE''_m)=F_nE_m$, $T'_1(E''_mA'')=E_mA$.

$w=A_1A_2+\cdots+A_{q-2}A_{q-1}+A_{q-1}D_1+D_1D_2+\cdots+D_{l-1}D_l+D_lF_1+F_1F_2+\cdots+F_{n-1}F_n+F_nE_m+E_mE_{m-1}+\cdots+E_2E_1+E_1A_{q+1}+A_{q-1}A_{q+2}+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ ist dann ein in $\mathfrak{M}'_1$ enthaltener Kantenweg. Wir lassen zu der Ecken D_l, F_1, $\cdots$, F_n, E_m beziehungsweise die Ecken $T(D''_l)$, $T(F''_1)$, $\cdots$, $T(F''_n)$, $T(E''_m)$ auf S_1 ordnen.

Wenn $D_p(1<p<l)$ in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist, so gibt es auf S_1 eine Ecke

---

1) Vgl. S. 29. Zeile 11.

D'_p von der Art, daß der zu D'_p geordnete Kegel $\mathfrak{B}(D_p)$ das Dreieck $D_pD_{p+1}A_q$ enthält. Wir lassen dann zu der Ecke D_p die Ecke D'_p ordnen. Wenn $E_p(0<p<m)$ in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist, so verhalten wir uns ebenso.

Wir nehmen nun an, daß die von A_q verschiedenen Ecken unter A_1, $A_2, \cdots, A_n$ zu keiner von A'', B'', C'' geordnet ist. Da die Zwischenbehauptung nach der Annahme für $\mathfrak{G}_j$ richtig ist, so gibt es ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und Q_1 den folgenden Bedingungen genügen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von R_1 ist in Kanten $\widetilde{A}''_1\widetilde{A}''_2, \cdots, \widetilde{A}''_{q-2}\widetilde{A}''_{q-1}$, $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_1$, $\widetilde{D}''_1\widetilde{D}''_2, \cdots, \widetilde{D}''_{l-1}\widetilde{D}''_l$, $\widetilde{D}''_l\widetilde{F}''_1$, $\widetilde{F}''_1\widetilde{F}''_2$, $\cdots$, $\widetilde{F}''_{n-1}\widetilde{F}''_n$, $\widetilde{F}''_n\widetilde{E}''_m$, $\widetilde{E}''_m\widetilde{E}''_{m-1}, \cdots$, $\widetilde{E}''_2\widetilde{E}''_1$, $\widetilde{E}''_1\widetilde{A}''_{q+1}$, $\widetilde{A}''_{q+1}\widetilde{A}''_{q+2}, \cdots$, $\widetilde{A}''_{n-1}\widetilde{A}''_n$, $\widetilde{A}''_n\widetilde{A}''_1$ zerlegt.

2. EFG sei ein Dreieck auf R'_1, ist $Q_1(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q_1(\widetilde{A}''_1\widetilde{A}''_2) = A_1A_2, \cdots, Q(\widetilde{A}''_n\widetilde{A}''_1) = A_nA_1$.

3. Bedingung 3 gilt für R_1 und Q_1.

Wir nehmen ein Rechteck R_2 auf, und wir zerlegen das Rechteck R_2 in Dreiecke $\widetilde{A}''_q\bar{A}''_{q-1}\bar{D}''_1$, $\widetilde{A}''_q\bar{D}''_1\bar{D}''_2, \cdots$, $\widetilde{A}''_q\bar{D}''_{l-1}\bar{D}''_l$, $\widetilde{A}''_q\bar{D}''_l\bar{F}''_1$, $\widetilde{A}''_q\bar{F}''_1\bar{F}''_2$, $\cdots$, $\widetilde{A}''_q\bar{F}''_{n-1}\bar{F}''_n$, $\widetilde{A}''_q\bar{F}''_n\bar{E}''_m$, $\widetilde{A}''_q\bar{E}''_m\bar{E}''_{m-1}, \cdots$, $\widetilde{A}''_q\bar{E}''_2\bar{E}''_1$, $\widetilde{A}''_q\bar{E}''_1\bar{A}''_{q+1}$, und wir bilden R_2 in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit Q_2 bezeichnen, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{A}''_{q-1}\bar{D}''_1) = A_qA_{q-1}D_1$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{D}''_1\bar{D}''_2) = A_qD_1D_2, \cdots$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{D}''_{l-1}\bar{D}''_l) = A_qD_{l-1}D_l$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{D}''_l\bar{F}''_1) = A_qD_lF_1$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{F}''_1\bar{F}''_2) = A_qF_1F_2, \cdots$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{F}''_{n-1}\bar{F}''_n) = A_qF_{n-1}F_n$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{F}''_n\bar{E}''_m) = A_qF_nE_m$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{E}''_m\bar{E}''_{m-1}) = A_qE_mE_{m-1}\cdots$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{E}''_2\bar{E}''_1) = A_2E_2E_1$, $Q_2(\widetilde{A}''_q\bar{E}''_1\bar{A}''_{q+1}) = A_qE_1A_{q+1}$ ist.

Wir setzen $\bar{A}''_{q-1} = \bar{D}''_0$, $\bar{A}''_{q+1} = \bar{E}''_0$, $\bar{F}''_1 = \bar{D}''_{l+1}$ und $\bar{F}''_{n+1} = \bar{E}''_m$, und wir identifizieren die Kante $\widetilde{D}''_{s-1}\widetilde{D}''_s (s = 1, 2, \cdots, l+1)$ und die Kante $\bar{D}''_{s-1}\bar{D}''_s$, die Kante $\widetilde{F}''_{s-1}\widetilde{F}''_s (s = 2, 3, \cdots, n+1)$ und die Kante $\bar{F}''_{s-1}\bar{F}''_s$, die Kante $\widetilde{E}''_{s-1}\widetilde{E}''_s$ und die Kante $\bar{E}''_{s-1}\bar{E}''_s (s = 1, 2, \cdots, m)$, so erhalten wir ein neues Rechteck R. Wir bilden nun das Rechteck R in $\mathfrak{M}$ ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit Q bezeichnen, für ein auf R_1 liegendes Dreieck EFG es $Q(EFG) = Q_1(EFG)$ gilt und für ein auf R_2 liegendes Dreieck EFG es $Q(EFG) = Q_2(EFG)$ gilt. R uud Q genügen dann den Bedingungen 1, 2 und 3 in der Zwischenbehauptung.

Wir nehmen nun an, daß $A''D''_l$ mit einer von den beiden $A''B''$ und $A''C''$, etwa mit $A''B''$, übereinstimmt. Wir bezeichnen die beiden auf S'_1 liegenden und mit $A''B''$ inzidenten Dreiecke mit $A''B''C''$ und $A''B''G''$, und wir setzen $T'_1(A''B''G'') = ABG$. Der zu $A''B''$ geordnete Schnitt wird durch das Dreieck ABD_{l-1} in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$ zerlegt, und etwa $\mathfrak{P}_1(AB)$ hat als Endedreiecke die beiden ABG und ABD_{l-1}.

ABD_{l-1}, $ABK_1, \cdots, ABK_t$, ABG sind alle in $\mathfrak{P}_1(AB)$ enthaltenen Dreiecke. Wir ersetzen die Kante $D_{l-1}D_l$ in w durch $D_{l-1}K_1 + \cdots + K_{t-1}K_t + K_tG$. Diskussion läuft dann ganz analog mit der obigen.

Wenn nur eine von den beiden $A_{q-1}A_q$ und A_qA_{q+1}, etwa $A_{q-1}A_q$, bereits in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist und aber weder mit AB noch mit AC übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog mit der obigen.

Wenn nur eine von den beiden $A_{q-1}A_q$ und A_qA_{q+1}, etwa $A_{q-1}A_q$, bereits in $\mathfrak{G}_j$ enthalten ist und mit einer von den beiden AB und AC, etwa mit AB, übereinstimmt, so ersetzen wir die Kante $A_{q-1}A_q$ in w durch $BG+GA$. Daher können wir von Anfang an annehmen, daß sowohl $A_{q-1}A_q$ als auch A_qA_{q+1} weder mit AB noch mit AC übereinstimmt.

Wenn $A_{q-1}A_q$ und $A_{q+1}A_q$ in $\mathfrak{G}_j$ enthalten sind, und wenn der zu A_{q-1} geordnete[1] Kegel und der zu A_{q+1} geordnete Kegel nicht miteinander übereinstimmen, so verläuft Diskussion ganz analog.

Wenn $A_{q-1}A_q$ und $A_{q+1}A_q$ miteinander übereinstimmen und in $\mathfrak{G}_j$ enthalten sind, und wenn der zu A_{q-1} geordnete[1] Kegel und der zu A_{q+1} geordnete Kegel miteinander übereinstimmen, so ersetzen wir den Kantenweg $A_1A_2 + \cdots + A_{q-1}A_q + A_qA_{q+1} + \cdots + A_nA_1$ durch den Kantenweg $A_1A_2 + \cdots + A_{q-2}A_{q-1} + A_{q-1}A_{q+2} + \cdots + A_nA_1$. Es gibt ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$, so daß R_1 und Q_1 den folgenden Bedingungen genügen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von R_1 ist in Kanten $A''_1A''_2$, $A''_2A''_3, \cdots$, $A''_{q-2}A''_{q-1}$, $A''_{q+1}A''_{q+2}, \cdots$, $A''_nA''_1$ zerlegt.

2. EFG sei ein Dreieck auf R_1, so ist $Q_1(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q_1(A''_1A''_2) = A_1A_2, \cdots$, $Q_1(A''_{q-2}A''_{q-1}) = A_{q-2}A_{q-1}$, $Q_1(A''_{q+1}A''_{q+2}) = A_{q+1}A_{q+2}$, $\cdots$, $Q_1(A''_nA''_1) = A_nA_1$, wo $A''_{q-1} = A''_{q+1}$ ist.

3. Bedingung 3 gilt für R_1 und Q_1.

Wir bezeichnen den zu A'_{q-1} geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A_{q-1})$. Es gibt eine Folge der Dreiecke $A_{q+1}A_{q+2}D_1$, $A_{q+1}D_1D_2, \cdots$, $A_{q+1}D_{l-1}D_l$, $A_{q+1}D_lA_q$, so daß diese Dreiecke in $\mathfrak{B}(A_{q-1})$ enthalten ist und das Dreieck $A_{q+1}D_lA_q$ in $\mathfrak{B}_1(A_q)$ enthalten ist. Wir nehmen ein Rechteck R_2 auf, und wir zerlegen R_2 in Dreiecke $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{A}''_{q+2}\widetilde{D}''_1$, $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_1\widetilde{D}''_2, \cdots$, $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_{l-1}\widetilde{D}''_l$, $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_lA''_q$, $A''_{q+1}\widetilde{A}''_{q+2}\widetilde{D}''_1, \cdots$, $A''_{q+1}\widetilde{D}''_{l-1}\widetilde{D}''_l$, $A''_{q+1}\widetilde{D}''_lA''_q$, und wir bilden R_2 in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit Q_2 bezeichnen, $Q_2(\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{A}''_{q+2}D''_1) = Q_2(A''_{q+1}\widetilde{A}''_{q+2}\widetilde{D}''_1) = A_{q-1}A_{q+2}D_1, \cdots$, $Q_2(\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{D}''_lA''_q) =$

1) Vgl. S. 29. Zeile 11.

$Q_2(A''_{q+1}\widetilde{D}''_l A''_q) = A_{q+1}D_l A_q$ ist.

Wir identifizieren die Kante $A''_{q-1}A''_{q+2}$ und die Kante $\widetilde{A}''_{q-1}\widetilde{A}''_{q+2}$, so erhalten wir ein neues Rechteck R. Wir bilden R in $\mathfrak{M}$ derart ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit Q bezeichnen, so für ein auf R_1 liegendes Dreieck EFG es $Q(EFG) = Q_1(EFG)$ gilt und für ein auf R_2 liegendes Dreieck EFG es $Q(EFG) = Q_2(EFG)$ gilt. R und Q genügen dann offenbar den Bedingungen 1, 2, und 3.

Auch wenn die von A_q verschiedenen Ecken unter $A_1, A_2, \cdots, A_n$, mit einer von A, B, C übereinstimmt, so läuft Disknssion ganz analog.

W. z. b. w.

Zwischenbehauptung II. *R sei ein Rechteck und Q sei eine Abbildung von R in $\mathfrak{M}$, so daß R in Dreiecke zerlegt ist und, daß, wenn EFG ein Dreieck auf R ist, so $Q(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$ ist. $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_n, \varDelta_{n+1}(=\varDelta_1)$ sei eine Folge der Dreiecke auf R, und $\varDelta_j$ habe mit $\varDelta_{j+1}(j = 1, 2, \cdots, n)$ mindestens eine Kante gemeinsam.*

$\varDelta_1$ sei $A'B'C'$, und wir setzen $Q(A'B'C') = ABC$, $Q(B'C') = BC$, $Q(A'B') = AB$ und $Q(C'A') = CA$. Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $ABCD$ und $ABCE$ in $\mathfrak{M}$, die mit ABC inzident sind. Wir lassen zu dem Dreieck $A'B'C' = \varDelta_1$ eines von den beiden $ABCD$ und $ABCE$, etwa $ABCD$, ordnen.

Wenn $Q(\varDelta_2)$ und $Q(\varDelta_1)$ nicht miteinander übereinstimmen, so haben $Q(\varDelta_2)$ und $Q(\varDelta_1)$ eine einzige Kante, etwa BC, gemeinsam. Wir setzen $\varDelta_2 = B'C'F'$ und $Q(B'C'F') = BCF$. Die beiden Dreiecke BCA und BCF bestimmen genau die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, die als Endedreiecke die beiden Dreiecke BCA und BCF haben.

Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $BCFG$ und $BCFH$ in $\mathfrak{M}$, die mit BCF inzident ist. Wenn BCD mit BCF übereinstimmt, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ aus den beiden Dreiecken BCA und BCF besteht. In diesem Falle stimmt eines von den beiden $BCFG$ und $BCFH$, etwa $BCFG$, mit $BCDA$ überein. Wir lassen zu $\varDelta_2$ das Simplex $BCFG$ ordnen.

Wenn BCD nicht mit BCF übereinstimmt, so ist das Dreieck BCD nur in einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(BC)$, enthalten. Wenn sowohl BCG als auch BCH nicht mit BCA übereinstimmt, so ist nur eines von den beiden BCG und BCH, etwa BCG, in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten. Wir lassen dann zu $\varDelta_2$ das Simplex $BCFG$ ordnen. Wenn eines von den beiden BCG und BCH, etwa BCG, mit BCA übereinstimmt, so lassen wir zu $\varDelta_2$ das Simplex $BCFH$ ordnen.

Wenn $Q(\varDelta_2)$ und $Q(\varDelta_1)$ miteinander übereinstimmen, so lassen wir zu $\varDelta_2$ das Simplex $ABCE$ ordnen. Also können wir zu $\varDelta_2$ ein bestimmtes

3-*Simplex* $BCFG$ *oder* $BCFH$ *ordnen lassen. Auf derselbe Vorschrift können wir aus dem zu* Δ_2 *geordneten Simplex das zu* Δ_3 *geordnete Simplex bestimmen. Schliesslich können wir aus dem zu* Δ_n *geordnete Simplex das zu* Δ_1 *geordnete Simplex bestimmen, das wir mit* α *bezeichnen. Das Simplex* α *stimmt dann mit* $ABCD$ *überein.*

Beweis. Wir behandeln erstens den Fall, wo das Rechteck R in Dreiecke $A'B'_1B'_2$, $A'B'_2B'_3$, $\cdots$, $A'B'_{q-1}B'_q$, $A'B'_qB'_1$ zerlegt ist und je zwei von $Q(A'B'_1)=AB_1$, $Q(A'B'_2)=AB_2$, $\cdots$, $Q(A'B'_q)=AB_q$ voneinander verschieden sind.

In diesem Falle können wir offenbar $Q(R)$ in E^3 einbetten, so daß $E^3-Q(R)$ mit der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ homöomorph ist. Wir zerlegen die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ in Dreiecke $A''B''_1B''_2$, $A''B''_2B''_3$, $\cdots$, $A''B''_{q-1}B''_q$, $A''B''_qB''_1$; $A'''B''_1B''_2$, $A'''B''_2B''_3$, $\cdots$, $A'''B''_{q-1}B''_q$, $A'''B''_qB''_1$, und wir bilden die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $E^3-Q(R)$ topologisch ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit T bezeichnen, $T(A''B''_1B''_2)=T(A'''B''_1B''_2)=AB_1B_2$, $T(A''B''_2B''_3)=T(A'''B''_2B''_3)=AB_2B_3$, $\cdots$, $T(A''B''_{q-1}B''_q)=T(A'''B''_{q-1}B''_q)=AB_{q-1}B_q$, $T(A''B''_qB''_1)=T(A'''B''_qB''_1)=AB_qB_1$ ist.

Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $AB_1B_2D_1$ und $AB_1B_2E_1$ in $\mathfrak{M}$, die zu dem Dreieck AB_1B_2 inzident ist. Eines von den beiden $AB_1B_2D_1$ und $AB_1B_2E_1$, etwa $AB_1B_2D_1$, ist nach der Annahme in der Zwischenbehauptung zu dem Dreieck $A'B'_1B'_2$ geordnet.

Anderseits ist $AB_1B_2D_1$ nach der Bedingung 6 im 1. Schritte zu einem von den beiden $A''B''_1B''_2$ und $A'''B''_1B''_2$, etwa zu $A''B''_1B''_2$, geordnet. Wir bezeichnen dann das zu $A''B''_{i-1}B''_i(i=3, \cdots, q+1\,;\ B''_{q+1}=B''_1)$ geordnete 3-Simplex mit $AB_{i-1}B_iD_{i-1}$. Es ist leicht einzusehen, daß, wenn wir auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung das zu $A'B'_2B'_3$ geordnete Simplex bestimmen, so das Simplex $AB_2B_3D_2$ zu $A'B'_2B'_3$ sich ordnen läßt. Folglich ist die Zwischenbehauptung richtig, wenn das Rechteck R aus den Dreiecken $A'B'_1B'_2$, $A'B'_2B'_3$, $\cdots$, $A'B'_{q-1}B'_q$, $A'B'_qB'_1$ besteht.

Wenn das Rechteck R in Dreiecke $A'B'_1B'_2$, $A'B'_2B'_3$, $\cdots$, $A'B'_{q-1}B'_q$ zerlegt ist, und wenn je zwei von $Q(A'B'_1)$, $Q(A'B'_2)$, $\cdots$, $Q(A'B'_q)$ voneinander verschieden sind, so können wir auf die ganz analoge Weise mit der obigen beweisen, daß die Zwischenbehauptung richtig ist.

Wir nehmen nun an, daß eine Ecke A' auf R nicht auf der Seite von R liegt und alle Dreiecke auf R mit A' inzident sind. Die Seite von R ist in die Kanten $B'_1B'_2$, $B'_2B'_3$, $\cdots$, $B'_{q-1}B'_q$, $B'_qB'_1$ zerlegt. Wir behandeln erstens den Fall, worin es nur eine einzige, die beiden Ecken A' und $B'_s(s=1, 2, \cdots, q)$ verbindende, Kante auf R gibt. Wenn die Kanten $Q(A'B'_i)$ und $Q(A'B'_k)$ $(i\neq k)$ miteinander übereinstimmen, schneiden wir das Rechteck R längs des Kantenweges $A'B'_i+A'B'_k$, so erhalten wir die beiden Rechtecke R_1 und R_2. Für R_1 und R_2 benehmen wir uns ebenfalls.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $Q(A'B'_l)$ und $Q(A'B'_m)$ $(l \neq m)$ nicht miteinander übereinstimmen, wenn mindestens eine von B'_l und B'_m weder mit B'_i noch mit B'_k übereinstimmt. Die Seite von R_1 ist in die Kanten $B'_1B'_2$, $B'_2B'_3$, $\cdots$, $B'_{i-1}B'_i$, B'_iA', $A'B'_k$, $B'_kB'_{k+1}$, $\cdots$, $B'_{q-1}B'_q$, $B'_qB'_1$ zerlegt und die Seite von R_2 ist in die Kanten $A'B'_i$, $B'_iB'_{i+1}$, $\cdots$, $B'_{k-1}B'_k$, B'_kA' zerlegt. Wir identifizieren nun die Seite $A'B'_i$ und die Seite $A'B'_k$ von R_1, so erhalten wir ein neues Rechteck R'_1. Ebenfalls identifizieren wir die Seite $A'B'_i$ und die Seite $A'B'_k$ von R_2, so erhalten wir ein neues Rechteck R'_2.

Wie bereits gezeigt worden ist, ist die Zwischenbehauptung für R'_1 und R'_2 richtig. Wir nehmen an, daß $\varDelta_1 = A'B'_1B'_2$ ist und das Simplex $AB_1B_2D_1$ zu $\varDelta_1$ geordnet ist. Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R'_1 können wir zu jedem Dreieck ein 3-Simplex ordnen lassen. Wir bezeichnen das zu $A'B'_{i-1}B'_i$ bezw. $A'B'_kB'_{k+1}$ geordnete Simplex mit $AB_{i-1}B_iD_{i-1}$ bezw. $AB_kB_{k+1}D_k$.

Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R können wir aus dem Simplex $AB_{i-1}B_iD_{i-1}$ das zu $A'B'_iB'_{i+1}$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit $AB_iB_{i+1}D_i$ bezeichnen. Ebenfalls, indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R_2 anwenden, können wir zu dem Dreieck $A'B'_{k-1}B'_k$ ein Simplex $AB_{k-1}B_kD_{k-1}$ ordnen lassen.

Die beiden Dreiecke $AB_{i-1}B_i$ und AB_kB_{k+1} bestimmen genau die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB_i)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_i)$. Das Dreieck AB_iB_{i+1} ist in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_i)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_i)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(AB_i)$, enthalten. Enbefalls ist $AB_{k-1}B_k$ in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_i)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_i)$ enthalten. Indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R anwenden, können wir aus dem Simplex $AB_{k-1}B_kD_{k-1}$ zu dem Dreieck $A'B'_kB'_{k+1}$ ein 3-Simplex ordnen lassen, das wir mit α bezeichnen. Auch wenn $AB_{k-1}B_k$ in $\mathfrak{P}_1(AB_i)$ enthalten ist, oder auch wenn $AB_{k-1}B_k$ in $\mathfrak{P}_2(AB_i)$ enthalten ist, können wir leicht einsehen, daß das Simplex α mit $AB_kB_{k+1}D_k$ übereinstimmt.

Wir behandeln zweitens den Fall, worin es auf R die beiden, die Ecken A' und B'_i verbindenden, Kanten l und l_1 gibt. Wir schneiden das Rechteck R längs des Kantenweges $l+l_1$, so erhalten wir das neue Rechteck R_1, das durch $l+l_1$ berandet ist. Der Rand von $R-R_1$ besteht aus $B'_1B'_2+B'_2B'_3+\cdots+B'_{q-1}B'_q+B'_qB'_1+l+l_1$. Wir identifizieren die beiden Kanten l und l_1 von $R-R_1$, so erhalten wir ein neues Rechteck R_2. Für R_1 und R_2 benehmen wir uns ebenfalls.

Der Einfachheit halber nehmen[1] wir an, daß es nur eine einzige, die Ecken A' und $B'_s (s \neq i)$ verbindende, Kante gibt, und daß es genau die

[1] Auch wenn diese Annahme nicht der Fall ist, läuft Diskussion ganz analog.

beiden, A' und B'_i verbindenden, Kanten gibt und es eine einzige, A' und eine von $B'_s(s=1,\ 2, \cdots,\ q)$ verschiedene Ecke, verbindende Kante gibt. Die Seite von R_1 ist in die beiden Kanten l und l_1 zerlegt. Wir bezeichnen das mit l bezw. l_1 inzidente Dreieck auf R_1 mit $A'B'_iD'=\delta_1$ bezw. $A'B'_iE'=\delta_2$. Das kann nicht sich ergeben, daß die Ecken D' und E' miteinander übereinstimmen und die Kanten B'_iD' und B'_iE nicht aber miteinander übereinstimmen, da alle Dreiecke auf R_1 mit der Ecke A' inzident sind. Wenn die beiden Ecken D' und E' nicht miteinander übereinstimmen, so müssen wir das mit der Kante B'_iD' inzidente und von δ_1 verschiedene Dreieck mit $\delta = B'_iD'A'$ bezeichnen. Wir bezeichnen die, die beiden Ecken B'_i und A' verbindende, Kante von δ mit l_2. Die beiden Kanten $Q(l)$ und $Q(l_2)$ müssen dann miteinander übereinstimmen. Dies widerspricht aber der Annahme, daß R_1 nicht in die beiden Rechtecke zerlegt werden kann. Wenn die Ecken D' und E' miteinander übereinstimmen und die Kanten $A'D'$ und $A'E'$ nicht miteinander übereinstimmen, so schneiden wir das Rechteck R_1 längs des Kantenweges $A'D'+E'A'$. Daher, wenn R_1 nicht in die beiden Rechtecke zerlegt werden kann, so muß das Rechteck R_1 aus den beiden Dreiecke $A'B'_iD'$ $(A'B'_i=l)$ und $A'B'_iD(A'B'_i=l_1)$ bestehen.

Die Zwischenbehauptung ist richtig für R_1 und R_2. Wir nehmen an, daß $\Delta_1=A'B'_1B'_2$ ist und das Simplex $AB_1B_2D_1$ zu Δ_1 geordnet ist. Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R_2 können wir zu jedem Dreieck ein 3-Simplex ordnen lassen. Wir bezeichnen das zu $A'B'_{i-1}B'_i$ bezw. $A'B'_iB'_{i+1}$ geordnete Simplex mit $AB_{i-1}B_iD_{i-1}$ bezw. $AB_iB_{i+1}D_i$.

Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R können wir aus dem Simplex $AB_{i-1}B_iD_{i-1}$ das zu $A'B'_iD'(A'B'_i=l)$ geordnete Simplex mit AB_iDF_1. Es gibt die beiden mit AB_iD inzidenten 3-Simplex AB_iDF_1 und AB_iDF_2 in $\mathfrak{M}$. Wir lassen zu $A'B'_iD'(A'B'_i=l_1)$ das Simplex AB_iDF_2 ordnen. Indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung für R anwenden, können wir aus dem Simplex AB_iDF_2 das zu $A'B'_iB'_{i+1}$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit α bezeichnen. Es ist dann leicht einzusehen, daß das Simplex α mit $AB_iB_{i+1}D_i$ übereinstimmt.

Die Zwischenbehauptung ist offenbar richtig, wenn das Rechteck R aus den beiden Dreiecken besteht. Wir nehmen nun an, daß die Zwischenbehauptung richtig ist, wenn die Anzahl aller auf R liegenden Dreiecke $=n-1$ ist, und wir wollen beweisen, daß die Zwischenbehauptung richtig ist, auch wenn die Anzahl aller auf R liegenden Dreiecke $=n$ ist.

Angenommen in der Tat, daß die Anzahl aller auf R liegenden Dreiecke $=n$ ist. Es gibt ein Dreieck δ auf R, so daß $R-\delta$ auch ein Rechteck bildet. Wir setzen $\delta=A'B'C'$, so liegt mindestens eine Kante unter $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ auf der Seite von R.

Wir nehmen erstens an, daß die Kante $B'C'$ auf der Seite von R liegt und die anderen beiden Kanten $A'B'$ und $A'C'$ aber nicht auf der Seite von R liegt. Die Ecke A' liegt dann nicht auf der Seite von R.

$\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_p, \varDelta_{p+1}(=\varDelta_1)$ sei eine Folge der Dreiecke auf R, und $\varDelta_j$ habe mit $\varDelta_{j+1}(j=1, 2, \cdots, p)$ mindestens eine Kante gemeinsam. Wir nehmen an, daß $\varDelta_j=\delta$ ist, und wir bezeichnen das zu $\varDelta_1$ geordnete Simplex mit α_1. Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung bestimmen wir das zu $\varDelta_{j-1}$ geordnete Simplex, das wir mit α_{j-1} bezeichnen.

Wenn sowohl $\varDelta_{j-1}$ und $\varDelta_j$ als auch $\varDelta_j$ und $\varDelta_{j+1}$ dieselben Kanten $A'B'$ und $A'C'$ oder dieselbe Kante $A'B'$ gemeinsam haben, so müssen $\varDelta_{j+1}$ und $\varDelta_{j-1}$ miteinander übereinstimmen. Wir können aus α_{j-1} das zu $\varDelta_j$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit α_j bezeichnen. Ebenfalls können wir aus α_j das zu $\varDelta_{j+1}$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit α_{j+1} bezeichnen. Die beiden Simplexe α_{j-1} und α_{j+1} stimmen dann offenbar überein.

Wir nehmen nun an, daß $\varDelta_{j-1}$ und $\varDelta_j$ die Kante $A'B'$ gemeinsam haben und $\varDelta_j$ und $\varDelta_{j+1}$ die Kante $A'C'$ gemeinsam haben. Wir nehmen dann eine Folge der Dreiecke $\varDelta'_j, \varDelta'_{j+1}, \cdots, \varDelta'_{j+k}$ auf R auf, so daß diese Dreiecke mit A' inzident sind und jedes Dreieck mit dem folgenden mindestens eine, mit der Ecke A' inzidente, Kante gemeinsam hat, und daß $\varDelta'_j$ bezw. $\varDelta'_{j+k}$ mit $\varDelta_{j-1}$ bezw. $\varDelta_{j+1}$ eine, mit der Ecke A' inzidente, Kante gemeinsam hat.

Wir bestimmen aus α_{j-1} das zu $\varDelta'_j$ geordnete Simplex, das wir mit β_1 bezeichnen. Ebenfalls bestimmen wir aus β_1 das zu $\varDelta'_{j+1}$ geordnete Simplex, das wir mit β_2 bezeichnen. Endlich können wir das zu $\varDelta'_{j+k}$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit β_k bezeichnen. Aus β_k bestimmen wir das zu $\varDelta_{j+1}$ geordnete Simplex, das wir mit β_{k+1} bezeichnen. Das Simplex β_{k+1} muß[1] dann mit α_{j-1} übereinstimmen.

Wenn die anderen Dreiecke, außer $\varDelta_j$, unter $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_p$ nicht mit $A'B'C'$ übereinstimmen, so sind alle Dreiecke $\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_{j-1}, \varDelta'_j, \varDelta'_{j+1}, \cdots, \varDelta'_{j+k}, \varDelta_{j+1}, \cdots, \varDelta_p$ in $R-\delta$ enthalten. Auf der Vorschrift in der Zwischenbehauptung können wir das zu $\varDelta_p$ geordnete Simplex bestimmen, das wir mit α_p bezeichnen. Aus α_p lassen wir zu $\varDelta_1$ ein Simplex ordnen, das mit α_1 übereinstimmen muß, da die Zwischenbehauptung nach der Annahme für $R-\delta$ richtig ist.

Wir nehmen zweitens an, daß die beiden Kanten $A'B'$ und $B'C'$ auf der Seite von R liegt und die Kante $A'C'$ nicht auf der Seite von R liegt.

$\varDelta_1, \varDelta_2, \cdots, \varDelta_p, \varDelta_{p+1}(=\varDelta_1)$ sei eine Folge der Dreiecke auf R, und $\varDelta_j$ habe mit $\varDelta_{j+1}$ $(j=1, 2, \cdots, p)$ mindestens eine Kante gemeinsam. Wir

1) Vgl. S. 37. Zeile 34 — S. 39 Zeile 32.

nehmen an, daß $\Delta_j=\delta$ ist, und wir bezeichnen das zu Δ_1 geordnete Simplex mit α_1. Indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung für $\Delta_1, \Delta_2 \cdots \Delta_{j-1}$ anwenden, können wir das zu Δ_{j-1} geordnete Simplex bestimmen, das wir mit α_{j-1} bezeichnen.

Sowohl Δ_{j-1} und Δ_j als auch Δ_j und Δ_{j+1} haben dieselbe Kante $A'C'$ gemeinsam. Wir können aus α_{j-1} das zu Δ_j geordnete Simplex α_j bestimmen. Ebenfalls können wir aus α_j das zu Δ_{j+1} geordnete Simplex α_{j+1} bestimmen. Die beiden α_{j-1} und α_{j+1} müssen dann offenbar übereinstimmen.

Wenn die anderen Dreiecke, außer Δ_j, unter $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_p$ nicht mit $A'B'C'$ übereinstimmen, so sind alle Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{j-1}(=\Delta_{j+1}), \Delta_{j+2}, \cdots, \Delta_p, \Delta_1$ in $R-\delta$ enthalten. Indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung für $\Delta_{j-1}, \Delta_{j+2}, \cdots, \Delta_p$ anwenden, können wir das zu Δ_p geordnete Simplex α_p bestimmen. Aus α_p lassen wir zu Δ_1 ein Simplex ordnen, das mit α_1 übereinstimmen muß, da die Zwischenbehauptung für $R-\delta$ gilt.

Auch wenn die anderen Dreiecke, außer Δ_j, mit $A'B'C'$ übereinstimmen, läuft Diskussion ganz analog. W. z. b. w.

Definition IV. R sei ein Rechteck und Q sei eine Abbildung von R in $\mathfrak{M}$, so daß R in Dreiecke zerlegt ist und, daß, wenn EFG ein Dreieck auf R ist, so $Q(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$ ist. $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ sei eine Folge der Dreiecke auf R, und Δ_j habe mit $\Delta_{j+1} (j=1, 2, \cdots, n-1)$ mindestens eine Kante gemeinsam.

Wir setzen $\Delta_1=A'B'C'$ und $Q(A'B'C')=ABC$. Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $ABCD$ und $ABCE$ in $\mathfrak{M}$, die mit ABC inzident sind. Wir lassen zu dem $\Delta_1=A'B'C'$ eines von den beiden $ABCD$ und $ABCE$, etwa $ABCD$, ordnen. Indem wir die Vorschrift in der Zwischenbehauptung II für die Folge $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ anwenden, können wir zu dem Dreieck Δ_n ein 3-Simplex ordnen lassen, das mit dem $Q(\Delta_n)$ inzident ist. Dieses 3-Simplex bezeichnen wir mit α.

Nach der Zwischenbehauptung II ist das Simplex α abhängig nur von $ABCD$ und nicht von der Folge $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$. Wir sagen von jetzt an, daß die beiden Simplexe $ABCD$ und α voneinander abhängig sind.

ABC sei ein Dreieck in $\mathfrak{M}$, so daß ABC mit $\mathfrak{G}_{i-1}$[1] die Kante BC und die Ecke A gemeinsam und aber nicht die Kanten AC und BA gemeinsam hat. Da weder BA noch CA nach der Annahme nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, gibt es eine Ecke A' auf einer $S_j (j=1, 2, \cdots, p)$, derart daß sowohl BA als auch CA in dem zu A' geordneten Kegel $\mathfrak{B}(A)$ enthalten ist. Es gibt auch auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa S_1, eine Kante $B'C'$, so daß

[1] Vgl. S. 28. Zeile 10. $\mathfrak{G}_{i-1}$ ist null-homotop.

das Dreieck $A|BC$ in dem zu $B'C'$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ enthalten ist. Die Ecke A' muß dann nach den Bedingungen 7 und 3 für $\mathfrak{G}_{i-1}$ auf S_1 liegen.

Es gibt auf S_1 die Kanten $A'B'_1$, $B'_1B'_2$, $\cdots$, $B'_{n-1}B'_n$, so daß $B'_n = B'$ ist und der Kantenweg $A'B'_1 + B'_1B'_2 + \cdots + B'_{n-1}B'_n$ einen einfachen Bogen bildet und die Ecke C' mit keiner von B'_1, B'_2, $\cdots$, B'_{n-1} übereinstimmt. Wir setzen $A' = B'_0$, und wir bezeichnen den zu $B'_{j-1}B'_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(B_{j-1}B_j)$. Wir nehmen ein in dem $\mathfrak{P}(B_{j-1}B_j)$ enthaltenes Dreieck $B_{j-1}B_jD_j$ auf. Nach der Zwischenbehauptung 1 gibt es ein Recheck $\widetilde{R}$ und die Abbildung Q von $\widetilde{R}$ in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.

1. $\widetilde{R}$ ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von $\widetilde{R}$ ist in Kanten $A''D''_1$, $D''_1B''_1$, $B''_1D''_2$, $D''_2B''_2 \cdots$, $B''_{n-1}D''_n$, $D''_nB''_n$, B''_nA'' zerlegt.

2. EFG sei ein Dreieck auf $\widetilde{R}$, so ist $Q(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q(A''D''_1) = AD_1$, $Q(D''_1B''_1) = D_1B_1$, $Q(B''_1D''_2) = B_1D_2$, $Q(D''_2B''_2) = D_2B_2$, $\cdots$, $Q(B''_{n-1}D''_n) = B_{n-1}D_n$, $Q(D''_nB''_n) = D_nB_n$.

3. Wir bezeichnen den zu der Ecke $B'_j (j = 1, 2, \cdots, n-1)$ geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(B_j)$ und den zu A' bezw. B' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$. Die Bilder aller, mit B''_j inzidenten, Dreiecke durch die Abbildung Q sind in dem Kegel $\mathfrak{B}(B_j)$ enthalten und die Bilder aller, mit B'' bezw. A'' inzidenten, Dreiecke durch die Abbildung Q sind in $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(A)$ enthalten.

Wenn $D_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ bereits in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so gibt es eine Ecke D'_j auf S_1, so daß sowohl D_jB_{j-1} als auch D_jB_j in dem zu D'_j geordneten Kegel $\mathfrak{B}(D_j)$ enthalten ist. Wenn D_j in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so sind die Bilder aller, mit D''_j inzidenten, Dreiecke durch Q in $\mathfrak{B}(D_j)$ enthalten.

Wir fügen zu dem Rechteck $\widetilde{R}$ die Dreiecke $A''D''_1B''_1$, $B''_1D''_2B''_2$, $\cdots$, $B''_{n-1}D''_nB''_n$ hinzu, so erhalten wir ein neues Rechteck R. Wir setzen $Q(A''D''_1B''_1) = AD_1B_1$, $Q(B''_1D''_2B''_2) = B_1D_2B_2$, $\cdots$, $Q(B''_{n-1}D''_nB''_n) = B_{n-1}D_nB_n$.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Kanten $A'B'_1$, $B'_1B'_2$, $\cdots$, $B'_{n-1}B'_n$ auf der Ebene $x_3 = 0$ liegt. Die Menge $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 - (O, A'B'_1 + B'_1B'_2 + \cdots + B'_{n-1}B'_n)$ ist dann offenbar homöomorph mit der Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$, wo O den Mittelpunkt von der Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ bedeutet.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen derart, daß es auf $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ die beiden Zellen Z_1 und Z_2 gibt und Z_1 durch die Kanten $\widetilde{A}''\widetilde{B}''$, $\widetilde{A}''\widetilde{B}''_1$, $\widetilde{B}''_1\widetilde{B}''_2$, $\cdots$, $\widetilde{B}''_{n-1}\widetilde{B}''_n (\widetilde{B}''_n = \widetilde{B}'')$ und Z_2 durch die Kanten $\widetilde{A}''\widetilde{B}''$, $\widetilde{A}''\widetilde{B}'''_1$, $\widetilde{B}'''_1\widetilde{B}'''_2$, $\cdots$, $\widetilde{B}'''_{n-1}\widetilde{B}'''_n (\widetilde{B}'''_n = \widetilde{B}'')$ berandet ist, und daß $(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1) - (Z_1 + Z_2)$ ebenso wie S_1 in Dreiecke zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(O,\ A'B'_1+B'_1B'_2+\cdots+B'_{n-1}B'_n)$ derart konstruieren, daß, wenn wir die induzierte Abbildung von T wiederum mit T bezeichnen, $T(Z_1)=T(Z_2)=(O,\ A'B'_1+B'_1B'_2+\cdots+B'_{n-1}B'_n)$ und $T(\widetilde{A}''\widetilde{B}'')=(O,A')+(O,B'_n)$, $T(\widetilde{B}''_{j-1}\widetilde{B}''_j)=B'_{j-1}B'_j$, $T(\widetilde{B}'''_{j-1}\widetilde{B}'''_j)=B'_{j-1}B'_j$ ist, und daß die anderen Dreiecke durch T topologisch auf die Dreiecke anf S_1 abgebildet werden.

$T_1\{(O,\ A'B'_1+B'_1B'_2+\cdots+B'_{n-1}B'_n)\}$[1] bezeichnen wir mit Z, so ist Z eine Zelle, die durch die Kanten BA, AB_1, B_1B_2, $\cdots$, $B_{n-1}B_n$ berandet ist. Es gibt auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ die Kante $\widetilde{B}''\widetilde{C}''$, und zwar, daß $T(\widetilde{B}''\widetilde{C}'')=B'C'$ ist. Die Ecke $\widetilde{C}''$ liegt weder auf $\widetilde{B}''_1\widetilde{B}''_2+\cdots+\widetilde{B}''_{n-1}\widetilde{B}''_n$ noch auf $\widetilde{B}'''_1\widetilde{B}'''_2+\cdots+\widetilde{B}'''_{n-1}\widetilde{B}'''_n$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\widetilde{B}''\widetilde{C}''$ und $\widetilde{B}''\widetilde{A}''$ auf der Ebene $y_3=0$ liegt. De Menge $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1-(O,\ \widetilde{B}''\widetilde{C}''+\widetilde{B}''\widetilde{A}'')$ ist dann offenbar homöomorph mit der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$.

Wir zerlegen die Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen derart, daß es auf der Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, die beiden Dreiecke $A'''B'''C'''$ und $A'''B^{\text{IV}}C'''$ gibt, und daß $S'_1-(A'''B'''C'''+A'''B^{\text{IV}}C''')$ ebenso wie $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T' von $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1-(O,\ \widetilde{B}''\widetilde{C}''+\widetilde{B}''\widetilde{A}'')$ derart konstruieren, daß, wenn wir die induzierte Abbildung von T' wiederum mit T' bezeichnen, so $T'(A'''B'''C''')=T'(A'''B^{\text{IV}}C''')=(O,\ \widetilde{B}''\widetilde{C}''+\widetilde{B}''\widetilde{A}'')$, $T'(A'''B''')=T'(A'''B^{\text{IV}})=\widetilde{A}''\widetilde{B}''$, $T'(B'''C''')=T'(B^{\text{IV}}C''')=\widetilde{B}''\widetilde{C}''$ ist, und daß die anderen Dreiecke und Zellen durch T' topologisch auf Dreiecke und Zellen auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ abgebildet werden.

$T_1TT'(A'''B'''C''')$ ist homöomorph mit einem Dreieck, und wir setzen $T_1TT'(A'''B'''C''')=ABC$. Wir setzen $\mathfrak{G}_{i-1}+ABC=\mathfrak{G}_i$ und $\mathfrak{G}_{i-1}+Z+ABC=\mathfrak{F}_i$. Also haben wir $\mathfrak{F}_i$ in E^3 eingebettet. $E^3-\mathfrak{F}_i$ besteht aus den Komponenten $\mathfrak{K}_1-(ABC+Z)$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$. Die Abbildung T_1TT' bildet die Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ topologisch auf $\mathfrak{K}_1-(ABC+Z)$ ab, und daher ist $\mathfrak{K}_1-(ABC+Z)$ homöomorph mit der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$. Wir setzen $T_1TT'=T'_1$ und $\mathfrak{K}_1-(ABC+Z)=\mathfrak{K}'_1$.

Wir beweisen nun, daß $\mathfrak{F}_i$ den folgenden Bedingungen genügt.

1. Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3-\mathfrak{F}_i$ mit $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$ und die topologischen Abbildungen von $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}'_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{K}_p$ mit T'_1, T_2, $\cdots$, T_p. Die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, die wir mit S'_1, S_2, $\cdots$, S_p

[1] Vgl. S. 29. Zeile 4.

bezeichnen, ist in Dreiecke und Zellen zerlegt. Die induzierte Abbildung T'_1 bezw. $T_j(j=2, \cdots, p)$ bildet jedes Dreieck und jede Zelle auf S'_1 bezw. S_j topologisch auf ein in der Begrenzung von $\mathfrak{K}'_1$ bezw. $\mathfrak{K}_j$ enthaltenes Dreieck und eine in der Begrenzung von $\mathfrak{K}'_1$ bezw. $\mathfrak{K}_j$ enthaltene Zelle ab.

2. Es sei $A'_1A'_2$ eine Kante auf einer unter $S'_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S'_1. Angenommen erstens, daß $A'_1A'_2$ mit $A'''B'''$ übereinstimmt. Alle mit AC inzidenten Dreiecke in $\mathfrak{M}$ bilden einen Schnitt $\mathfrak{P}(AC)$ in $\mathfrak{G}_i$. Diesen Schnitt $\mathfrak{P}(AC)$ lassen wir zu $A'''C'''$ ordnen.

Es gibt auf S'_1 die Kanten $A'''B'''_1$, $B'''_1B'''_2$, $\cdots$, $B'''_{n-1}B'''_n$, $A'''B^{IV}_1$, $B^{IV}_1B^{IV}_2$, $\cdots$, $B^{IV}_{n-1}B^{IV}_n$, wo $TT'(A'''B'''_1)=TT'(A'''B^{IV}_1)=A'B'_1$, $TT'(B'''_1B'''_2)=TT'(B^{IV}_1B^{IV}_2)=B'_1B'_2$, $\cdots$, $TT'(B'''_{n-1}B'''_n)=TT'(B^{IV}_{n-1}B^{IV}_n)=B'_{n-1}B'_n$, $(B^{IV}_n=B^{IV}; B'''_n=B''')$ ist. Angenommen nun, daß $A'_1A'_2$ mit einer von den $A'''B'''_1, B'''_1B'''_2, \cdots, B'''_{n-1}B'''_n, A'''B^{IV}_1, B^{IV}_1B^{VI}_2, \cdots, B^{IV}_1B^{IV}_n$, etwa mit $A'''B'''_1$ übereinstimmt. Zu der Kante $A'B'_1$ ist ein Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$ in $\mathfrak{G}_{i-1}$ geordnet. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB_1)$ bezeichnen wir mit AB_1E und AB_1F. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle.

Fall A. AB_1E und AB_1F stimmen nicht miteinander überein.

Fall B. AB_1E und AB_1F stimmen miteinander überein.

Wir behandeln erstens den Fall A.

Fall A. AB_1E und AB_1F stimmen nicht miteinander überein. Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'_1E'$ und $A'B'_1F'$, so daß $T_1(A'B'_1E')=AB_1E$ und $T_1(A'B'_1F')=AB_1$F ist und der Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$ zu $A'B'_1$ geordnet ist. Es gibt auf dem Rechteck R das Dreieck $A''B''_1D''$, und es gilt $Q(A''B''_1D'')=AB_1D$ und das Dreieck AB_1D ist in $\mathfrak{P}(AB_1)$ enthalten.

Wenn das Dreieck AB_1D weder mit AB_1E noch mit AB_1F übereinstimmt, so wird $\mathfrak{P}(AB_1)$ durch das Dreieck AB_1D in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AB_1)$, hat als Endedreiecke die Dreiecke AB_1E und AB_1D und der andere $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ hat als Endedreiecke die Dreiecke AB_1D und AB_1F.

Es gibt auf S'_1 $A'''B'''_1E'''$ oder $A'''B^{IV}_1E'''$, so daß $TT'(A'''B'''_1E''')=A'B'_1E'$ oder $TT'(A'''B^{IV}_1E''')=A'B'_1E'$ ist. Wir lassen zu der Kante $A'''B'''_1$ oder $A'''B^{IV}_1$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ ordnen, jenachdem es auf S'_1 $A'''_1B'''_1E'''$ oder $A'''B^{IV}_1E'''$ gibt. Wenn der Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ zu der Kante $A'''B'''_1$ sich ordnen läßt, so lassen wir zu der Kante $A'''B^{IV}_1$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ ordnen.

Wenn das Dreieck AB_1D mit einem von den beiden AB_1E und AB_1F, etwa mit AB_1F, übereinstimmt, so wird $\mathfrak{P}(AB_1)$ in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ zerlegt, und $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ hat als Endedreiecke die beiden

AB_1E und AB_1F und der andere $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ besteht[1] aus einem einzigen Dreieck AB_1F. Wir lassen zu der Kante $A'''B'''$ oder $A'''B^{IV}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ ordnen, jenachdem es auf S'_1 $A'''B'''_1E'''$ oder $A'''B_1^{IV}E'''$ gibt. Wenn der Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ zu der Kante $A'''B'''_1$ sich ordnen läßt, so lassen wir zu der Kante $A'''B_1^{IV}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ ordnen.

Wir behandeln zweitens den Fall B.

Fall B. AB_1E und AB_1F stimmen miteinander überein. In diesem Falle besteht $\mathfrak{P}(AB_1)$ aus allen mit AB_1 inzidenten Dreiecken in $\mathfrak{M}$. Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'_1E'$ und $A'B'_1F'$, so daß $T_1(A'B'_1E')$ $=AB_1E$ und $T_1(A'B'_1F')=AB_1F$ ist, und der Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$ ist zu $A'B'_1$ geordnet.

AB_1EH und AB_1EG seien die beiden mit AB_1E inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Mindestens eine von den beiden Kanten AE und B_1E, etwa AE, ist nicht frei in $\mathfrak{G}_{i-1}$. So stimmt $A'E'$ nicht mit $A'F'$ überein, und wir bezeichnen den zu $A'E'$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{G}_{i-1}$ mit $\mathfrak{P}_1(AE)$ und den zu $A'F'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_2(AE)$.

Wenn sowohl AEH als auch AEG nicht in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, so ist eines von den beiden AEH und AEG, etwa AEH, in $\mathfrak{P}_1(AE)$ und das andere AEG in $\mathfrak{P}_2(AE)$ enthalten. Wenn mindestens eines von den beiden AEH und AEG, etwa AEH, in G_{i-1} enthalten ist, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AE)$ und $\mathfrak{P}_2(AE)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AE)$, aus den beiden AEH und AEB_1. Das Dreieck AEG ist dann in $\mathfrak{P}_2(AE)$ und nicht in $\mathfrak{P}_1(AE)$ enthalten. Wenn AEG in $\mathfrak{G}_{i-1}$ enthalten ist, und wenn $\mathfrak{P}_2(AE)$ aus den beiden Dreiecken AEB_1 und AEG besteht, so ist das Dreieck AEH in $\mathfrak{P}_1(AE)$ und nicht in $\mathfrak{P}_2(AE)$ enthalten. Also ist jedenfalls das Dreieck AEH in $\mathfrak{P}_1(AE)$ und das andere AEG ist in $\mathfrak{P}_2(AE)$ enthalten.

Wenn AB_1D nicht mit AB_1E übereinstimmt, so stimmen die beiden Dreiecke AB_1D und AB_1E die beiden Schnitte. Mindestens einer von diesen beiden Schnitte enthält das Dreieck AB_1H. Wenn AB_1H nicht mit AB_1D übereinstimmt, so enthält einer und nur einer von den beiden Schnitten das Dreieck AB_1H. Diesen das Dreieck AB_1H enthaltenden Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(AB_1)$. Wenn AB_1H mit AB_1D übereinstimmt, so bezeichnen wir den aus AB_1E und AB_1D bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AB_1)$.

Den anderen, durch AB_1D und AB_1E bestimmten, Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_2(AB_1)$. Das Dreieck AB_1G ist dann offenbar in $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ enthalten.

Jenachdem es auf S'_1 $A'''B'''_1E'''$ oder $A'''B_1^{IV}E'''$ gibt, so daß TT' $(A'''B'''_1E''')=A'B'_1E'$ oder $TT'(A'''B^{IV}E''')=A'B'_1E'$ ist, lassen wir zu der Kante $A'''B'''_1$ oder $A'''B_1^{IV}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ ordnen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ zu

[1] Vgl. S. 5. Zeile 21.

$A'''B'''_1$ sich ordnen läßt, so läßt sich offenbar $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ zu $A'''B_1^{\mathrm{IV}}$ ordnen.

Wenn AB_1D mit AB_1E übereinstimmt, so wird $\mathfrak{P}(AB_1)$ durch AB_1D in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AB_1)$, besteht aus einem einzigen Dreieck AB_1E und der andere $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ besteht aus allen mit AB_1 inzidenten Dreiecken in $\mathfrak{M}$. In diesem Falle dürfen wir zu der Kante $A'''B'''_1$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ oder zu $A'''B_1^{\mathrm{IV}}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ ordnen lassen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ zu $A'''B'''_1$ sich ordnen läßt, so lassen wir zu $A'''B_1^{\mathrm{IV}}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ ordnen.

Angenommen nun, daß $A'_1A'_2$ mit der Kante $A'''B'''$ übereinstimmt. Wir bezeichnen das mit $A''B''$ inzidente Dreieck auf dem Rechteck R mit $A''B''D''$, und wir setzen $Q(A''B''D'') = ABD$. Wir nehmen erstens an, daß die beiden Dreiecke ABC und ABD nicht miteinander übereinstimmen. Die beiden Dreiecke ABC und ABD bestimmen genau die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, die als Endedreiecke die beiden ABC und ABD haben. $ABDE$ und $ABDF$ seien die beiden, mit ABD inzidenten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A'B'_1\overset{\circ}{E}'$ und $A'B'_1\overset{\circ}{F}'$, so daß $T_1(A'B'_1\overset{c}{E}')=AB_1\overset{\circ}{E}$ und $T_1(A'B'_1\overset{\circ}{F}')=AB_1\overset{\circ}{F}$ ist und ein Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$ zu $A'B'_1$ geordnet ist. Wenn AB_1D_1 weder mit $AB_1\overset{\circ}{E}$ noch mit $AB_1\overset{\circ}{F}$ übereinstimmt, so wird der Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$ durch das Dreieck AB_1D_1 in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ zerlegt und zwar, daß die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ aus den beiden AB_1D_1 und $AB_1\overset{\circ}{E}$ bezw. AB_1D_1 und $AB_1\overset{\circ}{F}$ bestehen. Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $AB_1D_1E_1$ und $AB_1D_1F_1$ in $\mathfrak{M}$, die mit AB_1D_1 inzident sind.

Nach der Zwischenbehauptung II ist $AB_1D_1E_1$ von einem von den beiden $ABDE$ und $ABDF$, etwa von $ABDE$, abhängig und das andere $AB_1D_1F_1$ ist von $ABDF$ abhängig.

Wenn sowohl AB_1E_1 als auch AB_1F_1 weder mit $AB_1\overset{\circ}{E}$ noch mit $AB_1\overset{\circ}{F}$ übereinstimmt, so ist AB_1E_1 in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(AB_1)$, enthalten und AB_1F_1 ist in $\mathfrak{P}_2(AB_1)$ enthalten. Wenn AB_1E_1 mit $AB_1\overset{\circ}{E}$ übereinstimmt, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ und $\mathfrak{P}_2(AB_1)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AB_1)$, aus den beiden Dreiecken AB_1D_1 und AB_1E_1.

Wenn ABE nicht mit ABC übereinstimmt, so ist ABE in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(AB)$, enthalten. Wenn ABE mit ABC übereinstimmt, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, etwa $\mathfrak{P}_1(AB)$, aus den beiden Dreiecken ABD und ABE.

Wenn AB_1D_1 mit $AB_1\overset{\circ}{E}$ übereinstimmt, so ist eines von den beiden $AB_1D_1E_1$ und $AB_1D_1F_1$, etwa $AB_1D_1F_1$, zu $A'B'_1\overset{\circ}{E}'$ geordnet. Wir lassen dann zu dem Dreieck $A''B''_1D''_1$ auf R das Simplex $AB_1D_1E_1$ ordnen, und wir nehmen an, daß $ABDE$ und $AB_1D_1E_1$ voneinander abhängig sind.

Es gibt auf S'_1 die Zelle X'_1 und das Dreieck $A'''B'''_1\mathring{E}'''_1$, so daß $TT'(A'''B'''_1\mathring{E}'''_1)=A'B'_1\mathring{E}'$ und $T'_1(X'_1)=X_1$ ist und $A'''B'''_1$ auf dem Rand von X'_1 liegt. Wenn die Kante $A'''B'''$ auf dem Rand von X'_1 leigt, so lassen wir zu der Kante $A'''B'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ ordnen. Wenn die Kante $A'''B^{IV}$ auf dem Rand von X'_1 liegt, so lassen wir zu der Kante $A'''B'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB)$ ordnen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ zu $A'''B'''$ sich ordnen läßt, so läßt sich der Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu $A'''B^{IV}$ ordnen.

Wenn ABC und ABD miteinander übereinstimmen, so bezeichnen wir den, aus allen mit AB inzidenten Dreiecken bestehenden, Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AB)$ und den aus einem einzigen Dreieck ABC bestehenden Schnitt mit $\mathfrak{P}_2(AB)$. Wir dürfen dann zu $A'''B'''$ oder $A'''B^{IV}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ ordnen lassen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ zu $A'''B'''$ sich ordnen läßt, so lassen wir zu $A'''B^{IV}$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(AB)$ ordnen.

Angenommen nun, daß $A'_1A'_2$ mit $B'''C'''$ übereinstimmt. Wir bezeichnen den zu $B'C'$ auf S_1 geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(BC)$ seien BCD und BCE. Wenn BCD nicht mit BCE übereinstimmt, so wird $\mathfrak{P}(BC)$ durch das Dreieck BCA in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$ in $\mathfrak{S}_t$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa $\mathfrak{P}_1(BC)$, hat als Endedreiecke die beiden Dreiecke BCD und BCA und der andere $\mathfrak{P}_2(BC)$ hat als Endedreiecke die beiden Dreiecke BCA und BCE.

Es gibt auf S_1 die Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$, so daß $T_1(B'C'D')=BCD$ und $T_1(B'C'E')=BCE$ ist. Wir unterscheiden die beiden folgenden Fälle.

Fall 1. Es gibt auf S'_1 das Dreieck $B'''C'''D'''$, so daß $TT'(B'''C'''D''')=B'C'D'$ ist.

Fall 2. Es gibt auf S'_1 das Dreieck $B^{IV}C'''D'''$, so daß $TT'(B^{IV}C'''D''')=B'C'D'$ ist.

Wenn der Fall 1 sich ergibt, so lassen wir zu der Kante $B'''C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ und zu der Kante $B^{IV}C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(BC)$ ordnen. Wenn der Fall 2 sich ergibt, so lassen wir zu der Kante $B^{IV}C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ und zu der Kante $B'''C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(BC)$ odnen.

Angenommen nun, daß BCE mit BCD übereinstimmt. Es gibt in $\mathfrak{M}$ genau die beiden 3-Simplexe $BCDH$ und $BCDG$, die mit BCD inzident sind. $BCDH$ ist zu einem von den beiden $B'C'D'$ und $B'C'E'$, etwa zu $B'C'D'$, geordnet und $BCDG$ ist zu dem anderen $B'C'E'$ geordnet. Die beiden Dreiecke BCA und BCD bestimmen genau die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, die als Endedreiecke die beiden BCA und BCD haben. Wenn weder BCH noch BCG mit BCA übereinstimmt, so ist

BCH in einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(BC)$, und nicht in $\mathfrak{P}_2(BC)$ enthalten und BCG ist in $\mathfrak{P}_2(BC)$ und nicht in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten. Wenn BCH mit BCA übereinstimmt, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{P}_1(BC)$ aus den beiden Dreiecken BCD und BCA besteht. Wir lassen dann zu $B'''C'''$ oder $B^{IV}C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ ordnen, jenachdem es auf S'_1 das Dreieck $B'''C'''D'''$ oder $B^{IV}C'''D'''$ gibt, so daß $TT'(B'''C'''D''')=B'C'D'$ oder $TT'(B^{IV}C'''D''')=B'C'D'$ ist. Wenn $\mathfrak{P}_1(BC)$ zu $B'''C'''$ sich ordnen läßt, so lassen wir zu $B^{IV}C'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_2(BC)$ ordnen.

Wenn $A'_1A'_2$ nicht mit $A'''C'''$, $A'''B'''$, $A'''B^{IV}$, $B'''C'''$, $B^{IV}C'''$ übereinstimmt und nicht auf dem Rand von X'_1 oder X''_1 liegt, so lassen wir zu $A'_1A'_2$ den $TT'(A'_1A'_2)$ geordneten Schnitt ordnen.

3. A_1 sei eine Ecke in $\mathfrak{G}_i$ und A'''_1 sei eine Ecke auf S'_1, so daß $T'_1(A'''_1)=A_1$ ist.

Wir setzen $TT'(A'''_1)=A'_1$, und wir bezeichnen den zu A'_1 geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A_1)$. Wenn A'_1 mit keiner von A', B', C', B'_1, B'_2, $\cdots$, B'_{n-1} übereinstimmt, so lassen wir zu der Ecke A'''_1 den Kegel $\mathfrak{B}(A_1)$ ordnen.

Wenn A'''_1 mit der Ecke A''' übereinstimmt, so lassen wir zu der Ecke A''' den zu A' geordneten Kegel $\mathfrak{B}(A)$ ordnen. Wenn A'''_1 mit C''' übereinstimmt, so lassen wir zu der Ecke C''' den zu C' geordneten Kegel $\mathfrak{B}(C)$ ordnen. Wenn A'''_1 mit B'''_j oder mit $B^{IV}_j (j=1, 2, \cdots n)$ übereinstimmt, so lassen wir sowohl zu B'''_j als auch zu B^{IV}_j den zu B'_j geordneten Kegel ordnen.

Also läßt einer und derselben Kegel zu B'''_j und B^{IV}_j sich ordnen. Wir bezeichnen von jetzt an die beiden Ecken B'''_j und B^{IV}_j als äquivalent und die beiden Kanten $B'''_{j-1}B'''_j$ $(B'''_0=A''')$ und $B^{IV}_{j-1}B^{IV}_j$ $(B^{IV}_0=A''')$ als äquivalent.

4. $A'_1A'_2$ sei eine Kante auf S'_1 oder $S_j(j=2, \cdots, n)$, und $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{B}(A_1)$ sei zu der Kante $A'_1A'_2$ bezw. der Ecke A'_1 geordnet. $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ ist dann in $\mathfrak{B}(A_1)$ enthalten.

5. Es seien A_1A_2 und A_2A_3 die sowohl in $\mathfrak{G}_i$ als auch in einem Kegel $\mathfrak{B}(A_2)$ in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Kanten von der Art, daß $\mathfrak{B}(A_2)$ durch die Folge der in $\mathfrak{B}(A_2)$ enthaltenen und nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenen Dreiecke $A_1A_2C_1$, $A_2C_1C_2$, $\cdots$, $A_2C_lA_3$ in die genau beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und $\mathfrak{B}_2(A_2)$ zerlegt ist.

Es gibt dann etwa auf S'_1 die Kanten $A'_1A'_2$ und $\mathring{A}'_2A'_3$, so daß das Dreieck $A_1A_2C_1$ bezw. $A_2C_lA_3$ in dem zu $A'_1A'_2$ bezw. $\mathring{A}'_2A'_3$ geordneten Schnitt enthalten ist. Nach der Bedingung 4 sind die beiden Ecken A'_2 und $\mathring{A}'_2$ miteinander äquivalent.

Wenn sowohl A'_2 als auch $\mathring{A}'_2$ mit keiner von A''', C''', B'''_j und $B^{IV}_j(j=1, 2, \cdots, n)$ übereinstimmt, so bezeichnen wir die Menge aller auf

S'_1 liegenden und mit der mit A'_2 äquivalenter Ecke inzidenten Dreiecke mit M. Wenn A'_2 oder $\mathring{A}'_2$ mit einer von A''', C''', B'''_j, $B^{IV}_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, etwa mit A''', übereinstimmt, so bezeichnen wir alle auf S'_1 liegenden und mit der mit A'_2 äquivalenter Ecke inzidenten Dreiecke, außer $A'''B'''C'''$ und $A'''B^{IV}C'''$, mit M.

Wenn $A'_2D'E'$ und $\mathring{A}'_2D''E''$ zu M gehören und die Kanten $A'_2 D'$ und $\mathring{A}'_2D''$ miteinander äquivalent sind, so identifizieren wir die beiden Kanten A'_2D' und $\mathring{A}'_2D''$. Wenn A'_2 mit B''' oder B^{IV} oder C''' übereinstimmt, so identifizieren wir auch die beiden Kanten $B'''C'''$ und $B^{IV}C'''$. Also identifizieren wir alle miteinander äquivalenten Kanten von den zu M gehörigen Dreiecken, und wir bezeichnen die Menge aller modifizierten und zu M gehörigen Dreiecke mit N. Die Menge N wird durch den Kantenweg $A'_1A'_2 + A'_2A'_3$ in die beiden Teilmengen N_1 und N_2 zerlegt, so daß je zwei Dreiecke $A'_2D'_1E'_1$ und $A'_2E'_kD'_2$ von N, die in einer und derselben von den beiden N_1 und N_2 enthalten sind, durch die Folge der Dreiecke $A'_2D'_1E'_1$, $A'_2E'_1E'_2, \cdots$, $A'_2E'_{k-1}E'_k$, $A'_2E'_kD'$ verbunden werden, und daß die Kanten $A'_2E'_1$, $A'_2E'_2, \cdots$, $A'_2E'_k$ weder mit $A'_2A'_1$ noch mit $A'_2A'_3$ übereinstimmen, und daß dies nicht für je zwei Dreiecke $A'_2D'_1E'_1$ und $A'_2E'_kD'_2$ der Fall ist, die beziehungsweise in N_1 und N_2 enthalten sind.

Die Bilder durch T'_1 von allen Dreiecken, die in N_1 enthalten sind, sind in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A_2)$ und $\mathfrak{B}_2(A_2)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A_2)$, enthalten und die Bilder durch T'_1 von allen Dreiecken, die in N_2 enthalten sind, in dem anderen $\mathfrak{B}_2(A_2)$ enthalten. Wenn ein in $\mathfrak{S}_{i-1}$ enthaltenes Dreieck A_2ED in $\mathfrak{B}_1(A_2)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(A_2)$ enthalten ist, so gibt es auf S'_1 ein Dreieck $A''_2E'D'$, so daß $T'_1(A''_2E'D') = A_2ED$ ist und die Ecke A''_2 mit $\mathring{A}'_2$ äquivalent ist und, daß, wenn wir die Ecken A''_2 und $\mathring{A}'_2$ identifizieren, so $A''_2E'D'$ zu N_1 bezw. N_2 gehört.

6. Es sei $A'_1A'_2A'_3$ ein Dreieck etwa auf S'_1 und $T'_1(A'_1A'_2A'_3) = A_1A_2A_3$, und die beiden mit $A_1A_2A_3$ inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$ seien $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_2A_3A_5$. Zu $A'_1A'_2A'_3$ ist ein bestimmtes Simplex von den beiden $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_2A_3A_5$, etwa $A_1A_2A_3A_4$, geordnet, so daß, wenn der zu $A'_1A'_2$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ nicht ausgeartet ist, $A_1A_2A_4$ in $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ enthalten ist. Wenn der zu $A'_2A'_3$ bezw. $A'_3A'_1$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_3A_1)$ nicht ausgeartet ist, so ist $A_2A_3A_4$ bezw. $A_3A_1A_4$ in $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_3A_1)$ enthalten.

Wenn $A'_1A'_2A'_3$ in der Tat weder mit $A'''B'''C'''$ noch mit $A'''B^{IV}C'''$ übereinstimmt, so lassen wir zu $A'_1A'_2A'_3$ das zu $TT'(A'_1A'_2A'_3)$ geordnete 3-Simplex ordnen. Die obige Tatsache gilt dann offenbar für $A'_1A'_2A'_3$.

Angenommen nun, daß $A'_1A'_2A'_3$ mit einem von $A'''B'''C'''$ und $A'''B^{IV}C'''$, etwa mit $A'''B'''C'''$, übereinstimmt. Wir bezeichnen den zu

$TT'(B'''C''') = B'C'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. $\mathfrak{P}(BC)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa $\mathfrak{P}_1(BC)$, ist zu $B'''C'''$ geordnet und der andere $\mathfrak{P}_2(BC)$ ist zu $B^{\mathrm{IV}}C'''$ geordnet.

Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $ABCH$ und $ABCG$ in $\mathfrak{M}$, die mit ABC inzident ist. Eines von den beiden Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(BC)$ ist ABC. Wir bezeichnen das andere von den beiden Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(BC)$ mit BCD. Wenn sowohl BCH als auch BCG nicht mit BCD übereinstimmt, so ist nur eines von den beiden BCH und BCG, etwa BCH, in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten. Wir lassen dann zu $A'''B'''C'''$ das Simplex $ABCH$ ordnen. Wenn mindestens eines von beiden BCH und BCG, etwa BCH, mit BCD übereinstimmt, so besteht $\mathfrak{P}_1(BC)$ aus den beiden Dreiecken BCA und BCH. Wir lassen dann zu $A'''B'''C'''$ das Simplex $ABCH$ ordnen.

BCH ist offenbar in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten. Wenn wir den zu $A'''C'''$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AC)$ bezeichnen, so ist ACH in $\mathfrak{P}(AC)$ enthalten, da $\mathfrak{P}(AC)$ aus allen mit AC inzidenten Dreiecken besteht.

Wir bezeichnen den zu $B'''A'''$ bezw. $B^{\mathrm{IV}}A'''$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(BA)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(BA)$ und das mit der Kante $A''B''$ inzidente Dreieck auf dem Rechteck R mit $A''B''D''$, und wir setzen $Q(A''B''D'') = ABD$.

Wir nehmen erstens an, daß die beiden Dreiecke ABC und ABD miteinander übereinstimmen. In diesem Falle besteht $\mathfrak{P}_1(BA)$ aus allen mit BA inzidenten Dreiecken, wenn $\mathfrak{P}_1(BA)$ nicht ausgeartet ist. Daher ist BAH in $\mathfrak{P}_1(BA)$ enthalten, wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ nicht augeartet ist.

Wir nehmen zweitens an, daß die beiden Dreiecke ABC und ABD nicht miteinander übereinstimmen. Wir bezeichnen das mit der Kante $B'''C'''$ bezw. $A'''B'''_1$ inzidente Dreieck auf S'_1 mit $B'''C'''E'''_1$ bezw. $A'''B'''_1E'''_2$, und wir setzen $TT'(B'''C'''E'''_1) = B'C'E'_1$ und $TT'(A'''B'''_1E'''_2) = A'B'_1E'_2$, $T_1(B'C'E'_1) = BCE_1$, $T_1(A'B'_1E'_2) = AB_1E_2$ ist. Ein Simplex BCE_1G_1 in $\mathfrak{M}$ ist zu $B'C'E'_1$ und ein Simplex $AB_1E_2G_2$ in $\mathfrak{M}$ ist zu $A'B'_1E'_2$ geordnet.

$\Delta_1(=A'''B'''_1E'''_2)$, $\Delta_2, \cdots, \Delta_q(=B'''C'''E'''_1)$ sei eine Folge der Dreiecke auf S'_1, so daß je Dreieck mit dem folgenden mindestens eine Kante gemeinsam und jedes Dreieck weder mit $A'''B'''C'''$ noch mit $A'''B^{\mathrm{IV}}C'''$ übereinstimmt. Es ist leicht einzusehen[1], daß, wenn wir zu Δ_1 das Simplex $AB_1E_2G_2$ ordnen lassen und die Vorschrift in der Zwischenbehauptung II für die Folge $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_q$ anwenden, so das Simplex BCE_1G_1 zu Δ_q

---

[1] Wir lassen aus S'_1 die beidne Zellen X'_1 und X''_1 und die beiden Dreiecke $A'''B'''C'''$ und $A'''B^{\mathrm{IV}}C'''$ fort, so erhalten wir aus S'_1 ein Rechteck R'. R' ist in die Dreiecke zerlegt, und die Folge der Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_q$ liegt auf R'.

sich ordnen läßt.

Wir bezeichnen das mit $A''B''_1$ inzidente Dreieck auf R mit $A''B''_1D''_1$, und alle mit der Ecke A'' inzidenten Dreiecke auf R seien $\varDelta'_1(=A''B''_1D''_1)$, $\varDelta'_2, \cdots, \varDelta'_r(=A''B''D'')$. Wir fügen zu R ein Dreieck $A''B''C''$ ein, so erhalten wir ein neues Rechteck R_1. Wir bezeichnen das durch den Kantenweg $A'''B'''_1+B'''_1B'''_2+\cdots+B'''_{n-1}B'''_n+B'''C'''+C'''B^{IV}+B^{IV}_nB^{IV}_{n-1}+\cdots+B^{IV}_1A'''$ begrenzte und nicht die Zelle X'_1 enthaltende Gebiet auf S'_1 mit R_2. R_2 ist dann in Dreiecke zerlegt. Wir identifizieren die beiden Kanten $B'''_{j-1}B'''_j$ und $B''_{j-1}B''_j$ $(j=1, 2, \cdots, n+1,\ B'''_0=A''',\ B'''_{n+1}=C''',\ B''_{n+1}=C'')$, so erhalten wir ein neues Rechteck R_3.

Wenn wir zu $\varDelta_1$ das Simplex $AB_1E_2G_2$ ordnen lassen und für die Folge der Dreiecke $\varDelta_1$, $\varDelta'_1$, $\varDelta'_2, \cdots, \varDelta'_r$, $\varDelta'_{r+1}(=A''B''C'')$ die Vorschrift in der Zwischenbehauptung II anwenden, so läßt sich ein bestimmtes Simplex zu $A''B''C''$ ordnen, das wir mit α bezeichnen. Wenn wir zu $\varDelta_0$ das Simplex BCE_1G_1 ordnen lassen und die Vorschrift in der Zwischenbehauptung II für $\varDelta_0$, $\varDelta'_{r+1}$ anwenden, so läßt sich offenbar das Simplex $ABCH$ zu $\varDelta'_{r+1}$ ordnen. Nach der Zwischenbehauptung II stimmen die beiden Simplexe α und $ABCH$ miteinander überein. Folglich muß ABH in dem zu $A'''B'''$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}_1(BA)$ enthalten sein.

7. $T_1(S_1)=T'_1(S'_1)$ (mod. 2). Daher bildet $T'_1(S'_1)$ (mod. 2) den Rand von $\mathfrak{M}_1$. Wenn $ABCH$ zu $A'''B'''C'''$ geordnet ist, so ist $ABCH$ offenbar in $\mathfrak{M}_1$ enthalten.

Es sei $A_1A_2A_3$ ein in $\mathfrak{M}$ enthaltenes Dreieck, das nicht noch in $\mathfrak{G}_t$ enthalten ist und mit $\mathfrak{G}_t$ mindestens eine Kante gemeinsam hat. Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle.

1. *Fall.* $A_1A_2A_3$ hat mit $\mathfrak{G}_t$ nur eine einzige Kante, etwa A_1A_2, gemeinsam.

2. *Fall.* $A_1A_2A_3$ hat mit $\mathfrak{G}_t$ die beiden Kanten, etwa A_1A_2 und A_2A_3, gemeinsam.

3. *Fall.* $A_1A_2A_3$ hat mit $\mathfrak{G}_t$ drei Kanten A_1A_2, A_2A_3 und A_3A_1 gemeinsam.

4. *Fall.* $A_1A_2A_3$ hat mit $\mathfrak{G}_t$ nur die Kante A_2A_3 und die Ecke A_1 gemeinsam.

Wir behandeln erstens den

1. *Fall.* Wir nehmen erstens an, daß die Kante A_1A_2 weder mit AB noch mit AC übereinstimmt. Wir behandeln erstens den Fall, worin A_1A_2 mit einer unter $T'_1(B'''_1B'''_2)$, $T'_1(B'''_2B'''_3), \cdots, T'_1(B'''_{n-1}B'''_n)$, etwa mit $T'_1(B'''_1B'''_2)$, übereinstimmt. Wenn $A_1A_2A_3$ weder in dem zu $B'''_1B'''_2$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ noch in dem zu $B^{IV}_1B^{IV}_2$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ enthalten ist, so können wir auf ganz analoge Weise wie im 1. Schritte das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu $\mathfrak{F}_t$ einfügen.

Wir nehmen an, daß $A_1A_2A_3$ in $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ enthalten ist. Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'''_1B'''_2)$ ist dann offenbar homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S''_1 die beiden Dreiecke $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_1)$ und $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_2)$ gibt und $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}-\{\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_1)+\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_2)\}$ ebenso wie S'_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T_2 von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,B'''_1B'''_2)$ derart konstruieren, daß $T_2(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3,\ \tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_1)=T_2(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3,\ \tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_2)=(O,\ B'''_1B'''_2)$ und $T_2(l_1)=T_2(l_2)=B'''_1B'''_2$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T_2 topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S'_1 abgebildet wird.

Wir setzen $T'_1T_2(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3)=A_1A_2A_3$, $\mathfrak{S}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{S}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}'_1-A_1A_2A_3=\mathfrak{K}''_1$.

Auch wenn $A_1A_2A_3$ in $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ enthalten ist, so läuft Diskussion ganz analog. Wir haben nur statt $(O,\ B'''_1B'''_2)$ die Menge $(O,\ B_1^{IV}B_2^{IV})$ aufzunehmen.

Wenn $A_1A_2A_3$ sowohl in $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ als auch in $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ enthalten ist, so mögen wir statt $(O,\ B'''_1B'''_2)$ die Menge $(O,\ B_1^{IV}B_2^{IV})$ aufnehmen.

Wir nehmen zweitens an, daß die Kante A_1A_2 mit AB übereinstimmt. Wir bezeichnen den zu der Kante $A'''B'''$ bezw. $A'''B^{IV}$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(AB)$. Das Dreieck $A_1A_2A_3$ ist in mindestens einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(AB)$, enthalten. Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ A'''B''')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S''_1 die beiden Dreiecke $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_1)$ und $\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_2)$ gibt und $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}-\{\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_1)+\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3(\tilde{A}_1\tilde{A}_2=l_2)\}$ ebenso wie S'_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T_2 wie oben konstruieren. Wir setzen $T'_1T_2(\tilde{A}_1\tilde{A}_2\tilde{A}_3)=A_1A_2A_3$, $\mathfrak{S}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{S}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}'_1-A_1A_2A_3=\mathfrak{K}''_1$. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt sind.

Wir behandeln nun den

2. *Fall.* Wir nehmen erstens an, daß die Kante A_1A_2 mit $T'_1(B'''_1B'''_2)$ und die Kante A_2A_3 mit $T'_1(B'''_2B'''_3)$ übereinstimmt. Wir bezeichnen den zu der Kante $B'''_1B'''_2$ bezw. $B_1^{IV}B_2^{IV}$ bezw. $B'''_2B'''_3$ bezw. $B_2^{IV}B_3^{IV}$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(B_2B_3)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(B_2B_3)$.

Wenn das Dreieck $A_1A_2A_3$ sowohl in $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ als auch in $\mathfrak{P}_1(B_2B_3)$

enthalten ist, so können wir[1], wie bisher häufig gezeigt worden ist, zu $\mathfrak{F}_i$ das Dreieck $A_1A_2A_3$ einfügen.

Wenn das Dreieck $A_1A_2A_3$ sowohl in $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ als auch in $\mathfrak{P}_2(B_2B_3)$ und weder in $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ noch in $\mathfrak{P}_1(B_2B_3)$ enthalten ist, so verhalten wir uns folgendermassen. Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\} - (O,\ B'''_1B'''_2 + B'''_2B'''_3)$ ist offenbar homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S''_1 die beiden Dreiecke $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$ und $\widetilde{A}_1\widetilde{A}'_2\widetilde{A}_3$ gibt und $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1-(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3+\widetilde{A}_1\widetilde{A}'_2\widetilde{A}_3)$ ebenso wie S'_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir bezeichnen den zu B'''_2 geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(B_2)$. Der Kegel $\mathfrak{B}(B_2)$ wird durch das Dreieck $A_1A_2A_3$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(B_2)$ und $\mathfrak{P}_2(B_2)$ zerlegt.

$B''_1B''_2D''_1$ bezw. $B''_2B''_3D''_2$ sei das auf R liegende und mit $B''_1B''_2$ bezw. $B''_2B''_3$ inzidente Dreieck. Wenn $Q(B''_1B''_2D''_1)$ in $\mathfrak{B}_1(B_2)$ enthalten ist, so ist das Dreieck $Q(B''_2B''_3D''_2)$ in $\mathfrak{B}_2(B_2)$ enthalten, da das Dreieck $A_1A_2A_3$ weder in $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ noch in $\mathfrak{P}_1(B_2B_3)$ enthalten ist.

Wir bezeichnen den zu B'''_j geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(B_j)$ ($j=1, 3, 4, \cdots, n$) und das auf R liegende und mit $B''_{j-1}B''_j$ ($j=2, 4, \cdots, n$) inzidente Dreieck mit $B''_{j-1}B''_jD''_{j-1}$ und das auf R liegende und mit $A''B''$ inzidente Dreieck mit $A''B''D''$. Wir nehmen ein Dreieck B_2B_3E auf, das in dem Kegel $\mathfrak{B}_1(B_2)$ enthalten ist.

Es gibt aber ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von R_1 ist in den Kanten $\mathring{A}\mathring{B}_1$, $\mathring{B}_1\mathring{B}_2$, $\mathring{B}_2\mathring{B}_3, \cdots$, $\mathring{B}_{n-1}\mathring{B}_n$, $\mathring{B}\mathring{A}$ ($\mathring{B}_n=\mathring{B}$) zerlegt.

2. $\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j\mathring{D}_{j-1}$ ($j=1, 2, 4, \cdots, n$) sei ein auf R_1 liegendes und mit $\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j$ inzidentes Dreieck, so stimmen $Q_1(\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j\mathring{D}_{j-1})$ und $Q(B''_{j-1}B''_jD''_{j-1})$ miteinander überein, und es gilt überdies $Q_1(\mathring{B}_2\mathring{B}_3\mathring{D}_2)=B_2B_3E$ und $Q_1(\mathring{A}\mathring{B}\mathring{D})=Q(A''B''D'')$ ($\mathring{A}=\mathring{B}_0$), wo $\mathring{B}_2\mathring{B}_3\mathring{D}_2$ bezw. $\mathring{A}\mathring{B}\mathring{D}$ ein auf R_1 liegendes und mit $\mathring{B}_2\mathring{B}_3$ bezw. $\mathring{A}\mathring{B}$ inzidentes Dreieck bedeutet.

3. $\mathring{B}_j\mathring{F}\mathring{G}$ sei ein mit $\mathring{B}_j$ ($j=0, 1, 2, 4, \cdots, n$) inzidentes Dreieck auf R_1. $Q_1(\mathring{B}_j\mathring{F}\mathring{G})$ ist dann in $\mathfrak{B}(B_j)$ enthalten. $\mathring{B}_2\mathring{F}\mathring{G}$ sei ein mit $\mathring{B}_2$ inzidentes Dreieck auf R_1. $Q_1(\mathring{B}_2\mathring{F}\mathring{G})$ ist dann in $\mathfrak{B}_1(B_2)$ enthalten.

Wir heissen das Rechteck R das Grundrechteck von der Zelle Z. Wir ersetzen das Rechteck R durch R_1, und wir nehmen als Grundrechteck von der Zelle Z das Rechteck R_1 auf.

1) Vgl. S. 9. Zeile 6.

Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'''_1B'''_2+B'''_2B'''_3)$ ist dann homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S''_1 die beiden Dreiecke $\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3$ und $\widetilde{A}_1\widetilde{A'}_2\widetilde{A}_3$ gibt und $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}-\{\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3+\widetilde{A}_1\widetilde{A'}_2\widetilde{A}_3\}$ ebenso wie S'_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T_2 von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'''_1B'''_2+B'''_2B'''_3)$ derart konstruieren, daß $T_2(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3)=T_2(\widetilde{A}_1\widetilde{A'}_2\widetilde{A}_3)=(O,\ B'''_1B'''_2+B'''_2B'''_3)$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T_2 topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S'_1 abgebildet wird.

Wir setzen $T'_1T_2(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2\widetilde{A}_3)=A_1A_2A_3$, $\mathfrak{G}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{G}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}'_1-A_1A_2A_3=\mathfrak{K}''_1$.

Wir nehmen zweitens an, daß die Kante A_1A_2 mit $T'_1(B'''_1B'''_0)$ übereinstimmt und das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem $\mathfrak{P}_1(B_1B_0)$ enthalten ist. Wenn die Kante A_2A_3 weder mit AB noch mit AC übereinstimmt, so können wir offenbar das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu $\mathfrak{F}_i$ einfügen. Auch wenn die Kante A_2A_3 mit einer von den beiden BA und BC übereinstimmt, können wir offenbar das Dreieck $A_1A_2A_3$ zu $\mathfrak{F}_i$ einfügen.

Wir nehmen nun an, daß $A_1A_2A_3$ in dem zu einer Kante $A'''_1A'''_2$ bezw. $\mathring{A}'''_2A'''_3$ geordneten Schnitt enthalten ist und sowohl $A'''_1A'''_2$ als auch $\mathring{A}'''_2A'''_3$ nicht auf $A'''B'''_1+B'''_1B'''_2+\cdots+B'''_{n-1}B'''_n$ und $A'''B_1^{\rm IV}+B_1^{\rm IV}B_2^{\rm IV}+\cdots+B_{n-1}^{\rm IV}B_n^{\rm IV}$ liegt, und daß A'''_2 mit B'''_1 und $\mathring{A}'''_2$ mit $B_1^{\rm IV}$ übereinstimmt. $\mathfrak{B}(B_1)$ wird durch das Dreieck $A_1A_2A_3$ in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(B_1)$ und $\mathfrak{B}_2(B_1)$ zerlegt. $\mathfrak{P}_1(B_1B_2)$ und $\mathfrak{P}_2(B_1B_2)$ sind dann in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(B_1)$ und $\mathfrak{B}_2(B_1)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(B_1)$, enthalten, und $\mathfrak{P}_1(B_2B_3)$ und $\mathfrak{P}_2(B_2B_3)$ sind in dem anderen $\mathfrak{B}_2(B_1)$ enthalten.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'''_1A'''_2$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(A_1A_2)$. $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ wird durch das Dreieck $A_1A_2A_3$ in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$ und $\mathfrak{P}_2(A_1A_2)$ zerlegt. Einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$ und $\mathfrak{P}_2(A_1A_2)$, etwa $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$, ist in $\mathfrak{B}_1(B_1)$ enthalten, und der andere $\mathfrak{P}_2(A_1A_2)$ ist in $\mathfrak{B}_2(B_1)$ enthalten.

Wir nehmen ein Dreieck $A_1A_2E_1$ bezw. $A_1A_2E_2$ auf, das in $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{P}_2(A_1A_2)$ enthalten ist. Es gibt ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von R_1 ist in die Kanten $\mathring{A}_1\mathring{B}_1$, $\mathring{B}_1A'_1$, $A'_1B'_1$, $B'_1\mathring{B}_2$, $\mathring{B}_2\mathring{B}_3$, $\cdots$, $\mathring{B}_{n-1}\mathring{B}_n$, $\mathring{B}_n\mathring{A}_1$ zerlegt.

2. $\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j\mathring{D}_{j-1}(j=1,\ 3,\ 4,\cdots,\ n)$ $(\mathring{B}_0=\mathring{A}_1)$ sei ein auf R_1 liegendes und mit $\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j$ inzidentes Dreieck, so stimmen $Q_1(\mathring{B}_{j-1}\mathring{B}_j\mathring{D}_{j-1})$ und $Q(B''_{j-1}B''_jD''_{j-1})$ miteinander überein, und es gilt überdies $Q_1(\mathring{B}_1A'_1\mathring{E}_1)=$

$A_2A_1E_1$, $Q_1(A'_1B'_1\mathring{E}_2)=A_2A_1E_2$, $Q_1(B'_1\mathring{B}_2\mathring{D}_1)=Q(B''_1B''_2D''_1)$ und $Q_1(\mathring{A}_1\mathring{B}_n\mathring{D})$ $=Q(A''B''D'')$. [1]

3. $\mathring{B}_j\mathring{E}\mathring{F}$ sei ein mit $\mathring{B}_j(j=0, 2, \cdots, n)$ inzidentes Dreieck auf R_1. $Q_1(\mathring{B}_j\mathring{E}\mathring{F})$ ist dann in $\mathfrak{B}(B_j)$ enthalten. $B'_1\mathring{E}\mathring{F}$ bezw. $\mathring{B}_1\mathring{E}\mathring{F}$ sei ein mit B'_1 bezw. $\mathring{B}_1$ inzidentes Dreieck auf R_1, so ist $Q_1(\mathring{B}_1\mathring{E}\mathring{F})$ bezw. $Q_1(B'_1\mathring{E}\mathring{F})$ in $\mathfrak{B}_1(B_1)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(B_1)$ enthalten.

Wir verbinden die beiden Ecken A''' und B''' durch einen Kantenweg l, der einen einfachen Bogen aut S'_1 bildet und sowohl mit $A'''B'''_1+B'''_1B'''_2+\cdots+B'''_{n-1}B'''_n+A'''_1A'''_2$ als auch mit $A'''B_1^{\mathrm{IV}}+B_1^{\mathrm{VI}}B_2^{\mathrm{IV}}+\cdots+B_{n-1}^{\mathrm{IV}}B_n^{\mathrm{IV}}+A'''_2A'''_3$ keine Punkte gemeinsam hat.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $l+A'''B'''$ auf der Ebene $x_3=0$ liegt. Die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ wird durch $(O, l+A'''B''')$ in die beiden Kugel zerlegt. Wir setzen $T'_1((O, l+A'''B'''))$ $=X$, so ist $\mathfrak{K}'_1-Z+X$ homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ die beiden Zellen X' und X'' und die beiden Dreiecke $\tilde{A}'''\tilde{B}'''\tilde{C}'''$ und $\tilde{A}'''\tilde{\tilde{B}}'''\tilde{C}'''$ gibt und $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2=1\}-(\tilde{A}'''\tilde{B}'''\tilde{C}'''+\tilde{A}'''\tilde{\tilde{B}}'''\tilde{C}''')$ ebenso wie S_1 in Dreiecke zerlegt ist.

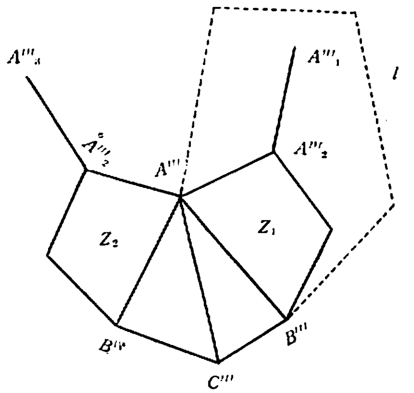

Abb. 1.

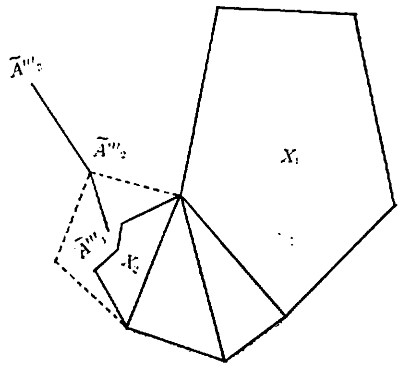

Abb. 2.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}'_1-Z+X$ derart konstruieren, daß $T(X')=T(X'')=X$ und $T(\tilde{A}'''\tilde{B}'''\tilde{C}''')$ $=T(\tilde{A}'''\tilde{\tilde{B}}'''\tilde{C}''')=ABC$ ist.

Es gibt auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ die beiden Kanten $\tilde{A}'''_1\tilde{A}'''_2$ und $\tilde{A}'''_2\tilde{A}'''_3$, so daß der Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{P}(A_2A_3)$ zu der Kante $\tilde{A}'''_1\tilde{A}'''_2$ bezw.

[1] Vgl. S. 42. Zeile 29.

$\widetilde{A}'''_2\widetilde{A}'''_3$ geordnet ist. Die Menge $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2<1\}-(O, \widetilde{A}'''_1\widetilde{A}'''_2+\widetilde{A}'''_2\widetilde{A}'''_3)$ ist homöomorph mit der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$.

Wir zerlegen die Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ die beiden Dreiecke $A_1^{IV}A_2^{IV}A_3^{IV}$ und $A_1^{IV}A_2^{V}A_3^{IV}$ gibt und $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1-(A_1^{IV}A_2^{IV}A_3^{IV}+A_1^{IV}A_2^{V}A_3^{IV})$ ebenso wie $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir konstruieren eine topologische Abbildung T' von der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ auf $\{y_1^2+y_2^2+y_3^2<1\}-(O, \widetilde{A}'''_1\widetilde{A}'''_2+\widetilde{A}'''_2\widetilde{A}'''_3)$, so daß $T'(A_1^{IV}A_2^{IV}A_3^{IV})=(O, \widetilde{A}'''_1\widetilde{A}'''_2+\widetilde{A}'''_2\widetilde{A}'''_3)=T'(A_1^{IV}A_2^{V}A_3^{IV})$ ist.

Es gibt auf $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$ die Kanten $A_2^{IV}A^{IV}$, $A_2^{IV}A_1^{IV}$, $A_1^{IV}A_2^{V}$, $A_2^{V}B_2^{V}$, $B_2^{V}B_3^{V}$, $\cdots$, $B^{V}_{n-1}B^{V}_n(T'(A^{IV})=\widetilde{A}''')$, und zwar, daß der Schnitt $\mathfrak{P}(AB_1)$, $\mathfrak{P}_1(A_2A_1)$, $\mathfrak{P}_2(A_1A_2)$, $\mathfrak{P}(B_1B_2)$, $\mathfrak{P}(B_2B_3)$, $\cdots$, $\mathfrak{P}(B_{n-1}B_n)$ beziehungsweise zu der Kante $A^{IV}A_2^{IV}$, $A_2^{IV}A_1^{IV}$, $A_1^{IV}A_2^{V}$, $A_2^{V}B_2^{V}$, $B_2^{V}B_3^{V}$, $\cdots$, $B^{V}_{n-1}B^{V}_n$ geordnet ist.

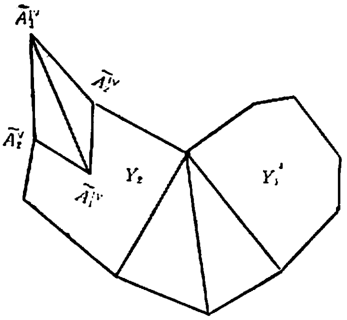

Abb. 3

Wir zerlegen die Sphäre $t_1^2+t_2^2+t_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen derart, daß es auf S''_1 die beiden Zellen Y' und Y'' und die beiden Dreiecke $\widetilde{A}_3^{IV}\widetilde{A}_2^{IV}\widetilde{A}_1^{IV}$ und $\widetilde{A}_3^{IV}\widetilde{A}_2^{V}\widetilde{A}_1^{IV}$ gibt und $S'_1-(Y'+Y''+\widetilde{A}_1^{IV}\widetilde{A}_2^{IV}\widetilde{A}_3^{IV}+\widetilde{A}_1^{IV}\widetilde{A}_2^{V}\widetilde{A}_3^{IV})$ ebenso wie S'_1 in Dreiecke zerlegt ist.

Die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ wird durch $(O, B_n^{IV}A^{IV}+A^{IV}A_2^{IV}+A_2^{IV}A_3^{IV}+A_3^{IV}A_1^{IV}+A_1^{IV}A_2^{V}+A_2^{V}B_2^{IV}+\cdots+B_{n-1}^{IV}B_n^{IV})$ in die beiden Kugeln K_1 und K_2 zerlegt. Die Zelle X' ist in dem Rand von einem von den beiden K_1 und K_2, etwa von K_1, enthalten, und die andere X'' ist in dem Rand von K_2 enthalten. Wir identifizieren X' und X'', so bekommen wir aus K_1 und K_2 eine Kugel K. Wir können dann eine topologische Abbildung T'' von der Kugel $t_1^2+t_2^2+t_3^2<1$ auf K derart konstruieren, daß $T''(\widetilde{A}_1^{IV}\widetilde{A}_2^{IV}\widetilde{A}_3^{IV})=A_1^{IV}A_2^{IV}A_3^{IV}$, $T''(\widetilde{A}_1^{IV}\widetilde{A}_2^{V}\widetilde{A}_3^{IV})=A_1^{IV}A_2^{V}A_3^{VI}$, $T''(Y')=T''(Y'')=(O, B_n^{IV}A^{IV}+A^{IV}A_2^{IV}+\cdots+B_{n-1}^{IV}B_n^{IV})$ ist.

Wir setzen $TT'T''=T''_1$ und $T''_1(Y')=T''_1(Y'')=Y$; $\mathfrak{K}'_1-Z+Y+A_1A_2A_3=\mathfrak{K}''_1$. Wir nehmen als Grundrechteck von Y das Rechteck R_1 auf. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt sind.

Wir behandeln nun den

3. *Fall.* Wir nehmen erstens an, daß A_1A_2 mit AB übereinstimmt.

α). Wenn sowohl A_2A_3 als auch A_3A_1 nicht mit $T'_1(A'''B'''_1)$, $T'_1(B'''_1B'''_2)$, $\cdots$, $T'_1(B'''_{n-1}B'''_n)$ übereinstimmt, so gibt es auf S'_1 die

Kanten $A'''_1A'''_3(A'''_1=A''')$ und $A'''_2\mathring{A}'''_3$ gibt, so daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem zu $A'''_1A'''_3$ bezw. $A_2'''\mathring{A}'''_3$ geordneten Schnitt enthalten ist.

Die Ecke A'''_2 muß mit einer von den beiden B''' und B^{IV}, etwa mit B''', übereinstimmen. Wenn A'''_3 und $\mathring{A}'''_3$ miteinander übereinstimmen, so wird die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ A'''_1A'''_3+A'''_2A'''_3+A'''B''')$ in die beiden Kugeln K_1 und K_2 zerlegt. Die Zelle Z_1 ist in dem Rand von einem von den beiden K_1 und K_2, etwa von K_1, enthalten und die andere Zelle Z_2 ist in dem Rand von K_2 enthalten. Wir identifizieren die Zellen Z_1 und Z_2, so bekommen wir aus K_1 und K_2 eine Kugel K.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke, so daß es auf S''_1 die beiden Dreiecke $\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{C}'''$ und $\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{C}'''$ und die beiden Dreiecke $\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{A}'''_3$ und $\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{A}_3^{\mathrm{IV}}$ gibt und $S''_1-(\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{C}'''+\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{C}'''+\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{A}'''_3+\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{A}_3^{\mathrm{IV}})$ ebenso wie S_1 in Dreiecke zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf K derart konstruieren, daß $T(\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{C}''')=A'''B'''C'''$, $T(\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{C}''')=A'''B^{\mathrm{IV}}C'''$ und $T(\widetilde{A}'''\widetilde{B}'''\widetilde{A}'''_3)=T(\widetilde{A}'''\widetilde{B}^{\mathrm{IV}}\widetilde{A}^{\mathrm{IV}}_3)=(O,\ A'''_1A'''_3+A'''_2A'''_3+A'''B''')$ ist.

Wir setzen $T'_1T=T''_1$, $T'_1((O,\ A'''_1A'''_3+A'''_2A'''_3+A'''B'''))=A_1A_2A_3$ und $\mathfrak{F}_i-Z+A_1A_2A_3=\mathfrak{G}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{G}_{i+1}$, $\mathfrak{K}'_1-Z-A_1A_2A_3=\mathfrak{K}''_1$.

Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{G}_{i+1}$ auch erfüllt sind.

Wenn A'''_3 und $\mathring{A}'''_3$ nicht miteinander übereinstimmen, so muß A'''_3 mit einer von B'''_1, B'''_2, $\cdots$, B'''_m, B_1^{IV}, B_2^{IV}, $\cdots$, B_n^{IV}, etwa mit B'''_1, und $\mathring{A}'''_3$ mit B_1^{IV} übereinstimmen.

Wir können auch auf ganz analoge Weise[1] wie im 2. Falle im 2. Schritte $\mathfrak{G}_{i+1}=\mathfrak{G}_i+A_1A_2A_3$ in E^3 einbetten, derart daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{G}_{i+1}$ erfüllt sind.

β). Wir nehmen nun an, daß A_1A_2 mit AB übereinstimmt und A_1A_3 mit $T'_1(A'''B'''_1)$ übereinstimmt, und daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem zu $A'''B'''_1$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB_1)$ enthalten ist. Es gibt auf S'_1 eine Kante $A'''_3A'''_2$, so daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem zu $A'''_3A'''_2$ geordneten Schnitt enthalten ist. Die Ecke A'''_3 muß mit B'''_1 oder mit B_1^{IV} übereinstimmen. Wenn A'''_3 mit B_1^{IV} übereinstimmt, so wird die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ durch das $(O,\ A'''B'''+A'''B_1^{\mathrm{IV}}+A'''_3A'''_2)$ in die beiden Kugeln K_1 und K_2 zerlegt. Indem wir die beiden Zellen Z_1 und Z_2 identifizieren, so bekommen wir eine Kugel K.

---

[1] Vgl. S. 55, Abb. 1. Abb.. 2.

Auf ähnliche Weise wie in α) im 3. Falle können wir $\mathfrak{F}_i - Z + A_1A_2A_3 = \mathfrak{G}_{i+1}$ in E^3 einbetten, so daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{G}_{i+1}$ erfüllt sind.

Auch wenn A_1A_2 mit AC übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog.

Wir nehmen nun an, daß die Kanten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 weder mit AB noch mit AC übereinstimmen. Es gibt auf S'_1 die Kanten $A'''_1A'''_2$, $\mathring{A}'''_2A'''_3$ und $\mathring{A}'''_3\mathring{A}'''_1$, so daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem zu $A'''_1A'''_2$ bezw. $\mathring{A}'''_2A'''_3$ bezw. $\mathring{A}'''_3\mathring{A}'''_1$ geordneten Schnitt enthalten ist.

γ_1) Wenn $A'''_2 = \mathring{A}'''_2$, $A'''_3 = \mathring{A}'''_3$ und $A'''_1 = \mathring{A}'''_1$ ist, so wird die Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ durch $(O, A'''_1A'''_2 + A'''_2A'''_3 + A'''_3A'''_1)$ in die beiden Kugeln K_1 und K_2 zerlegt. Wir setzen $T'_1((O, A'''_1A'''_2 + A'''_2A'''_3 + A'''_3A'''_1)) = A_1A_2A_3$, $\mathfrak{F}_i + A_1A_2A_3 = \mathfrak{F}_{i+1}$. Also können wir $\mathfrak{F}_{i+1}$ in E^3 einbetten. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt sind.

γ_2) Wir nehmen nun an, daß $A'''_2 = \mathring{A}'''_2$ und $A'''_3 \neq \mathring{A}'''_3$ $A'''_1 \neq \mathring{A}'''_1$ ist. Wir können dann ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A'''_3 = B'''_k$, $\mathring{A}'''_3 = B_k^{IV}$, $A'''_1 = B'''_j$, $\mathring{A}'''_1 = B_j^{IV}$ ist.

Indem wir auf ganz ähnliche Weise im 2. Falle die Zelle Z durch eine geeignete neue Zelle Y ersetzen und wir $\mathfrak{F}_i - Z + A_1A_2A_3 + Y = \mathfrak{F}_{i+1}$ setzen, können wir $\mathfrak{F}_{i+1}$ in E^3 derart einbetten, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt sind.

γ_3) Wir nehmen nun an, daß $A'''_2 = \mathring{A}'''_2$, $A'''_3 = \mathring{A}'''_3$ und $A'''_1 \neq \mathring{A}'''_1$ ist. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A'''_1 = B'''_k$ und $\mathring{A}'''_1 = B_k^{IV}$ ist.

Es gibt auf S_1 die Kanten $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3$, $A'_3A'_1$, so daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ in dem zu $A'_1A'_2$ bezw. $A'_2A'_3$ bezw. $A'_3A'_1$ geordneten Schnitt enthalten ist. Die Sphäre S_1 wird durch den Kantenweg $A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + A'_3A'_1$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt. Es gibt auch auf S_1 eine Kante $B'C'$ und eine Ecke A', so daß das Dreieck ABC sowohl in dem zu $B'C'$ geordneten Schnitt als auch in dem zu A' geordneten Kegel enthalten ist. Nach der Bedingung 7 im 1. Schritte müssen $B'C'$ und A' in einer und derselben von den beiden H_1 und H_2, etwa in H_1, enthalten sein.

Wir verbinden die beiden Ecken B' und A' durch einen Kantenweg auf l, so daß l einen einfachen Bogen auf S_1 bildet und jede Kante von l auf H_1 liegt. Wir setzen $T_1\{(O, l + A'B')\} = Y$ und wir ersetzen die Zelle Z durch die Zelle Y. Wir können dann offenbar $\mathfrak{F}_i - Z + Y + A_1A_2A_3 = \mathfrak{F}_{i+1}$ in E^3 einbetten. Es ist leicht einzusehen, daß die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt sind.

γ_4) Wir nehmen nun an, daß $A'''_2 \neq \mathring{A}'''_2$ $A'''_3 \neq \mathring{A}'''_3$ und $A'''_1 \neq \mathring{A}'''_1$

ist. Die beiden $B'C'$ und A' müssen in einer und derselben von den beiden H_1 und H_2, etwa in H_1, enthalten sein, wo $B'C'$, A', H_1 und H_2 dieselben Bedeutungen wie in γ_3) haben. Es ist leicht einzusehen, daß γ_4) in der Tat nicht sich ergeben kann.

Wir behandeln nun den

4. *Fall.* Es gibt auf S'_1 eine Kante $A'_2A'_3$ und eine Ecke A'_1, so daß das Dreieck $A_1A_2A_3$ sowohl in dem zu $A'_2A'_3$ geordneten Schnitt als auch in dem zu A'_1 geordneten Kegel enthalten ist. Wir verbinden die beiden Ecken A'_2 und A'_1 durch einen Kantenweg l auf S'_1, so daß l einen einfachen Bogen auf S'_1 bildet und die Ecken A'_3 nicht auf l liegt und die Kanten $A'''B'''$, $A'''B^{\text{IV}}$ und $A'''C'''$ nicht auf l liegen. Die Kanten von l seien $C'_0C'_1(C'_0=A'_1)$, $C'_1C'_2, \cdots, C'_{n-1}C'_n(C'_n=A'_2)$, und wir bezeichnen den zu $C'_{j-1}C'_j (j=1, 2, \cdots, n)$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(C_{j-1}C_j)$. Wir nehmen ein in $\mathfrak{P}(C_{j-1}C_j)$ enthaltenes Dreieck $C_{j-1}C_jD_{j-1}$ auf.

Es gibt nach der Zwischenbehauptung I ein Rechteck R_2 und die Abbildung Q von R_2 in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.

1. R_2 ist in Dreiecke zerlegt, und die Seite von R_2 ist in die Kanten $A''_2A''_1$, $C''_0D''_0(C''_0=A''_1)$, $D''_0C''_1$, $C''_1D''_1$, $D''_1C''_2, \cdots, C''_{n-1}D''_{n-1}$, $D''_{n-1}C''_n(C''_n=A''_2)$ zerlegt.

2. $B''D''G''$ sei ein Dreieck auf R_2, so ist $Q(B''D''G'')$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q(A''_2A''_1)=A_2A_1$, $Q(C''_0D''_0)=C_0D_0(C_0=A_1)$, $Q(D''_0C''_1)=D_0C_1$, $Q(C''_1D''_1)=C_1D_1$, $Q(D''_1C''_2)=D_1C_2, \cdots, Q(C''_{n-1}D''_{n-1})=C_{n-1}D_{n-1}$, $Q(D''_{n-1}C''_n)=D_{n-1}C_n(C_n=A_2)$.

3. $C''_jF''G''$ sei ein mit C''_j inzidentes Dreieck auf R_2, so ist $Q(C''_jF''G'')$ in dem zu C'_j geordneten Kegel enthalten.

Wir fügen zu R_2 die Dreiecke $C''_{j-1}C''_jD''_{j-1}$ $(j=1, 2, \cdots, n)$ ein, so erhalten wir ein neues Rechteck R_1. Wir bilden die Dreiecke $C''_{j-1}C''_jD''_{j-1}$ in $\mathfrak{M}$ ab, so daß $Q(C''_{j-1}C''_jD''_{j-1})=C_{j-1}C_jD_{j-1}$ ist. Wir können dann zu $\mathfrak{F}_i$ eine Zelle Z_1, wo R_1 das Grundrechteck von Z_1 bildet, und das Dreieck $A_1A_2A_3$ derart einfügen, daß, wenn wir $\mathfrak{F}_i+Z_1+A_1A_2A_3=\mathfrak{F}_{i+1}$, $\mathfrak{G}_i+A_1A_2A_3=\mathfrak{G}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}'_1-A_1A_2A_3-Z_1=\mathfrak{K}''_1$ setzen, $\mathfrak{K}''_1$ mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ homöomorph ist und die Bedingungen 1—7 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt sind.

3. Schritt. $\mathfrak{G}_i$ sei ein stark-zusammenhängender 2-Komplex, so daß jedes Dreieck von $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Wir nehmen an, daß, wenn wir geeignete Zellen[1)] $Z_1, Z_2, \cdots, Z_q$ aufnehmen und $\mathfrak{G}_i+Z_1+\cdots+Z_q$ mit $\mathfrak{F}_i$ bezeichnen, so wir $\mathfrak{F}_i$ in E^3 derart einbetten können, daß $E^3-\mathfrak{F}_i$ den folgenden Bedingungen genügt.

Bedingung 1. Jede Komponente von $E^3-\mathfrak{F}_i$ ist homöomorph mit der

1) Die beiden Kanten auf der Seite von Z_1 mögen miteinander übereinstimmen.

3-Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$. Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3-\mathfrak{F}_i$ mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ und die topologischen Abbildungen von $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$ mit $T_1, T_2, \cdots, T_p$. Dia Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, die wir mit S_j $(j=1, 2, \cdots, p)$ bezeichnen, ist in Zellen und Dreiecke zerlegt. Die induzierte Abbildung T_j bildet jedes Dreieck bezw. jede Zelle auf S_j topologisch auf das in der Begrenzung von $\mathfrak{K}_j$ enthaltene Dreieck bezw. auf die in der Begrenzung von $\mathfrak{K}_j$ enthaltene Zelle ab.

Bedingung 2. R_j sei das Grundrechtecke von $Z_j(j=1, 2, \cdots, q)$ und Q_j sei die Abbildung von R_j in $\mathfrak{M}$. Wir bezeichnen die Menge der Bilder durch Q_j von allen mit den auf der Seite von R_j liegenden Kanten inzidenten Dreiecken mit M_j. Wir bezeichnen die Vereinigungsmenge $\sum_{j=1}^{q} M_j$ mit M und die Vereinigungsmenge $M+\mathfrak{G}_i$ mit $\mathfrak{A}_i$.

Zu jeder Kante, etwa $A'B'$, auf S_j ist ein bestimmter Schnitt in $\mathfrak{A}_i$ mit der Achse $T_j(A'B')$ geordnet. Wenn $A'B'$ etwa auf S_1 liegt und nicht auf den Ränder der Zellen auf S_1 liegt, und wenn $A'B'C'$ nnd $A'B'D'$ die beiden mit $A'B'$ inzidenten Dreiecke sind, so daß $T_1(A'B'C')=ABC$ und $T_1(A'B'D')=ABD$ ist, so hat $\mathfrak{P}(AB)$ als Endedreiecke die Dreiecke ABC und ABD.

Wenn $A'B'$ auf dem Rand einer Zelle Z'_1 auf S_1 liegt, und wenn es auf S_1 ein mit $A'B'$ inzidentes Dreieck $A'B'C'$ gibt und ein Dreieck $A''B''D''$ ein mit der Grundkante[1)] $A''B''$ von $A'B'$ inzidentes Dreieck auf R_1 ist, so daß $T_1(A'B'C')=ABC$ und $Q_1(A''B''D'')=ABD$ ist, so hat $\mathfrak{P}(AB)$ als Endedreiecke die Dreiecke ABC und ABD.

Wenn $A'B'$ sowohl auf dem Rand von Z'_1 als auch auf dem Rand von Z'_2 liegt, und wenn ein Dreieck $A''B''C''$ ein mit der Grundkante[1)] $A''B''$ von $A'B'$ inzidentes Dreieck und ein Dreieck $A''_1B''_1D''$ ein mit der Grundkante $A''_1B''_1$ von $A'B'$ inzidentes Dreieck ist, und wenn $Q_1(A''B''C'')=ABC$ und $Q_2(A''_1B''_1D'')=ABD$ ist, so hat $\mathfrak{P}(AB)$ als Endedreiecke die Dreiecke ABC und ABD.

$\mathfrak{P}(AB)$ sei ein Schnitt in $\mathfrak{A}_i$ und ABC und ABD seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(AB)$. Wenn $\mathfrak{P}(AB)$ nicht ausgeartet ist, so gibt es auf einer bestimmter unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, eine Kante $A'B'$ und die Dreiecke $A'B'C'$ und $A'B'D'$, so daß $\mathfrak{P}(AB)$ zu $A'B'$ geordnet ist, oder gibt es auf S_1 $A'B'$ und $A'B'C'$ und Z'_1, so daß $A'B'$ in dem Rand von Z'_1 liegt und $\mathfrak{P}(AB)$ zu $A'B'$ geordnet ist, oder gibt es auf S'_1 $A'B'$ und die beiden Zellen Z'_1 und Z'_2, so daß $A'B'$ sowohl auf dem Rand von Z'_1 als auch auf dem Rand von Z'_2 liegt und $\mathfrak{P}(AB)$ zu $A'B'$ geordnet ist. Wenn

1) Wir heissen von nun an die Kante $A''B''_1$ und $B''_{j-1}B''_j$ auf R die Grundkante von $A'B'_1$ und $B'_{j-1}B'_j$ auf S_1 (Vgl. S. 42)

$\mathfrak{P}(AB)$ nicht ausgeartet ist, so ist die obige Kante einzig und bestimmt.

Wenn zu der Kante $A'B'$ auf S_j ein ausgearteter Schnitt geordnet ist, so liegt $A'B'$ auf dem Rand von mindestens einer Zelle. Wenn zu $A'B'$ ein ausgearteter Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ geordnet ist, so kann der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ gelegentlich zu den verschiedenen Kanten geordnet sein.

Wenn eine Kante $A'_1A'_2$ auf dem Rand von einer Zelle auf S_j liegt, so sind einige Kanten auf den Ränder von den Zellen auf derselben S_j mit $A'_1A'_2$ äquivalent. Wenn $A'_1A'_2$ und $A''_1A''_2$ miteinander äquivalent sind und $T_1(A'_1) = T_1(A''_1)$ ist, so sind definitionsgemäß die beiden Ecken A'_1 und A''_1 miteinander äquivalent.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'B'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ ist in einem bestimmten Schnitt in $\mathfrak{G}_t$ enthalten, den wir mit $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezeichnen. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ seien ABD und ABE. Wir nehmen an, daß $A'B'$ in dem Rand von einer Zelle auf S_1 liegt. Es gibt[1] dann auf S_1 die Zellen $Z'_1, Z''_1, Z'_2, Z''_2, \cdots, Z'_m, Z''_m$ und die beiden Dreiecke $A'_0B'_0D'$ und $A'_1B'_1E'$, so daß $T_1(A'_0B'_0D')=ABD$, $T_1(A'_1B'_1E') =ABE$ ist und $A'_0B'_0$ bezw. $A'_1B'_1$ auf Z'_1 bezw. Z''_m liegt und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens eine Kante l_1 bezw. l_2 bezw. $\cdots$ bezw. l_{m-1} gemeinsam haben und $A'_0B'_0$, $A'_1B'_1$, l_1, $\cdots$ und l_{m-1} miteinander äquivalent sind. Jede, mit $A'B'$ äquivalente, Kante stimmt mit einer unter $A'_0B'_0$, $A'_1B'_1$, $l_1, \cdots, l_{m-1}$ überein.

Bedingung 3. Zu jeder Ecke, etwa A', auf $S_j(j = 1, 2, \cdots, p)$ ist ein Kegel $\mathfrak{B}(A)$ in $\mathfrak{G}_t$ mit der Spitze $T_j(A') = A$ geordnet. Wenn A' etwa auf S_1 liegt und ein Dreieck $A'B'C'$ mit der Ecke A' inzident ist, so ist $T_1(A'B'C')$ in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten.

$\mathfrak{B}(A)$ sei ein Kegel in $\mathfrak{G}_t$, so gibt es auf einer bestimmten unter S_1, S_2, $\cdots S_p$, etwa auf S_1, mindestens eine Ecke A', so daß $\mathfrak{B}(A)$ zu A' geordnet ist. Wenn ein Dreieck ABC sowohl in $\mathfrak{G}_t$ als auch in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten ist, und wenn eine Ecke A' auf S_1 liegt und $\mathfrak{B}(A)$ zu A' geordnet ist, so gibt es auf S_1 ein Dreieck $A''B''C''$ von der Art, daß $T_1(A''B''C'') = ABC$ ist und der zu $A''B''$ bezw. $A''C''$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}(A)$ enthalten ist. Es muß dann $A'' = A'$ oder A'' und A' müssen miteinander äquivalent sein.

Zu den äquivalenten Ecken ist ein und derselben Kegel in $\mathfrak{G}_t$ geordnet. Wenn A' auf S_i und B' auf S_j liegt und A' und B' nicht äquivalent sind, und wenn der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ zu A' und der Kegel $\mathfrak{B}(B)$ zu B' geordnet ist, so stimmen $\mathfrak{B}(A)$ und $\mathfrak{B}(B)$ nicht miteinander überein.

Bedingung 4. $A'B'$ sei eine Kante auf S_j und $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{B}(A)$ sei zu der Kante $A'B'$ bezw. der Ecke A' geordnet. $\mathfrak{P}(AB)$ ist dann in

[1] Es mag sein, daß $Z''_m = Z''_1$ ist.

$\mathfrak{B}(A)$ enthalten.

Bedingung 5. A' sei eine Ecke auf S_j. $\mathfrak{B}(A)$ sei ein zu A' geordneter Kegel. Wenn A' auf keinen Zellen auf S_j liegt, so bezeichnen wir die Menge aller auf S_j liegenden und mit der Ecke A' inzidenten Dreiecke mit M. Wenn $\mathfrak{B}(A)$ durch ein Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt ist, so gibt es auf S_j die beiden Kanten $A'B'$ und $A'C'$, die mit A' inzident sind, und zwar daß $T_j(A'B')=AB$, $T_j(A'C')=AC$ ist.

Die Menge M wird durch den Kantenweg $A'B'+A'C'$ in die beiden Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt, so daß, je zwei Dreiecke $A'D'_1E'_1$ und $A'E'_hD'_2$ von M, die in einer und derselben von den beiden M_1 und M_2 enthalten sind, durch die Folge der Dreiecke $A'D'_1E'_1$, $A'E'_1E'_2$, $\cdots$, $A'E'_{h-1}E'_h$, $A'E'_hD'_2$ verbunden werden, und daß jede Kante unter $A'E'_1$, $A'E'_2$, $\cdots$, $A'E'_h$ weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmt, und daß dies für je zwei Dreiecke $A'D'_1E'_1$ und $A'E'_hD'_2$ nicht der Fall ist, die beziehungsweise in M_1 und M_2 enthalten sind.

Die Bilder durch T_j von allen Dreiecken, die in M_1 enthalten sind, sind in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A)$, enthalten und die Bilder durch T_j von allen Dreiecken, die in M_2 enthalten sind, sind in dem andern $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. $A'D'$ sei eine Kante, die in M_1 oder in M_2 enthalten ist und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmt, und $\mathfrak{P}(AD)$ sei zu $A'D'$ geordnet. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AD)$ ist dann in $\mathfrak{B}_1(A)$ oder in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten, jenachdem $A'D'$ in M_1 oder in M_2 enthalten ist.

A'_0 und A'_1 seien die beiden miteinander äquivalenten und nicht miteinander übereinstimmenden Ecken auf S_j. Ea gibt auf S_j die Zellen Z'_1 und Z''_1, so daß A'_0 bezw. A'_1 auf Z'_1 bezw. Z''_1 liegt und $T_j(Z'_1)=T_j(Z''_1)$ ist, oder, wenn es solche Zellen nicht gibt, so gibt es auf S_j die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, Z''_2, $\cdots$, Z'_m, Z''_m und die Ecken B'_1, B'_2, $\cdots$, B'_{m-1}, so daß $T_j(Z'_1)=T_j(Z''_1)$, $T_j(Z'_2)=T_j(Z''_2)$, $\cdots$, $T_j(Z'_m)=T_j(Z''_m)$ ist und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens die Ecke B'_1 bezw. B'_2 bezw. $\cdots$ bezw. B'_{m-1} gemeinsam haben und alle Ecken A'_0, B'_1, B'_2, $\cdots$, B'_{m-1}, A'_1 miteinander äquivalent sind und A'_0 mit B'_1 übereinstimmt oder A'_0 auf Z'_1 und B'_1 auf Z''_1 liegt und A'_1 mit B'_{m-1} übereinstimmt oder A'_1 auf Z''_m und B'_{m-1} auf Z'_m liegt. Diese Folge der Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, Z''_2, $\cdots$, Z'_m, Z''_m nennen wir im folgenden die, die Ecken A'_0 und A'_1 verbindende, Folge der Zellen.

Bedingung 6. Es sei $A'_1A'_2A'_3$ ein Dreieck auf S_1 und $T_1(A'_1A'_2A'_3)=A_1A_2A_3$, und die beiden mit $A_1A_2A_3$ inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$ seien $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_2A_3A_5$. Zu $A'_1A'_2A'_3$ ist ein bestimmtes Simplex von den beiden $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_2A_2A_5$, etwa $A_1A_2A_3A_4$, geordnet, so daß, wenn der zu $A'_1A'_2$ geordnete Schnitt $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ nicht ausgeartet ist, $A_1A_2A_4$ in

$\mathfrak{P}(A_1A_2)$ enthalten ist.

Es sei $A_1A_2A_3$ ein in $\mathfrak{G}_i$ enthaltenes Dreieck, und $A_1A_2A_3A_4$ und $A_1A_2A_3A_5$ seien die beiden mit $A_1A_2A_3$ inzidenten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$. Es gibt dann genau die beiden Dreiecke $A'_1A'_2A'_3$ auf S_j und $A''_1A''_2A''_3$ auf S_k, so daß $T_j(A'_1A'_2A'_3)=A_1A_2A_3$ und $T_k(A''_1A''_2A''_3)=A_1A_2A_3$ ist. Wenn $A_1A_2A_3A_4$ zu $A'_1A'_2A'_3$ geordnet ist, so ist $A_1A_2A_3A_5$ zu $A''_1A''_2A''_3$ geordnet.

Bedingung 7. $T_j(S_j)$ ist offenbar ein 2-Komplex in $\mathfrak{M}$. Es gibt ein 3-Teilkomplex $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$, so daß $T_j(S_j)$ (mod. 2) einen Rand von $\mathfrak{M}_1$ bildet und ein zu einem auf S_j liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist.

Bedingung 8. $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1$ sei ein in einem unter $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_p$, etwa in $\mathfrak{M}_1$, enthaltener Kantenweg und genüge der folgenden Bedingung.

Badingung. Wenn eine Ecke unter $A_1, A_2, \cdots, A_n$, etwa A_q, in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so gibt es auf S_1 eine Ecke A'_q, derart daß $T_1(A'_q)=A_q$ ist und sowohl $A_{q-1}A_q$ als auch A_qA_{q+1} in dem zu A'_q geordneten Kegel enthalten ist. Wenn eine Kante unter $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, etwa $A_{q-1}A_q$, in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, so gibt es auf S_1 eine Kante $A'_{q-1}A'_q$, so daß $T_1(A'_{q-1}A'_q)=A_{q-1}A_q$ ist und $A_{q-2}A_{q-1}$ bezw. A_qA_{q+1} in dem zu A'_{q-1} bezw. A'_q geordneten Kegel enthalten ist.

Es gibt dann ein Rechteck R und die Abbildung Q von R in $\mathfrak{M}$, und zwar, daß R und Q den folgenden Bedingungen genügen.

1. R ist in Dreiecke zerlegt und die Seite von R ist in Kanten $A''_1A''_2, \cdots, A''_{n-1}A''_n, A''_nA''_1$ zerlegt. Beide Dreiecke auf R haben keine Punkte gemeinsam oder 1, 2, 3 Ecken gemeinsam oder ihre einzige Kante und eine Ecke gemeinsam oder ihren 1, 2 Kanten gemeinsam.

2. EFG sei ein Dreieck auf R, so ist $Q(EFG)$ ein Dreieck in $\mathfrak{M}$. $Q(A''_1A''_2)=A_1A_2, \cdots, Q(A''_{n-1}A''_n)=A_{n-1}A_n, Q(A''_nA''_1)=A_nA_1$.

3. Wenn A_q in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist, und wenn sowohl $A_{q-1}A_q$ als auch A_qA_{q+1} in dem zu A'_q geordneten Kegel $\mathfrak{B}(A_q)$ enthalten ist, so ist das Bild jedes, mit A''_q inzidenten, Dreiecks auf R durch die Abbildung Q in dem Kegel $\mathfrak{B}(A_q)$ enthalten.

Es sei ABC ein in $\mathfrak{M}$ enthaltenes Dreieck, das nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und mit $\mathfrak{G}_i$ mindestens eine Kante gemeinsam hat. Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle.

1. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ nur eine einzige Kante, etwa BC, gemeinsam.

2. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ die beiden Kanten, etwa AB und AC, gemeinsam.

3. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ drei Kanten AB, AC und BC gemeinsam.

4. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ die Kante BC und die Ecke A gemeinsam.

Wir behandeln erstens den

1. *Fall.* Es gibt auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, eine Kante $B'C'$, so daß das Dreieck ABC in dem zu $B'C'$ geordneten Schnitt enthalten ist. Solche Kante $B'C'$ ist nicht notwendigerweise einzig.

Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O, B'C')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''(B''C''=l_1)$ und $A''B''C''(B''C''=l_2)$ gibt und $S'_1-\{A''B''C''(B''C''=l_1)+A''B''C''(B''C''=l_2)\}$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O, B'C')$ derart konstruieren, daß $T(B''C''A''; B''C''=l_1)=T(B''C''A''; B''C''=l_2)=(O, B'C')$ und $T(l_1)=T(l_2)=B'C'$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T'_1(A''B''C'')=ABC$, $\mathfrak{G}_i+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+ABC=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}_1-ABC=\mathfrak{K}'_1$.

Bedingung 1. Bedingung I ist offenbar für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt.

Bedingung 2. Wir bezeichnen den zu $B'C'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. BCD und BCE seien die Endedreiecke von $\mathfrak{P}(BC)$. Wir nehmen erstens an, daß BCD und BCE nicht miteinander übereinstimmen. $\mathfrak{P}(BC)$ wird durch das Dreieck BCA in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa $\mathfrak{P}_1(BC)$, hat als Endedreiecke die Dreiecke BCD und BCA und der andere $\mathfrak{P}_2(BC)$ hat als Endedreiecke die Dreiecke BCE und BCA.

Wenn die Kante $B'C'$ nicht auf den Ränder der Zellen auf S_1 liegt, so gibt es auf S_1 die beiden, mit der Kante $B'C'$ inzidenten, Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$, so daß $T_1(B'C'D')=BCD$ nnd $T_1(B'C'E')=BCE$ ist. Jenachdem $B''C''D''$ oder $B''C''E''$ mit l_1 inzident ist, wo $T(B''C''D'')=B'C'D'$ oder $T(B''C''E'')=B'C'E'$ ist, lassen wir zu der Kante l_1 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ oder $\mathfrak{P}_2(BC)$ ordnen.

Wenn $B'C'$ auf dem Rand einer Zelle Z'_1 auf S_1 liegt und es ein mit $B'C'$ inzidentes Dreieck $B'C'D'$ gibt, so daß $T_1(Z'_1)=Z_1$ und $T_1(B'C'D')=BCD$ ist, und wenn wir ein mit der Grundkante von $B'C'$ inzidentes Dreieck auf R_1 mit $B''C''E''$ bezeichnen, so ist $Q_1(B''C''E'')=BCE$, wo R_1 das Grundrechteck von Z_1 und Q_1 die Abbildung von R_1 in $\mathfrak{M}$ bedeutet.

Jenachdem $B''C''D''$ mit l_1 oder mit l_2 inzident ist, wo $T(B''C''D'')=B'D'D'$ ist, lassen wir zu der Kante l_1 oder l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ ordnen.

Wenn es auf S_1 die beiden, mit der Kante $B'C'$ inzidenten, Zellen Z'_1 und Z'_2 gibt, so daß $T_1(Z'_1)=Z_1$ und $T_1(Z'_2)=Z_2$ ist, und wenn $B''C''D''$ ein mit der Grundkante $B''C''$ von $B'C'$ inzidentes Dreieck auf R_1 ist und

$\widetilde{B}''\widetilde{C}''E''$ ein mit der Grundkante $\widetilde{B}''\widetilde{C}''$ von $B'C'$ inzidentes Dreieck auf R_2 ist, so ist $Q_1(B''C''D'')=BCD$ und $Q_2(\widetilde{B}''\widetilde{C}''E'')=BCE$, wo R_1 bezw. R_2 das Grundrechteck von Z_1 bezw. Z_2 und Q_1 bezw. Q_2 die Abbildung von Z_1 bezw. Z_2 in $\mathfrak{M}$ bedeutet.

Jenachdem Z''_1 mit l_1 oder mit l_2 inzident ist, wo $T(Z''_1)=Z'_1$ ist, lassen wir zu der Kante l_1 oder l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ ordnen.

Wir nehmen zweitens an, daß BCD und BCE miteinander übereinstimmen. Wenn die Kante $B'C'$ nicht auf den Ränder der Zellen auf S_1 liegt, so gibt es auf S_1 die beiden, mit der Kante $B'C'$ inzidenten, Dreiecke $B'C'D'$ und $B'C'E'$, so daß $T_1(B'C'D')=BCD$ und $T_1(B'C'E')=BCE$ ist. $\mathfrak{P}(BC)$ ist dann nicht ausgeartet. $\mathfrak{P}(BC)$ wird durch das Dreieck BCA in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$ zerlegt, und sowohl $\mathfrak{P}_1(BC)$ als auch $\mathfrak{P}_2(BC)$ hat als Endedreiecke die beiden Dreiecke BCD und BCA.

Es gibt genau die beiden 3-Simplexe $BCDF$ und $BCDG$ in $\mathfrak{M}$, die mit BCD inzident sind. $BCDF$ ist zu einem von den beiden $B'C'D'$ und $B'C'E'$, etwa zu $B'C'D'$, geordnet. Wenn BCF nicht mit BCA übereinstimmt, so ist BCF in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(BC)$, enthalten.

Es gibt ein Dreieck $B''C''D''$ auf S'_1, so daß $T(B''C''D'')=B'C'D'$ ist. Jenachdem $B''C''D''$ mit l_1 oder mit l_2 inzident ist, lassen wir zu der Kante l_1 oder l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ oder $\mathfrak{P}_2(BC)$ ordnen.

Wenn BCF mit BCA übereinstimmt, so besteht einer von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ uud $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa $\mathfrak{P}_1(BC)$, aus den beiden Dreiecken BCD und BCA. Jenachdem $B''C''D''$ mit l_1 oder mit l_2 inzident ist, lassen wir zu der Kante l_1 oder l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ oder $\mathfrak{P}_2(BC)$ ordnen.

Wenn $B'C'$ auf dem Rand einer Zelle Z'_1 auf S_1 liegt und es ein mit $B'C'$ inzidentes Dreieck $B'C'D'$ gibt, so daß $T_1(Z'_1)=Z_1$ und $T_1(B'C'D')=BCD$ ist, und wenn wir ein mit der Grundkante von $B'C'$ inzidentes Dreieck auf R_1 mit $B''C''E''$ bezeichnen, so ist $Q_1(B''C''E'')=BCD=BCE$, wo R_1 das Grundrechteck von Z_1 und Q_1 die Abbildung von R_1 in $\mathfrak{M}$ bedeutet.

Der Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ muß dann aus allen mit BC inzidenten Dreiecken bestehen. Denn, wenn $\mathfrak{P}(BC)$ ausgeartet wäre, so würde das Dreieck ABC bereits in $\mathfrak{G}_i$ enthalten sein. Wir nehmen an, daß $BCDF$ zu $B'C'D'$ geordnet ist. Wenn BCF nicht mit BCA übereinstimmt, so ist BCF in nur einem von den beiden $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_2(BC)$, etwa in $\mathfrak{P}_1(BC)$, enthalten. Wenn BCF mit BCA übereinstimmt, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{P}_1(BC)$ aus den beiden Dreiecken BCD und BCA besteht. Jenachdem $B''C''D''$ mit l_1 oder mit l_2 inzident ist, wo $T(B''C''D'')=B'C'D'$ ist, lassen wir zu der Kante l_1 oder l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ ordnen.

Wenn es auf S_1 die beiden, mit der Kante $B'C'$ inzidenten, Zellen Z'_1 und Z'_2 gibt, so können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ ausgeartet ist. Wir lassen dann sowohl zu l_1 als auch zu l_2 den Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ ordnen.

Bedingung 3. Wir lassen zu der Ecke A'' den aus allen, mit A inzidenten, Dreiecken bestehenden Kegel $\mathfrak{B}(A)$ ordnen. A''_1 sei eine Ecke auf S'_1 und von A'' verschieden, so lassen wir zu A''_1 den zu $T(A''_1)$ geordneten Kegel ordnen.

Bedingung 4. $A'_1A'_2$ sei eine Kante auf S'_1 oder S_j und $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ bezw. $\mathfrak{B}(A_1)$ sei zu der Kante $A'_1A'_2$ bezw. der Ecke A'_1 geordnet. $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ ist dann in $\mathfrak{B}(A_1)$ enthalten.

Bedingung 5. Bedingung 5 ist offenbar für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt.

Bedingung 6. $E''F''G''$ sei ein Dreieck auf S'_1, das weder mit $A''B''C''(B''C''=l_1)$ noch mit $A''B''C''(B''C''=l_2)$ übereinstimmt, und wir setzen $T(E''F''G'') = E'F'G'$. Ein bestimmtes Simplex $EFGH$ ist zu $E'F'G'$ geordnet. Wir lassen dann zu $E''F''G''$ auch das Simplex $EFGH$ ordnen.

Wir nehmen nun an, daß alle Zellen auf S'_1 vorläufig ebenso wie ihre Grundrechtecke in Dreiecke zerlegt sind. Indem wir für alle Dreiecke auf S'_1 die in der Zwischenbehauptung II erwähnte Vorschrift anwenden, können wir sowohl zu $A''B''C''(B''C''=l_1)$ als auch zu $A''B''C''(B''C''=l_2)$ ein bestimmtes 3-Simplex ordnen lassen.

Es gibt genau die beiden, mit ABC inzidenten, 3-Simplexe $ABCK$ und $ABCJ$ in $\mathfrak{M}$. Wenn $ABCK$ zu $A''B''C''(B''C''=l_1)$ sich ordnen läßt, so läßt sich $ABCJ$ zu $A''B''C''(B''C''=l_2)$ ordnen.

Bedingung 7. Bedingung 7 ist offenbar für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt.

Bedingung 8. Wir können auf ganz analoge Weise wie in der Zwischenbehauptung I beweisen, daß die Bedingung 8 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt ist. Wir behandeln zweitens den

2. *Fall.* Es gibt auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, die Kanten $A'B'$ und A'_0C', so daß $T_1(A'B')=AB$ und $T_1(A'_0C')=AC$ ist und das Dreieck ABC sowohl in dem zu $A'B'$ geordneten Schnitte als auch in dem zu A'_0C' geordneten Schnitte enthalten ist.

Fall α_1). Wir nehmen erstens an, daß $A'=A'_0$ ist. Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ A'B'+A'C')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $\widetilde{A}''B''C''$ gibt und $S'_1-(A''B''C''+\widetilde{A}''B''C'')$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O, A'B'+A'C')$ derart konstruieren, daß $T(A''B''C'')=T(\tilde{A}''B''C'')=(O, A'B'+A'C')$, $T(A''B'')=T(\tilde{A}''B'')=A'B'$ und $T(A''C'')=T(\tilde{A}''C'')=A'C'$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T'_1(A''B''C'')=ABC$, $\mathfrak{G}_i+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+ABC=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}_1-ABC=\mathfrak{K}'_1$. Wir wollen beweisen, daß die Bedingungen $1-8$ für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt sind.

Bedingung 1. Bedingung I ist für $\mathfrak{F}_{i+1}$ offenbar erfüllt.

Wir bezeichnen nun den zu der Ecke A' auf S' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$. $\mathfrak{B}(A)$ wird dann durch ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt oder nicht zerlegt. Wir behandeln erstens den Fall, worin $\mathfrak{B}(A)$ durch ABC nicht in die beiden Kegel zerlegt wird.

Bedingung 2. Wir können auf ganz analoge Weise wie im I. Falle im 3. Schritte zu den Kanten $A''B''$, $A''C''$, $\tilde{A}''B''$, $\tilde{A}''C''$, $B''C''$ die bestimmten Schnitte ordnen lassen.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'B'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ ist in einem bestimmten Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ enthalten, den wir mit $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezeichnen. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ seien ABD und ABE. Wir nehmen an, daß $A'B'$ in dem Rand von einer Zelle auf S_1 liegt. Es gibt dann auf S_1 die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, $Z''_2, \cdots$, Z'_m, Z''_m und die beiden Dreiecke $A'_0B'_0D'$ und $A'_1B'_1E'$, so daß $T_1(A'_0B'_0D')=ABD$, $T_1(A'_1B'_1E')=ABE$ ist und $A'_0B'_0$ bezw. $A'_1B'_1$ auf Z'_1 bezw. Z''_m liegt und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens eine Kante l_1 bezw. l_2 bezw. $\cdots$ bezw. l_{m-1} gemeinsam haben und $A'_0B'_0$, $A'_1B'_1$, $l_1, \cdots$ und l_{m-1} miteinander äquivalent sind.

Wenn $A'B'$ mit $l_k (1\leqq k\leqq m-1)$ übereinstimmt und $\tilde{Z}''_k$ mit der Kante $A''B''$ inzident ist, so bezeichnen wir alle Kanten $A''_0B''_0$, l'_1, $l'_2, \cdots$, l'_{k-1}, $A''B''$ als miteinander äquivalent und alle Kanten $\tilde{A}''B''$, $l'_{k+1}, \cdots$, l'_{m-1}, $A''_1B''_1$ als äquivalent, wo $T(\tilde{Z}''_k)=Z''_k$, $T(A''_0B''_0)=A'_0B'_0$, $T(l'_1)=l_1, \cdots$, $T(l'_{m-1})=l_{m-1}$ ist.

Bedingung 3. Wir bezeichnen die Menge von allen, mit der Ecke A' inzidenten, Dreiecken und Zellen auf S_1 mit M. Die Menge M wird durch den Kantenweg $B'A'+A'C'$ in die beiden Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt. Sowohl M_1 als auch M_2 enthält dann mindestens eine Zelle.

Angenommen in der Tat, daß eine von den beiden M_1 und M_2, etwa M_1, nicht die Zellen enthält. $T_1(M_1)+ABC$ (mod. 2) zerlegt dann offenbar den, aus allen mit A inzidenten 3-Simplexen in $\mathfrak{M}$ bestehenden, Komplex in die beiden Teilkomplexe. Folglich wird $\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel zerlegt ; dies widerspricht aber der Annahme, daß

$\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC nicht in die beiden Kegel zerlegt wird. Daher muß sowohl M_1 als auch M_2 mindestens eine Zelle enthalten. Folglich liegt sowohl A'' als auch $\widetilde{A}''$ auf den Zellen auf S'_1.

Wir bezeichnen die beiden Ecken A'' und $\widetilde{A}''$ als miteinander äquivalent, und wir lassen sowohl zu A'' als auch zu $\widetilde{A}''$ den Kegel $\mathfrak{B}(A)$ ordnen.

Bedinguug 4. Bedingung 4 ist offenbar für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt.

Bedingung 5. Wir bezeichnen den zu der Kante $A'B'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$. $\mathfrak{P}(AB)$ ist in einem einzigen und bestimmten Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ enthalten. Diesen Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(AB)$. Wir bezeichnen auch die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ mit ABD und ABE. Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $A''_1B''_1D''$ und $A''_0B''_0E''$, so daß $T_1(A''_1B''_1D'')=ABD$ und $T_1(A''_0B''_0E'')=ABE$ ist und sowohl der zu $A''_1B''_1$ gerodnete Schnitt als auch der zu $A''_0B''_0$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{P}_1(AB)$ enthalten ist.

Wir bezeichnen das mit A''_1D'' inzidente Dreieck mit $A''_1D''D''_1$ und das mit $A''_1D''_1$ inzidente Dreieck mit $A''D''_1D''_2$ usw. Es gibt dann auf S_1 die Dreiecke $A''_1B''_1D''$, $A''_1D''D''_1$, $A''_1D''_1D''_2, \cdots$, $A''_1D''_{q-1}D''_q$ und die Kante $A''_1D''_q$ liegt auf einer Zelle Z'_2.

Wir bezeichnen den zu $A''_1D''_q$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AD_q)$. Den Schnitt in $\mathfrak{G}_i$, der den Schnitt $\mathfrak{P}(AD_q)$ enthält, bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(AD_q)$. Wir bezeichnen auch die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AD_q)$ mit AD_qD_{q-1} und AD_qF, wo $T_1(A''_1D''_{q-1}D''_q)=AD_{q-1}D_q$ ist. Es gibt auf S_1 ein Dreieck $A'''D'''_qF'''$, so daß $T_1(A'''D'''_qF''')=AD_qF$ ist und der zu der Kante $A'''D'''_q$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{P}_1(AD_q)$ enthalten ist. Es gibt dann auf S_1 die Dreiecke $A'''D'''_qF'''$, $A'''F'''F'''_1$, $A'''F'''_1F'''_2, \cdots$, $A'''F'''_{r-1}F'''_r$, so daß die Kante $A'''F'''_r$ auf einer Zelle Z'_3 liegt.

Diese Verfahren setzen wir fort, so bekommen wir eine Folge der Dreiecke $A''_1B''_1D''$, $A''_1D''D''_1$, $A''_1D''_1D''_2, \cdots$, $A''_1D''_{q-1}D''_q$, $A'''D'''_qF'''$, $A'''F'''F'''_1$, $A'''F'''_1F'''_2, \cdots$, $A'''F'''_{r-1}F'''_r$, $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}, \cdots$.

Die Anzahl der in der obigen Folge enthaltenen und voneinander verschiedenen Dreiecke ist offenbar endlich. Wir nehmen erstens an, daß $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ mit einem unter $A''_1B''_1D'', \cdots$, $A'''F'''_{r-1}F'''_r$ übereinstimmt und je zwei von $A''_1B''_1D'', \cdots$, $A'''F'''_{r-1}F'''_r$ voneinander verschieden sind. $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ muß dann mit $A''_1B''_1D''$ übereinstimmen.

$A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ kann offenbar mit $A'''F'''_{r-1}F'''_r$ keineswegs übereinstimmen. Wenn $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ mit $A'''D'''_qF'''$ übereinstimmt, so müssen $A''_1D''_{q-1}D''_q$ und $A'''F'''_{r-1}F'''_r$ miteinander übereinstimmen ; dies ist aber unmöglich. Wenn $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ mit $A''_1D''_{q-1}D''_q$ übereinstimmt, so müssen $A'''D'''_qF'''$ und $A'''F'''_{r-1}F'''$ miteinander übereinstimmen. Daher muß die Folge $A'''D'''_qF'''$, $A'''F'''F'''_1$, $A'''F'''_1F'''_2, \cdots$, $A'''F'''_{r-1}F'''_r$ in der Tat aus einem einzigen Dreieck bestehen. Die Folge $A''_1B''_1D'', \cdots$, $A''_1D''_{q-1}D''_q$ muß dann aus einem einzigen Dreieck $A''_1B''_1D''$ bestehen. Also stimmt $A^{IV}F^{IV}_rG^{IV}$ mit $A''_1B''_1D''$ überein.

Jedenfalls bekommen wir eine Folge der Dreiecke $A''_1B''_1D''$, $A''_1D''D''_1, \cdots$, $A''_0B''_0E''$. Alle, in den obigen Dreiecken enthaltenen, Kanten $A''_1B''_1$, A''_1D'', $A''_1D''_1, \cdots$ können dann nicht mit den Kanten, die mit $A'C'$ äquivalent sind, übereinstimmen. Denn, andernfalls würde der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel zerlegt werden.

Folglich können die beiden Ecken A'' und $\widetilde{A}''$ durch eine Folge der Zellen verbunden werden. Anderseits ist es leicht einzusehen, daß jede mit A'' äquivalente Ecke A''_2 mit mindestens einem von den beiden A'' und $\widetilde{A}''$ durch eine Folge der Zellen verbunden werden kann. Daher können je zwei, mit A'' äquivalenten, Ecken durch eine Folge der Zellen verbunden werden.

Bedingung 6. Auf ganz analoge Weise wie im I. Falle im 3. Schritte können wir beweisen, daß die Bedingung 6 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt ist.

Bedingung 7. Bedingung 7 ist offenbar für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt.

Bedingung 8. Wir können auf ganz analoge Weise wie in der Zwischenbehauptung I beweisen, daß die Bedingung 8 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt ist.

Wir behandeln zweitens den Fall, worin $\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt wird. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle.

Fall β_1). Wir bezeichnen die Menge von allen, mit der Ecke A' inzidenten Dreiecken und Zellen auf S_1 mit M. Die Menge M wird durch den Kantenweg $B'A'+A'C'$ in die beiden Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt. Alle, zu den in M_1 enthaltenen und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmenden Kanten geordneten, Schnitte sind in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A)$, enthalten und alle, zu den in M_2 enthaltenen und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmenden Kanten geordneten, Schnitte sind in dem andern $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten.

A'_0 sei eine, mit A' äquivalente und aber nicht mit A' übereinstimmende, Ecke. Alle, zu den mit der Ecke A'_0 inzidenten Kanten geordneten, Schnitte sind dann in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten.

$A'_0D'_0$ und $A'_1D'_1$ seien die beiden miteinander äquivalenten und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ äquivalenten Kanten, so daß die Ecken A'_0 und A'_1 mit A' äquivalent sind und weder A'_0 noch A'_1 mit A' übereinstimmt. Sowohl der zu $A'_0D'_0$ geordnete Schnitt als auch der zu $A'_1D'_1$ geordnete

Schnitt ist dann in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A)$, enthalten.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'B'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ ist in einem einzigen und bestimmten Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ in $\mathfrak{G}_t$ enthalten. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ seien ABD und ABE. Wir nehmen an, daß $A'B'$ in dem Rand von einer Zelle auf S_1 liegt. Es gibt dann auf S_1 die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, $Z''_2, \cdots$, Z'_m, Z''_m und die beiden Dreiecke $A'_1B'_1D'$ und $A'_2B'_2E'$, so daß $T_1(A'_1B'_1D')=ABD$ und $T_1(A'_2B'_2E')=ABE$ ist und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens eine Kante l_1 bezw. l_2 bezw. $\cdots$ bezw. l_{m-1} gemeinsam haben und $A'_1B'_1$, $A'_2B'_2$, $l_1, \cdots$ und l_{m-1} miteinander äquivalent sind.

Wenn $A'B'$ mit $l_n(1\leqq n\leqq m-1)$ übereinstimmt und $\widetilde{Z}''_n$ mit der Kante $A''B''$ inzident ist, wo $T(\widetilde{Z}''_n) = Z''_n$ ist, so sind alle zu den mit $\widetilde{A}'_s(1\leqq s\leqq n-1)$, wo $T(\widetilde{A}'_s\widetilde{B}'_s) = l_s$ ist, inzidenten Kanten geordneten Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten und alle zu den mit $\widetilde{A}'_s(n+1\leqq s\leqq m-1)$ inzidenten Kanten geordneten Schnitte sind in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. Dasselbe gilt für die Kante $A'C'$.

Fall β_2). Der Fall β_1) ergibt nicht sich.

Wir behandeln erstens den

Fall β_1). Wir haben nur die Bedingungen 3 und 5 zu beweisen.

Bedingung 3. A''_0 sei eine Ecke auf S'_1, so daß $T(A''_0) = A'_0$ ist und A'_0 mit A' äquivalent ist und aber nicht mit A' übereinstimmt. Jenachdem alle, zu den mit der Ecke A'_0 inzidenten Kanten geordneten, Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ oder in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten sind, lassen wir zu der Ecke A''_0 den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ oder $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen.

Wenn $A'B'$ mit $l_n(1\leqq n\leqq m-1)$ übereinstimmt und $\widetilde{Z}''_n$ mit der Kante $A''B''$ inzident ist, und wenn der zu einer Kante $l_s(s<n)$ geordnete Schnitt nicht ausgeartet und in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist, so lassen wir zu der Ecke A'' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen. Wenn $\mathfrak{B}_1(A)$ zu der Ecke A'' sich ordnen läßt, so läßt sich $\mathfrak{B}_2(A)$ zu der Ecke $\widetilde{A}''$ ordnen.

A''_0 sei eine Ecke auf S'_1, so daß $T(A''_0) = A'_0$ ist und A'_0 mit A' äquivalent ist und aber nicht mit A' übereinstimmt. Wir nehmen an, daß alle, zu den mit der Ecke A'_0 inzidenten Kanten geordneten, Schnitte sowohl in $\mathfrak{B}_1(A)$ als auch in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten sind. In diesem Falle ist eine mit A'_0 inzidente Kante A'_0D' mit einer von $A'B'$ oder $A'C'$, etwa mit $A'B'$, äquivalent und daher ist A'_0D' mit etwa $l_s(1\leqq s\leqq n-1)$ identisch. Wir lassen dann zu A''_0 den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ ordnen. Also können wir widerspruchslos zu allen Ecken auf S'_1 den Kegel ordnen lassen.

Wir bezeichnen alle Ecken, zu welchen $\mathfrak{B}_1(A)$ geordnet sind, als miteinander äquivalent und alle Ecken, zu welchen $\mathfrak{B}_2(A)$ geordnet sind, als miteinander äquivalent.

Bedingung 5. A''_1 und A''_2 seien die beiden miteinander äquivalenten Ecken auf S'_1, so daß $\mathfrak{B}_1(A)$ sowohl zu A''_1 als auch zu A''_2 geordnet ist. Wir setzen $T(A''_1)=A'_1$ und $T(A''_2)=A'_2$, so ist sowohl A'_1 als auch A'_2 mit A' äquivalent. Da die Bedingung 5. nach der Annahme für $\mathfrak{G}_t$ richtig ist, so gibt es auf S_1 die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, Z''_2, $\cdots$, Z'_m, Z''_m, so daß $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$, $T_1(Z'_2)=T_1(Z''_2)$, $\cdots$, $T_1(Z'_m)=T_1(Z''_m)$ ist und Z''_1 und Z'_2 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens eine Ecke B'_1 bezw. $\cdots$ bezw. B'_{m-1} gemeinsam haben und A'_1, B'_1, B'_2, $\cdots$, B'_{m-1}, A'_2 miteinander äquivalent sind und A'_1 mit B'_1 übereinstimmt oder A'_1 auf Z'_1 liegt und A'_2 mit B'_{m-1} übereinstimmt oder A'_2 auf Z''_m liegt.

Es gibt daher auf S'_1 die Zellen $\widetilde{Z}'_1$, $\widetilde{Z}''_1$, $\widetilde{Z}'_2$, $\widetilde{Z}''_2$, $\cdots$, $\widetilde{Z}'_m$, $\widetilde{Z}''_m$ und die Ecken B''_1, B''_2, $\cdots$, B''_{m-1}, wo $T(\widetilde{Z}'_1)=Z'_1$, $T(\widetilde{Z}''_1)=Z''_1$, $T(\widetilde{Z}'_2)=Z'_2$, $T(\widetilde{Z}''_2)=Z''_2$, $\cdots$, $T(\widetilde{Z}'_m)=Z'_m$, $T(\widetilde{Z}''_m)=Z''_m$, $T(B''_1)=B'_1$, $T(B''_2)=B'_2$, $\cdots$, $T(B''_{m-1})=B'_{m-1}$ ist. Wenn A''_1 mit B''_1 übereinstimmt, so ist $\mathfrak{B}_1(A)$ zu B''_1 geordnet. Wenn A''_1 nicht mit B''_1 übereinstimmt, so liegt A''_1 auf $\widetilde{Z}'_1$ und B''_1 liegt auf $\widetilde{Z}''_1$ und A''_1 und B''_1 auf den miteinander äquivalenten Kanten liegen. Daher ist $\mathfrak{B}_1(A)$ zu B''_1 geordnet. Ebenfalls ist $\mathfrak{B}_1(A)$ zu den Ecken B''_2, B''_3, $\cdots$, B''_{m-1} geordnet. Folglich sind alle Ecken A''_1, B''_1, B''_2, $\cdots$, B''_{m-1}, A''_2 miteinader äquivalent.

Wir behandeln nun den

Fall β_2). Wie in der Bedingung 6 im 1. Falle im 3. Schritte gezeigt worden ist, können wir zu $A''B''C''$ bezw. $\widetilde{A}''B''C''$ ein bestimmtes 3-Simplex $ABCD$ bezw. $ABCE$ ordnen lassen. Wenn ACD in $\mathfrak{B}_1(A)$ und ACE in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist, so lassen wir zu der Ecke A'' bezw. $\widetilde{A}''$ den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen.

Wir nehmen an, daß eine Zelle $\widetilde{Z}'_1$ mit der Ecke $\widetilde{A}''$ inzident ist. Wir bezeichnen die beiden Kanten auf $\widetilde{Z}'_1$, die mit $\widetilde{A}''$ inzident ist, mit $\widetilde{A}''D''$ und $\widetilde{A}''E''$. Wir nehmen an, daß der zu $\widetilde{A}''D''$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten und der zu $\widetilde{A}''E''$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist.

Wir setzen $T(\widetilde{A}''D'')=A'D'$, $T(\widetilde{A}''E'')=A'E'$ und $T(\widetilde{Z}'_1)=Z'_1$. Es gibt auf S_1 eine Zelle Z''_1, so daß $T_1(Z''_1)=T_1(Z'_1)$ ist. Die Ecke A' liegt dann auf Z''_1 oder nicht.

Wir nehmen erstens an, daß A' auf Z''_1 liegt. Wir konstruieren auf Z'_1 eine Kante $A'K'_1$, so daß K'_1 nicht auf dem Rand von Z'_1 liegt. Es gibt auf Z''_1 eine Kante $A'K'_2$, so daß $T_1(A'K'_1)=T_1(A'K'_2)$ ist.

Die Menge $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(A'K'_1B'+A'K'_2C')$[1] ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, zerlegen wir in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 vier Dreiecke $\tilde{A}''B''K''_1$, $A'''B''K''_1$, $\tilde{A}''C''K''_2$, $A''C''K''_2$ und die beiden Zellen Z'''_1 und Z_1^{IV} gibt und $S'_1-(\tilde{A}''B''K''_1+A'''B''K''_1+\tilde{A}''C''K''_2+A''C''K''_2)$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß (der Rand von $Z'''_1-\tilde{A}''K''_1-K''_1A''')+A'''B''+B''\tilde{A}''$ auf der Ebene $y_3=0$ liegt. Die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ wird durch $(O$, (der Rand von $Z'''_1-\tilde{A}''K''_1-K''_1A''')+A'''B''+B''\tilde{A}'')$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt. Die Zelle Z'''_1 liegt auf der Begrenzung von einer von den beiden $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, etwa von $\mathfrak{H}_1$, und die andere Zelle Z_1^{IV} liegt auf der Begrenzung von der andern $\mathfrak{H}_2$.

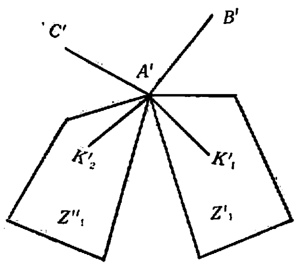

Abb. 4

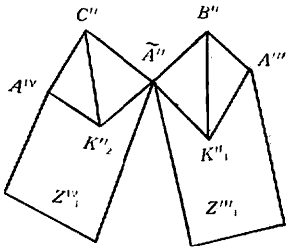

Abb. 5

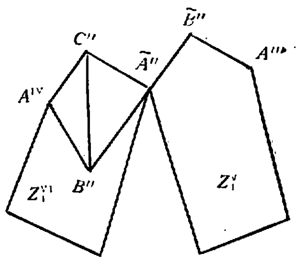

Abb. 6

Wir identifizieren die beiden Zellen Z'''_1 und Z_1^{IV}, so bekommen wir aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Kugel, die wir mit $t_1^2+t_2^2+t_3^2<1$ bezeichnen.

Wir nehmen zweitens an, daß A' nicht auf Z''_1 liegt. In diesem Falle haben Z'_1 und Z''_1 keine Punkte gemeinsam.[2] Es gibt dann eine Zelle Z'_2, so daß Z'_2 mit A' inzident ist und daß, wenn wir die beiden auf Z'_2 liegenden und mit A' inzidenten Kanten mit $A'H'_2$ und $A'G'_2$ bezeichnen, der zu $A'H'_2$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist und der zu $A'G'_2$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist und alle, zu den zwischen $A'E'$ und $A'G'_2$ liegenden Kanten geordneten, Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten sind.

Es gibt auf S_1 eine Zelle Z''_2, so daß $T(Z'_2)=T(Z''_2)$ ist. Es gibt auf Z''_2 die beiden Kanten $\mathring{A}'\mathring{H}'_2$ und $\mathring{A}'\mathring{G}'_2$, so daß sowohl $A'H'_2$ und $\mathring{A}'\mathring{H}'_2$

1) $A'K'_1B'$ bezw. $A'K'_2C'$ bedeutet das Dreieck, das mit der Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ die beiden Kanten $A'B'$ und $A'K'_1$ bezw. $A'C'$ und $A'K'_2$ gemeinsam hat und übrigens in $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ enthalten ist.

2) Es seien Z'_1 und Z''_1 die beiden Zellen auf S_1, so daß $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ ist. Es ist dann leicht einzusehen, daß Z'_1 und Z''_1 nur einen einzigen Punkt oder keine Punkte gemein haben.

als auch $A'G'_2$ und $\mathring{A}\mathring{G}'_2$ miteinander äquivalent sind. Es existiert auf S_1 eine Zelle Z'_3, so daß Z'_3 mit $\mathring{A}'$ inzident ist, und daß, wenn wir die beiden auf Z'_3 liegenden und mit $\mathring{A}'$ inzidenten Kanten mit $\mathring{A}'H'_3$ und $\mathring{A}'G'_3$ bezeichnen, der zu $\mathring{A}'H'_3$ geordneten Schnitt in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten und der zu $\mathring{A}G'_3$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist und alle, zu den zwischen $\mathring{A}'\mathring{G}'_2$ und $\mathring{A}'G'_3$ liegenden Kanten geordneten, Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten sind.

Diese Verfahren setzen wir fort, so bekommen wir eine Folge der Zellen Z'_1, Z'_2, Z''_2, Z'_3, Z''_3, Z'_4, $\cdots$. Die Anzahl der in der obigen Folge enthaltenen und voneinander verschiedenen Zellen ist offenbar endlich. Daher gibt es eine Zelle Z''_p, so daß Z'_1, Z'_2, $\cdots$, Z''_{p-1}, Z'_p voneinander verschieden sind und Z''_p mit einer unter Z'_1, Z'_2, $\cdots$, Z''_{p-1}, Z'_p übereinstimmt. Es ist dann leicht einzusehen, daß Z''_p mit Z'_1 übereinstimmt. Also bekommen wir eine Folge der Zellen Z'_1, Z'_2, Z''_2, $\cdots$, Z''_1.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die obige Folge aus den Zellen Z'_1, Z'_2, Z''_2, Z''_1 besteht. Andernfalls läuft die folgende Diskussion ganz analog.

Wir konstruieren ein stetiges Bild S von dem Rechteck R so daß, wenn wir diese stetige Abbildung von R auf S mit P bezeichnen, P (das Innere von R) in der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ liegt und der Rand von R in drei einfachen Bögen H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 zerlegt ist und $P(H_1H_2)=$ Rand von Z'_2, $P(H_2H_3)=P(H_1H_3)=A'C'$ ist und das Innere von R durch P topologisch auf der Menge $S-(C'A'+$ der Rand von $Z'_2)$ abgebildet wird.

Wir können außerdem S derart konstruieren, daß die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ durch S in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt wird. Wir identifizieren die beiden Zellen Z'_2 und Z''_2, so erhalten wir aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Kugel $\mathfrak{H}$.

Also können wir die Zellen Z'_2 und Z''_2 durch die beiden neuen Zellen X'_2 und X''_2 ersetzen. Wir identifizieren die beiden Zellen Z'_1 und Z''_1, so erhalten wir einen, durch eine Ringfläche begrenzten Raum $\mathfrak{P}$. Da wir

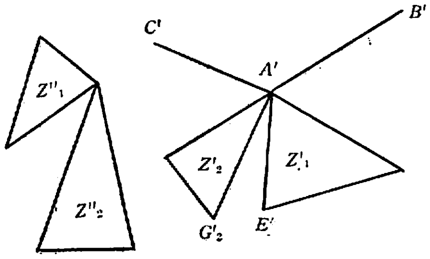

Abb. 7

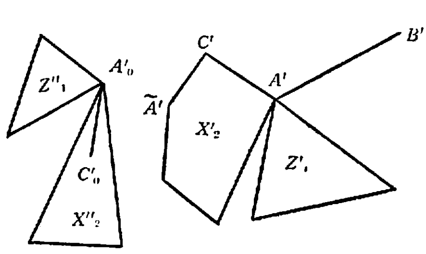

Abb. 8

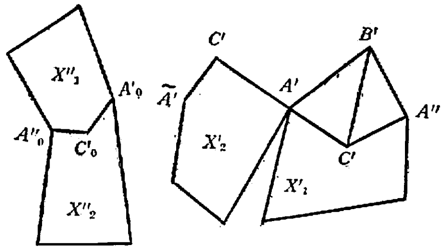

Abb. 9

die beiden Zellen Z'_1 und Z''_1 identifiziert haben, so haben die beiden Kanten $A'B'$ und $A'_0C'_0$ die Ecke A' gemeinsam.

Wir konstruieren das Dreieck $A'B'C'_0$, so daß das Dreieck $A'B'C'_0$, außer den beiden Kanten $A'B'$ und $A'_0C'_0$, in $\mathfrak{P}$ enthalten ist.

Es gibt ein Rechteck R_1 und die Abbildung Q_1 von R_1 in $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Bedingungen.

1. R_1 ist in Dreiecke zerlegt und die Seite von R_1 ist in Kanten $A''A''_1$, $A''_1A''_2, \cdots,$ $A''_{n-1}A''_n$, A''_nC'', $C''A''$ zerlegt.

2. Wir nehmen an, daß der Kantenweg $A'A'_1 + A'_1A'_2 + \cdots + A'_{n-1}A'_n(A'_n = A')$ den Rand von Z'_1 bildet. Es gilt dann, daß $Q_1(A''A''_1) = T_1(A'A'_1)$, $Q_1(A''_1A''_2) = T_1(A'_1A'_2), \cdots,$ $Q_1(A''_{n-1}A''_n) = T_1(A'_{n-1}A'_n)$, $Q_1(A''C'') = Q_1(A''_nC'') = AC$. $Q_1(A''C''E'') = Q_1(A''_nC''F'') = ACB$.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'C'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_3(AC)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}_3(AC)$ wird durch das Dreieck ACB in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}'_3(AC)$ und $\mathfrak{P}''_3(AC)$ zerlegt. Einer von den beiden $\mathfrak{P}'_3(AC)$ und $\mathfrak{P}''_3(AC)$, etwa $\mathfrak{P}'_3(AC)$, ist in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten und der andere $\mathfrak{P}''_3(AC)$ ist in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. Wir lassen dann zu der Kante $A'C'$ bezw. $\widetilde{A}'C'$ den Schnitt $\mathfrak{P}'_3$ (AC)bezw. $\mathfrak{P}''_3(AC)$ordnen. Wir bezeichnen den, aus dem einzigen Dreieck ACB bestehenden, Schnitt mit $\mathfrak{P}_4(AC)$. Wir lassen zu den Kanten $A'_0C'_0$, $A''_0C'_0$, $A'C'$, $A''C'$ den Schnitt $\mathfrak{P}_4(AC)$ ordnen. Wir lassen zu der Ecke A' und A''_0 den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und zu den Ecken A'', $\widetilde{A}'$, A'_0 den Kegel $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen. Wir nehmen als das Grundrechteck von X'_1 das Rechteck R_1 auf. (Vgl. Abb. 9).

Wir nehmen nun an, daß eine, mit etwa der Ecke A'_0 inzidente, Kante A'_0K' solche Eigenschaft hat, daß zu A'_0K' geordnete Schnitt nicht in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist. Es gibt dann eine, mit der Ecke A'_0 inzidente, Zelle Z'_3, so daß, wenn wir die beiden, auf Z'_3 liegenden, Kanten mit A'_0G' und A'_0H' bezeichnen, der zu A'_0G' geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten und der zu A'_0H' geordnete Schnitt in $\mathfrak{B}_2(A)$ enhalten ist oder der zu A'_0G' geordnete Schnitt in einem von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ nicht enthalten ist.

Indem wir die Zellen X'_1, X''_1 durch die neuen Zellen Y'_1, Y''_1 ersetzen, können wir die beiden Dreiecke $A'_0B'_0C'_0$ und $A''_0B'_0C'_0$ derart konstruieren, daß die beiden Dreiecke $A'_0B'_0C'_0$ und $A''_0B'_0C'_0$ mit Y''_1 inzident sind.

Wir nehmen das Dreieck ABC fort, und wir benehmen uns ganz analog mit der obigen. Wir können daher annehmen, daß alle zu den, mit der Ecke A' bezw. A''_0 inzidenten Kanten, geordneten Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ und alle zu den, mit der Ecke A'' bezw. $\widetilde{A}'$ bezw A'_0 inzidenten Kanten geordneten Schnitte in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten sind.

Wir nehmen eine, die Ecken A'_0 und A''' verbindende, Folge der Zellen X''_2, Z'_3, Z''_3, $\cdots$ auf, und wir nehmen an, daß X''_2 und Z'_3 die Ecke A'_0 gemeinsam hat.

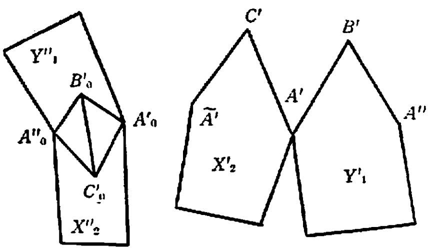

Abb. 10

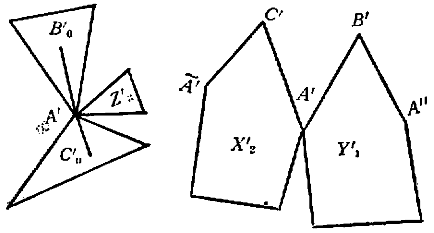

Abb. 11

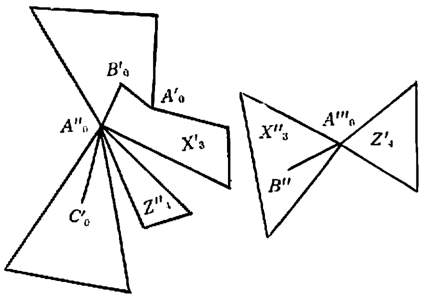

Abb. 12

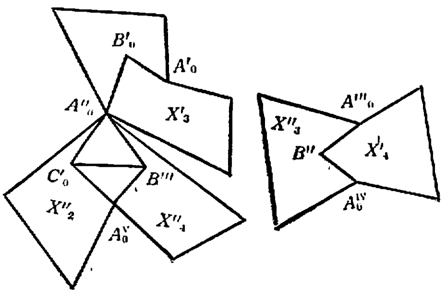

Abb. 13

A'_0D'' sei eine, auf dem Rand von Z'_3 liegende und A'_0 inzidente, Kante. Es gibt auf dem Rand von Z''_3 eine Kante A'''_0D''', die mit A'_0D'' äquivalent ist.

Wir nehmen nun an, daß ein, zu einem mit der Ecke A'''_0 inzidenten Kante, geordneter Schnitt nicht in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten ist.

Wir nehmen das Dreieck ABC fort, und wir ersetzen die Zellen Z'_3 und Z''_3 durch die neuen Zellen X'_3 und X''_3. Wir benehmen uns ferner ganz analog mit der obigen.

Also können wir den Fall β_2) zu dem Falle β_1) zurückführen.

Wir behandeln nun

Fall α_2)[1]. Wir nehmen nun an, daß die beiden Ecken A' und A'_0 nicht miteinander übereinstimmen. Die beiden Ecken A' und A'_0 sind dann miteinander äquivalent. Es gibt daher eine, die beiden Ecken A' und A'_0 verbindende, Folge der Zellen Z'_1, Z''_1, $Z'_2, \cdots$, Z'_m, Z''_m.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß $m = 2$ ist und die Ecke A' auf dem Rand von Z'_1 und die Ecke A'_0 auf dem Rand von Z''_1 liegt. Andernfalls läuft Diskussion ganz analog.

Die Ecke B' liegt dann auf dem Rand von Z'_1 oder nicht. Wir nehmen erstens an, daß die Ecke B' nicht auf dem Rand von Z'_1 liegt. Wir konstruieren ein stetiges Bild S von der abgeschlossenen Kreisscheibe K, so daß, wenn wir diese stetige Abbildung von K auf S mit P bezeichnen, P(das Innere von K) in der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ liegt und der Rand von K in drei einfachen Bögen H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 zerlegt ist und $P(H_1H_2)=$ Rand von Z'_1 $P(H_2H_3)=A'B'=P(H_1H_3)$ ist und das Innere von K durch P topologisch auf der Menge $S-(A'B'+$der Rand von $Z'_1)$ abgebildet wird.

Wir können ausserdem die Menge S derart konstruieren, daß die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ durch S in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt. Wir identifizieren die beiden Zellen Z'_1 und Z''_1, so erhalten wir aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Kugel $\mathfrak{H}$.

Wir nehmen nun an, daß die Ecke B' auf dem Rand von Z'_1 liegt. Der Rand von Z'_1 wird durch die beiden Ecken A' und B' in die beiden einfachen Bögen l_1 und l_2 zerlegt. Die Vereinigungsmenge von einer der beiden l_1 und l_2, etwa l_1, und der Kante $A'B'$ zerlegt die Sphäre S_1 in die beiden Halbsphären K_1 und K_2, und zwar, daß die Zelle Z'_1 in K_1 und die Zelle Z''_1 in K_2 enthalten ist.

Die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ wird durch die Menge $(O,\ l_1+A'B')$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt, und die Begrenzung von $\mathfrak{H}_1$ besteht aus K_1 und $(O,\ l_1+A'B')$ und die Begrenzung von $\mathfrak{H}_2$ besteht aus K_2 und $(O,\ l_1 + A'B')$. Wir identifizieren die beiden Zellen Z'_1 und Z''_1, so erhalten wir aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Kugel $\mathfrak{H}$.

Also können wir den Fall α_2) zu dem Falle α_1) zurückführen.

Wir behandeln nun

3. *Fall.* Es gibt auf einer unter $S_1, S_2, \cdots, S_p$, etwa auf S_1, drei Kanten $A'B'$, $\mathring{B}'C'$, $\mathring{C}'\mathring{A}'$, so daß das Dreieck ABC in dem zu $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'C'$ bezw. $\mathring{C}'\mathring{A}'$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ enthalten ist. Wir behandeln erstens den Fall

α). Es gilt $B'=\mathring{B}'$, $C'=\mathring{C}'$ und $A'=\mathring{A}'$. Wir können ohne Einschränk-

---

1) Vgl. S. 66. Zeile 36.

ung der Allgemeinheit annehmen, daß $A'B'+B'C'+C'A'$ auf der Ebene $x_3=0$ liegt. Die Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ wird durch $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ in die beiden Kugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt, und die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ wird durch $A'B'+B'C'+C'A'$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt. Die Begrenzung von $\mathfrak{H}_1$ besteht aus H_1 und $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$, und die Begrenzung von $\mathfrak{H}_2$ besteht aus H_2 und $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$. Wir unterscheiden nun die folgenden beiden Fälle.

α_1). Z'_1 sei eine beliebige Zelle auf H_1, so liegt die Zelle Z''_1 auch auf H_1, wo $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ ist.

α_2). Es gibt auf S_1 mindestens eine Zelle Z'_1, so daß Z'_1 auf H_1 liegt und aber Z''_1 auf H_2 liegt, wo $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ ist.

Wir behandeln erstens den Fall

α_1). Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 ein Dreieck $A''B''C''$ gibt und $S'_1-A''B''C''$ ebenso wie H_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist. Ebenfalls zerlegen wir die Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S''_1 ein Dreieck $A'''B'''C'''$ gibt und $S''_1-A'''B'''C'''$ ebenso wie H_2 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir bilden die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{H}_1$ topologisch ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit T bezeichnen, $T(A''B''C'')=(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen auf S'_1 durch T auf die Dreiecke bezw. Zellen auf H_1 topologisch abgebildet werden. Ebenfalls können wir eine topologische Abbildung T_0 von $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ auf $\mathfrak{H}_2$ derart konstruieren, daß $T_0(A'''B'''C''')=(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen auf S''_1 durch T_0 auf die Dreiecke bezw. Zellen auf H_2 topologisch abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T_1T_0=T''_1$, $T'_1(A''B''C'')=T''_1(A'''B'''C''')=ABC$ und $\mathfrak{F}_i+ABC=\mathfrak{F}_{i+1}$, $\mathfrak{G}_i+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$, $T_1(\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{K}'_1$, $T_1(\mathfrak{H}_2)=\mathfrak{K}''_1$.

Bedingung 1. Bedingung 1 ist also für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt.

Bedingung 2. Wenn $\mathfrak{P}(AB)$ ausgeartet ist, so lassen wir sowohl zu $A''B''$ als auch zu $A'''B'''$ den Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ selbst ordnen.

Wenn $\mathfrak{P}(AB)$ nicht ausgeartet ist, so wird $\mathfrak{P}(AB)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_2(AB)$ zerlegt. Wir lassen auf ganz analoge Weise wie im 1. Falle im 3. Schritte zu $A''B''$ den Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ oder $\mathfrak{P}_2(AB)$ ordnen. Wenn $\mathfrak{P}_1(AB)$ zu $A''B''$ sich ordnen läßt, so läßt sich $\mathfrak{P}_2(AB)$ zu $A'''B'''$ ordnen.

Wir nehmen an, daß die Kante $A'B'$ auf dem Rand einer Zelle auf S_1 liegt und $l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_m$ alle mit $A'B'$ äquivalenten Kanten sind. Wenn $A'B'=l_n (1\leqq n\leqq m)$ ist und die Kanten $l'_1,\ l'_2,\ \cdots,\ l'_n$ auf S'_1 liegen und die Kanten $l''_n,\ \cdots,\ l''_m$ auf S''_1 liegen, wo $T(l'_1)=l_1$, $T(l'_2)=l_2,\ \cdots,\ T(l'_n)=l_n$, $T_0(l''_n)=l_n,\ \cdots,\ T_0(l''_m)=l_m$ ist, so bezeichnen wir alle Kanten $l'_1,\ l'_2,\ \cdots,\ l'_n$

auf S'_1 als miteinander äquivalent und alle Kanten $l''_n, \cdots, l''_m$ auf S''_1 als miteinander äquivalent.

Wir nehmen zum Beispiel die beiedn Kanten l'_1 und l'_2 auf. Es gibt auf S_1 die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, $Z''_2, \cdots, Z'_s$, Z''_s, so daß $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$, $T_1(Z'_2)=T_1(Z''_2), \cdots, T_1(Z'_s)=T_1(Z''_s)$ ist und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{s-1} und Z'_s eine gemeinsame Kante q_1 bezw. q_2 bezw. $\cdots$ bezw. q_{s-1} haben und $l'_1, q_1, q_2, \cdots, q_{s-1}, l'_2$ miteinander äquivalent sind und l'_1 mit q_1 übereinstimmt oder l'_1 auf Z'_1 liegt und l'_2 mit q_{s-1} übereinstimmt oder l'_2 auf Z''_s liegt. Daher, wenn wir $T(\widetilde{Z}'_1)=Z'_1$, $T(\widetilde{Z}''_1)=Z''_1, \cdots, T(\widetilde{Z}'_s)=Z'_s$, $T(\widetilde{Z}''_s)=Z''_s$ setzen, so bildet $\widetilde{Z}'_1$, $\widetilde{Z}''_1$, $\widetilde{Z}'_2$, $\widetilde{Z}''_2, \cdots, \widetilde{Z}'_s$, $\widetilde{Z}''_s$ die Folge der, die beiden Kanten l'_1 und l'_2 verbindenden, Zellen.

Bedingung 3. Es seien $A'_1A'_2$, $A'_2A'_3, \cdots, A'_{s-1}A'_s$, $A'_sA'_1$ die Kanten auf S_1, so daß $A'_1A'_2+A'_2A'_3+\cdots+A'_sA'_1$ eine einfach-geschlossene Kurve bildet. Die Sphäre S_1 wird durch $A'_1A'_2+A'_2A'_3+\cdots+A'_{s-1}A'_s+A'_sA'_1$ in die beiden Halbsphären P_1 und P_2 zerlegt. Wenn, für eine beliebige Zelle Z'_1 auf P_1, die Zelle Z''_1 auch auf P_1 liegt, so bildet $T_1(A'_1A'_2)+T_1(A'_2A'_3)+\cdots+T_1(A'_{s-1}A'_s)+T_1(A'_sA'_1)$ (mod. 2) den Rand von dem Komplex $T_1(P_1$ — alle Zellen auf $P_1)$ (mod. 2). Ebenfalls bildet $T_1(A'_1A'_2)+T_1(A'_2A'_3)+\cdots+T_1(A'_{s-1}A'_s)+T_1(A'_sA'_1)$ (mod. 2) den Rand von dem Komplex $T_1(P_2$— alle Zellen auf $P_2)$ (mod. 2).

Wenn Z'_1 auf P_1 liegt und aber Z''_1 auf P_2 liegt, und wenn dies nicht der Fall für alle anderen Zellen auf S_1 ist, so bildet der Rand von $T_1(Z'_1)+T_1(A'_1A'_2)+T_1(A'_2A'_3)+\cdots+T_1(A'_{s-1}A'_s)+T_1(A'_sA'_1)$ (mod. 2) den Rand von dem Komplex $T_1(P_1$—alle Zellen auf $P_1)$ (mod. 2). Ebenfalls bildet der Rand von $T_1(Z''_1)+T_1(A'_1A'_2)+T_1(A'_2A'_3)+\cdots+T_1(A'_{s-1}A'_s)+T_1(A'_sA'_1)$ (mod. 2) den Rand von dem Komplex $T_1(P_2$—alle Zellen auf $P_2)$ (mod. 2).

In dem Falle α_1) bildet $T_1(A'B'+B'C'+C'A')$ den Rand von dem Komplex $T_1(H_1$—alle Zellen auf $H_1)$ (mod. 2). Daher ist der Rand von $ABC+T_1(H_1$—alle Zellen auf $H_1)$ (mod. 2) gleich Null. Folglich bildet $ABC+T_1(H_1$—alle Zellen auf $H_1)$ (mod. 2) den Rand von den Teilkomplexen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}'_1$ von $\mathfrak{M}$. Ebenfalls bildet $ABC+T_1(H_2$—alle Zellen auf $H_2)$ den Rand von den Teilkomplexen $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}'_2$ von $\mathfrak{M}$.

Da die Bedingung 7 nach der Annahme für $\mathfrak{F}_i$ erfüllt ist, so bildet $T_1(S_1)$ (mod. 2) den Rand von einem Teilkomplex $\mathfrak{M}_1$ von $\mathfrak{M}$ und ein zu einem auf S_1 liegenden Dreieck geordnetes 3-Simplex ist in $\mathfrak{M}_1$ enthalten.

Es ist leicht einzusehen, daß einer von den beiden $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}'_1$, etwa $\mathfrak{N}_1$, in $\mathfrak{M}_1$ enthalten ist. Ebenfalls ist einer von beiden $\mathfrak{N}_2$ und $\mathfrak{N}'_2$, etwa $\mathfrak{N}_2$, in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Es gilt $\mathfrak{N}_1+\mathfrak{N}_2=\mathfrak{M}_1$.

Wir bezeichnen den zu der Ecke A' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$. Da $\mathfrak{M}_1$ durch ABC in die beiden Teilkomplexe $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ zerlegt wird, so wird $\mathfrak{B}(A)$ durch ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt.

Es gibt genau die beiden Simplexe $ABCD$ und $ABCE$, die mit ABC inzident sind. Eines von den beiden $ABCD$ und $ABCE$, etwa $ABCD$, ist in $\mathfrak{R}_1$ enthalten und das andere $ABCE$ ist in $\mathfrak{R}_2$ enthalten. Es ist leicht einzusehen, daß mindestens eines von den beiden ABD und ABE, etwa ABD, in nur einem von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß ABD in $\mathfrak{B}_1(A)$ und nicht in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten ist. Wir lassen dann zu der Ecke A'' bezw. A''' den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ bezw. $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen.

$A'_1, A'_2, \cdots, A'_m$ seien alle mit der Ecke A' äquivalenten Ecken auf S_1. Die Ecke A' stimmt dann mit einer unter $A'_1, A'_2, \cdots, A'_m$, etwa mit A'_n, überein. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Ecken $A'_1, A'_2, \cdots, A'_n$ auf H_1 liegen und aber die Ecken $A'_n, \cdots, A'_m$ auf H_2 liegen. Es gibt dann auf S'_1 bezw. S''_1 die Ecken A''_1, $A''_2, \cdots, A''_n(=A'')$ bezw. $A'''_n(=A''')$, $\cdots$, A''_m, so daß $T(A''_1)=A'_1$, $T(A''_2)=A'_2$, $\cdots$, $T(A''_n)=A'$, $T_0(A'''_n)=A'$, $\cdots$, $T_0(A''_m)=A'_m$ ist. Wir bezeichnen alle Ecken $A''_1, A''_2, \cdots, A''_n$ als miteinander äquivalent und alle Ecken $A'''_n, \cdots, A''_m$ als miteinander äquivalent. Wir lassen zu allen Ecken A''_1, $A''_2, \cdots, A''_n$ den Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und zu allen Ecken $A'''_n, \cdots, A''_m$ den Kegel $\mathfrak{B}_2(A)$ ordnen.

Bedingung 4. Bedingung 4 ist für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt.

Bedingung 5. Bedingung 5 ist für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt. Wie in β_1) im 2. Falle können wir beweisen, daß es für je zwei Ecken unter $A''_1, A''_2, \cdots, A''_n$ die, diese beiden Ecken verbindende, Folge der Zellen gibt.

Bedingung 6. Bedingung 6 ist für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt.

Bedingung 7. Die Sphäre S_1 wird durch $A'B'+B'C'+C'A'$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}(CA)$ ist in einem einzigen und bestimmten Schnitt in $\mathfrak{S}_i$ $\mathfrak{P}_1(AB)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(BC)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(CA)$ enthalten.

Es sei l eine Kante auf H_1, so daß der zu der Kante l geordnete Schnitt in einem von $\mathfrak{P}_1(AB)$ und $\mathfrak{P}_1(BC)$ und $\mathfrak{P}_1(CA)$ enthalten ist. Die Menge solcher Kanten auf H_1 bezeichnen wir mit M. Die Halbsphäre H_1 wird dann durch die Menge M in einige Gebiete $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \cdots$ zerlegt.

Die, zu den auf einer und derselben unter $\bar{\mathfrak{L}}_1, \bar{\mathfrak{L}}_2, \cdots$ liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe sind in einem und demselben unter $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ enthalten. Angenommen nun, daß die, zu den auf $\bar{\mathfrak{L}}_1$ liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe in $\mathfrak{R}_1$ enthalten und die, zu den auf $\bar{\mathfrak{L}}_2$ liegenden Dreiecken, geordneten 3-Simplexe in $\mathfrak{R}_2$ enthalten sind.

Es sei l_1 bezw. l_2 eine Kante auf $\mathfrak{L}_1$ bezw. $\mathfrak{L}_2$, und sowohl l_1 als auch l_2 gehöre nicht zu M. Wir nehmen nun an, daß $T_1(l_1)=T_1(l_2)$ ist. Wir bezeichnen den zu der Kante l_1 bezw. l_2 geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ bezw. $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ ist in $\mathfrak{N}_1$ enthalten, und aber der Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$ ist in $\mathfrak{N}_2$ enthalten.

Anderseits bilden die Vereinigungsmenge aller, in $\mathfrak{M}_1$ enthaltenen und als die Achse die Kante $T_1(l_1)$ besitzenden, Schnitte in $\mathfrak{G}_i$ einen Schnitt. Diesen Schnitt bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_1(T_1(l_1))$. Der Schnitt $\mathfrak{P}_1(T_1(l_1))$ wird durch eines Dreieck $DEF(DE=T_1(l_1))$ in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}'_1(T_1(l_1))$ und $\mathfrak{P}''_1(T_1(l_1))$, so daß $\mathfrak{P}'_1(T_1(l_1))$ in $\mathfrak{N}_1$ enthalten und $\mathfrak{P}''_1(T_1(l_1))$ in $\mathfrak{N}_2$ enthalten ist.

Es gibt auf S_1 die beiden Dreiecke $D'E'F'$ und $D''E''F''$, so daß $T_1(D'E'F') = T_1(D''E''F'') = DEF$ ist. Eines von den beiden $D'E'F'$ und $D''E''F''$, etwa $D'E'F'$, liegt auf H_1 und das andere $D''E''F''$ liegt auf H_2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sowohl $\mathfrak{P}'_1(T_1(l_1))$ als auch $\mathfrak{P}''_1(T_1(l_1))$ einen Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ ist. Andernfalls läuft die folgende Diskussion ganz analog.

Wir bezeichnen die Endedreiecke von $\mathfrak{P}'_1(T_1(l_1))$ mit DEF und DEG. Es gibt auf S_1 die Zellen X'_1, X''_1, X'_2, X''_2, $\cdots$, X'_n, X''_n, so daß X'_1 und $D'E'F'$ die Kante $D'E'$ gemeinsam haben und X''_n und $D'_0E'_0G'(T_1(D'_0E'_0G')=DEG)$ die Kante $D'_0E'_0$ gemeinsam haben und X''_1 und X'_2 bezw. $\cdots$bezw. X''_{n-1} und X'_n mindestens eine Kante m_1 bezw. $\cdots$ bezw. m_{n-1} gemeinsam haben, und daß $D'E'$, $D'_0E'_0$, m_1, $\cdots$ und m_{n-1} miteinander äquivalent sind. Da $D'E'F'$ auf H_1 liegt, so liegt die Zelle X'_1 auf H_1. Folglich liegen alle Zellen X'_1, X''_1, $\cdots$, X'_n, X''_n und das Dreieck $D'_0E'_0G'$ auch auf H_1.

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$ in $\mathfrak{N}_2$ enthalten ist, so muß die Kante l_2 auf H_2 liegen. Folglich muß $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$ in $\mathfrak{N}_1$ enthalten sein, wenn $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ in $\mathfrak{N}_1$ enthalten ist.

Es sei l_3 eine Kante auf H_2, so daß $T_1(l_3)=T_1(l_2)$ ist. Auf derselben Grunde mit der obigen muß $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$ in $\mathfrak{N}_1$ enthalten sein, wenn $\mathfrak{P}(T(l_3))$ in $\mathfrak{N}_2$ enthalten ist.

$T_1(H_1)$ ist aber stark-zusammenhängend. Folglich sind die, zu den auf H_1 liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe in $\mathfrak{N}_1$ enthalten, und die zu den auf H_2 liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe sind in $\mathfrak{N}_2$ enthalten.

Bedingung 8. Bedingung 8 ist für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt.

Wir behandeln nun den Fall

α_2). In diesem Falle identifizieren wir die beiden Zellen Z'_1 und Z''_1, so bekommen wir aus $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ eine neue Kugel $\mathfrak{H}$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreicke und Zellen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A'''B'''C'''$ gibt. Wir bilden die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\mathfrak{H}$ derart topologisch ab, daß, wenn wir diese Abbildung mit T bezeichnen, $T(A''B''C'')=T(A'''B'''C''')=(O,$

$A'B'+B'C'+C'A'$) ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen auf S'_1 durch T auf die Dreiecke bezw. Zellen auf H_1 und H_2 topologisch abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T'_1(A''B''C'')=T'_1(A'''B'''C''')=ABC$, $T_1(Z'_1)=Z_1$, $\mathfrak{F}_i-Z_1+ABC=\mathfrak{F}_{i+1}$, $\mathfrak{G}_i-Z_1+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}_1-Z_1+ABC=\mathfrak{K}'_1$. Wir beweisen nun, daß die Bedingungen 1—8 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch erfüllt sind. Da es offenbar ist, daß die Bedingungen 1, 4, 6, 8 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ erfüllt sind, so haben wir nur die Bedingungen 2, 3, 5, 7 zu behandeln.

Bedingung 2. l_1 sei eine auf Z'_1 liegende Kante, und l_2 sei die auf Z''_1 liegende und mit l_1 äquivalente Kante. Wir bezeichnen den zu l_1 bezw. l_2 geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(T_1(l_1))$ bezw. $\mathfrak{P}(T_1(l_2))$.

Wir nehmen erstens an, daß sowohl l_1 als auch l_2 mit keiner unter $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ übereinstimmt. Es gibt auf S'_1 eine Kante l'_1, so daß $T(l'_1)=l_1$ ist. Wir lassen dann zu l'_1 den Schnitt $\mathfrak{P}(T_1(l_1))+\mathfrak{P}(T_1(l_2))$ ordnen.

X'_1, X''_1, X'_2, X''_2, $\cdots$, X'_m, X''_m seien die Zellen auf S_1, so daß X''_1 und X'_2 bezw. X''_2 und X'_3 bezw. $\cdots$ bezw. X''_{m-1} und X'_m eine Kante k_1 bezw. k_2 bezw. $\cdots$bezw. k_{m-1} gemeinsam haben und alle Kanten $k_1, k_2, \cdots, k_{m-1}$ miteinander äquivalent sind, und daß, wenn wir eine auf X'_1 liegende und mit k_1 äquivalente Kante bezw. eine anf X''_m liegende und mit k_1 äquivalente Kante mit k_0 bezw. k_m bezeichnen, jede auf S_1 liegende und von keiner unter k_0, $k_1, \cdots, k_m$ verschiedene Kante nicht mit k_0 äquivalent ist.

Es gibt auf S'_1 die Kanten k'_0, $k'_1, \cdots, k'_m$, so daß $T(k'_0)=k_0$, $T(k'_1)=k_1, \cdots, T(k'_m)=k_m$ ist. Wenn jede Kante von $k_0, k_1, \cdots, k_m$ mit keiner unter $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ übereinstimmt, so bezeichnen wir alle Kanten k'_0, k'_1, $\cdots$, k'_m als miteinander äquivalent. Es ist dabei selbstverständlich, daß, wenn eine Kante unter $k_0, k_1, \cdots, k_m$, etwa k_1, auf Z'_1 liegt und X''_2 mit Z''_1 übereinstimmt, so die beiden Kanten k'_1 und k'_2 miteinander übereinstimmen.

Wir nehmen nun an, daß eine Kante $k_0, k_1, \cdots, k_m$, etwa $k_n (0 \leqq n \leqq m)$, mit einer von $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$, etwa mit $A'B'$, übereinstimmt. Wenn $A'B'$ auf Z'_1 oder auf Z''_1, etwa auf Z'_1, liegt, so liegt $A'B'$ nicht auf Z''_1, da Z'_1 und Z''_1 keine Kante[1]) gemeinsam haben. Daher können die beiden Kanten $A''B''$ und $A'''B'''$ auf S'_1 keineswegs übereinstimmen.

Wenn X''_n weder mit Z'_1 noch mit Z''_1 übereinstimmt, so gibt es auf S'_1 eine Zelle $\widetilde{X}''_n$, so daß $T(\widetilde{X}''_n)=X''_n$ ist. Wir bezeichnen dann alle Kanten k'_0, $k'_1, \cdots, k'_{n-1}$, $k'_n(=A''B'')$ als miteinander äquivalent und alle Kanten $A'''B'''$, $k'_{n+1}, \cdots, k'_m$ miteinander äquivalent.

1) Vgl. S. 72. Auslegung 2).

Wenn X''_n mit einer von Z'_1 und Z''_1, etwa mit Z'_1, so stimmen die beiden Kanten k'_{n-1} und k'_n überein. Wir bezeichnen dann alle Kanten k'_0, k'_1, $\cdots$, k'_{n-1} als miteinander äquivalent und alle Kanten $A'''B'''$, k'_{n+1}, $\cdots$, k'_m miteinander äquivalent.

Bedingung 3. Wir bezeichnen den zu der Ecke A' bezw. B' bezw. C' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(C)$. Der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt oder nicht zerlegt.

Wir nehmen erstens an, daß $\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC nicht zerlegt wird. A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_m seien alle, mit der Ecke A' äquivalenten und von A' verschiedenen Ecken auf S_1. Es gibt auf S'_1 die Ecken A''_1, A''_2, $\cdots$, A''_m, so daß $T(A''_1)=A'_1$, $T(A''_2)=A'_2$, $\cdots$, $T(A''_m)=A'_m$ ist. Wir bezeichnen alle Ecken A''_1, A''_2, $\cdots$, A''_m und A'', A''' als miteinander äquivalent und wir lassen zu allen Ecken A''_1, A''_2, $\cdots$, A''_m, A'', A''' den Kegel $\mathfrak{B}(A)$ ordnen. Es ist dabei selbstverständlich, daß, wenn eine Ecke unter A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_m, etwa A'_1, auf Z'_1 liegt, so eine andere unter A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_m, etwa A'_2, auf Z''_1 liegt und die beiden Ecken A''_1 und A''_2 miteinander übereinstimmen.

Wir nehmen zweitens an, daß $\mathfrak{B}(A)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt wird. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle.

β_1). Wir bezeichnen die Menge von allen, mit der Ecke A' inzidenten Dreiecken und Zellen auf S_1 mit M. Die Menge M wird durch den Kantenweg $B'A'+A'C'$ in die beiden Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt. Alle, zu den in M_1 enthaltenen und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmenden Kanten geordneten, Schnitte sind in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A)$, enthalten und alle, zu den in M_2 enthaltenen und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ übereinstimmenden Kanten geordneten, Schnitte sind in dem andern $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten.

A'_0 sei eine, mit A' äquivalente und aber nicht mit A' übereinstimmende, Ecke. Alle, zu den mit der Ecke A'_0 inzidenten Kanten geordneten, Schnitte sind dann in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten.

$A'_0D'_0$ und $A'_1D'_1$ seien die beiden miteinander äquivalenten und weder mit $A'B'$ noch mit $A'C'$ äquivalenten Kanten, so daß die Ecken A'_0 und A'_1 mit A' äquivalent sind und weder A'_0 noch A'_1 mit A' übereinstimmt. Sowohl der zu $A'_0D'_0$ geordnete Schnitt als auch der zu $A'_1D'_1$ geordnete Schnitt ist dann in einem und demselben von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa in $\mathfrak{B}_1(A)$, enthalten.

Der Schnitt $\mathfrak{P}(AB)$ ist in einem einzigen und bestimmten Schnitt $\mathfrak{P}_1(AB)$ in $\mathfrak{G}_i$ enthalten. Die Endedreiecke von $\mathfrak{P}_1(AB)$ seien ABD und

ABE. Wir nehmen an, daß $A'B'$ auf dem Rand von einer Zelle anf S_1 liegt. Es gibt dann auf S_1 die Zellen Z'_1, Z''_1, Z'_2, Z''_2, $\cdots$, Z'_m, Z''_m und die beiden Dreiecke $A'_1B'_1D'$ und $A'_2B'_2E'$, so daß $T_1(A'_1B'_1D') = ABD$ und $T_1(A'_2B'_2E') = ABE$ ist und Z''_1 und Z'_2 bezw. Z''_2 und Z'_3 bezw. $\cdots$ bezw. Z''_{m-1} und Z'_m mindestens eine Kante l_1 bezw. l_2 bezw. $\cdots$bezw. l_{m-1} gemeinsam haben und $A'_1B'_1$, l_1, $\cdots$, l_{m-1} und $A'_2B'_2$ miteinander äquivalent sind.

Wenn $A'B'$ mit $l_n (1 \leqq n \leqq m-1)$ übereinstimmt uud $\widetilde{Z}''_n$ mit der Kante $A''B''$ inzident ist, wo $T(\widetilde{Z}''_n) = Z''_n$ ist, so sind alle zu den mit $\widetilde{A}'_s (1 \leqq s \leqq n-1)$, wo $T(\widetilde{A}'_s \widetilde{B}'_s) = l_s$ ist, inzidenten Kanten geordneten Schnitte in $\mathfrak{B}_1(A)$ enthalten und alle zu den mit $\widetilde{A}'_s (n+1 \leqq s \leqq m-1)$ inzidenten Kanten geordneten Schnitte in $\mathfrak{B}_2(A)$ enthalten. Dasselbe gilt für die Kante $A'C'$.

β_2). Der Fall β_1) ergibt nicht sich.

Wir behandeln erstens den Fall

β_1). In diesen Falle können die beiden Ecken A'' und A''' keineswegs übereinstimmen. Angenommen in der Tat, daß die beiden Ecken A'' und A''' miteinander übereinstimmen. Sowohl Z'_1 als auch Z''_1 muß dann mit der Ecke A' auf S_1 inzident sein.

Wir bezeichnen die auf dem Rand von Z'_1 liegenden und mit A' inzidenten Kanten $A'D'_0$ und $A'E'_0$, und wir bezeichnen das mit $A'D'_0$ inzidente Dreieck $A'D'_0D'_1$ und das mit $A'D'_1$ inzidente Dreieck $A'D'_1D'_2$ usw. Wir bekommen also eine Folge der Dreiecke $A'D'_0D'_1$, $A'D'_1D'_2$, $\cdots$, $A'D'_{k-1}D'_k$, so daß die Kante $A'D'_k$ auf dem Rand von einer Zelle Z'_2 liegt.

Wir nehmen nun an, daß $A'D'_k$ auf der Zelle Z''_1 liegt. Die beiden Kanten $A'D'_0$ und $A'D'_k$ sind dann miteinander äquivalent. Daher, wenn wir die beiden Kanten $A'D'_0$ und $A'D'_k$ identifizieren, so muß[1] sowohl die Kante $A'B'$ als auch die Kante $A'C'$ mit einer unter $A'D'_0$, $A'D'_1$, $\cdots$, $A'D'_{k-1}$ übereinstimmen. Dies ist aber unmöglich.

Wenn auch die Kante $A'D'_k$ nicht auf der Zelle Z''_1 liegt, läuft[2] Diskussion ganz analog. Folglich können die beiden Ecken A'' und A''' keineswegs übereinstimmen.

Wir behandeln zweitens den Fall

β_2). Vgl.[3] den Fall α_3) und den Fall β_2) im 2. Falle.

Bedingung 5. In dem Falle β_1) können wir auf ganz analoge Weise wie im Falle β_1) im 2. Falle beweisen, daß die Bedingung 5 für $\mathfrak{F}_{i+1}$ auch

1) Denn $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt.

2) Vgl. S. 73. Zeile 8—14.

3) Vgl. 94.

erfüllt.

Bedingung 7. Es gilt offenbar $T_1(S_1)=T'_1(S'_1)$ (mod. 2). Daher bildet $T'_1(S'_1)$ (mod. 2) den Rand von $\mathfrak{M}_1$. Die, zu den auf S_1 liegenden Dreiecken geordneten, 3-Simplexe sind in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Wir bezeichnen die beiden, mit dem Dreieck ABC inzidenten 3-Simplexe mit $ABCD$ und $ABCE$. Da ABC nicht in $T_1(S_1)$ (mod. 2) enthalten ist, so ist sowohl $ABCD$ als auch $ABCE$ in $\mathfrak{M}_1$ enthalten. Folglich sind die, zu den auf S'_1 liegenden Dreiecken geordneten, 3-Simplexe in $\mathfrak{M}_1$ enthalten.

Wir wollen nun die folgende Zwischenbehauptung.

Zwischenbehauptung III. *$\mathfrak{G}_t$ sei ein stark-zusammenhängender 2-Komplex, so daß jedes in $\mathfrak{G}_t$ enthaltene Dreieck in $\mathfrak{M}$ enthalten ist. Wir können dann die geeigneten Zellen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_q$ aufnehmen und $\mathfrak{G}_t+Z_1+\cdots+Z_q=\mathfrak{F}_t$ in E^3 derart einbetten, daß die Bedingungen 1—8 im 3 Schritte für $\mathfrak{G}_t$ erfüllt sind.*

Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3-\mathfrak{F}_t$ mit $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$. Jede $\mathfrak{K}_j (j=1, 2, \cdots, p)$ ist homöomorph mit der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$. Wir bezeichnen die topologische Abbildung von der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf $\mathfrak{K}_1$ bezw. $\mathfrak{K}_2$ bezw. $\cdots$ bezw. $\mathfrak{K}_p$ mit T_1 bezw. T_2 bezw. $\cdots$ bezw. T_p und die Sphäre $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ mit S_1 bezw. S_2 bezw. $\cdots$ bezw. S_p.

Es seien A'_1 und A'_0 die beiden miteinander äquivalenten und nicht übereinstimmenden Ecken auf S_1. Es gibt dann auf S_1 die Kantenwege $w_1, w_2, \cdots$, und die folgenden Bedingungen sind erfüllt.

1. *Einer von den Kantenwegen $w_1, w_2, \cdots$, etwa w_1, verbindet die beiden Ecken A'_1 und A'_0. Jeder Kantenweg besteht aus den gerichteten Kanten. Der Kantenweg w_1 ist von der Gestalt $\overrightarrow{A'_1A'_2}+\overrightarrow{A'_2A'_3}+\cdots+\overrightarrow{A'_{n-1}A'_n}+\overrightarrow{A'_nB'_1}+\overrightarrow{B'_1B'_2}+\cdots+\overrightarrow{B'_{m-1}B'_m}+\overrightarrow{B'_mA'_{n+1}}+\overrightarrow{A'_{n+1}A'_{n+2}}+\cdots+\overrightarrow{A'_{n+m-1}A'_{n+m}}+\overrightarrow{A'_{n+m}C'_1}+\overrightarrow{C'_1C'_2}+\cdots+\overrightarrow{C'_{s-1}C'_s}+\overrightarrow{C'_sA'_{n+m+1}}+\cdots+\overrightarrow{A'_tA'_0}$. Der Kantenweg $A'_nB'_1+B'_1B'_2+\cdots+B'_{m-1}B'_m+B'_mA'_{n+1}$ bezw. $A'_{n+m}C'_1+\cdots+C'_sA'_{n+m+1}\cdots$ leigt auf dem Rand von einer Zelle Z'_1 bezw. Z'_2 $\cdots$. Der Kantenweg w_2 ist von der Gestalt $\overrightarrow{\widetilde{A}'_nK'_1}+\overrightarrow{K'_1K'_2}+\cdots+\overrightarrow{K'_{s-1}K'_s}+\overrightarrow{K'_sH'_1}+\cdots+\overrightarrow{H'_{t-1}H'_t}+\overrightarrow{H'_tK'_{s+1}}+\overrightarrow{K'_{s+1}K'_{s+2}}+\cdots+\overrightarrow{K'_{n-1}K'_n}+\overrightarrow{K'_n\widetilde{A}'_{n+1}}$, und sowohl $\widetilde{A}'_n$ als auch $\widetilde{A}'_{n+1}$ liegt auf dem Rand von der Zelle Z''_1, wo $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ ist[1]. Sowohl die Ecken A'_n und $\widetilde{A}'_n$ als auch A'_{n+1} und $\widetilde{A}'_{n+1}$ sind miteinander äquivalent, und es gibt auf dem Rand von Z''_1 den Kantenweg $\widetilde{A}'_n\widetilde{B}'_1+\widetilde{B}'_1\widetilde{B}'_2+\cdots+\widetilde{B}'_{m-1}\widetilde{B}'_m+\widetilde{B}'_m\widetilde{A}'_{n+1}$,*

1) Wir sagen von jetzt an, daß w_2 mit der Zelle Z''_1 inzident ist.

wo $B'_{j-1}B'_j$ *und* $\widetilde{B}'_{j-1}\widetilde{B}'_j$ *miteinander äquivalent sind. Dasselbe gilt für* $w_3\cdots$.

2. *Die Kantenwege* $(A'_1A'_2+A'_2A'_3+\cdots+A'_{n-1}A'_n)+(\widetilde{A}'_nK'_1+K'_1K'_2+\cdots+K'_{s-1}K'_s)+\cdots$ *setzen wir mit* w. *Mindestens die beiden Kanten in* w, *etwa* $A'_2A'_3$ *und* $A'_3A'_4$, *haben die folgenden Eigenschaften. Wir bezeichnen die rechte Ufer von* $A'_2A'_3+A'_3A'_4$ *mit* r *und die linke Ufer mit* l. *Mindestens eine von den beiden Ufern* r *und* l, *etwa* r, *hat die folgende Eigenschaft.*

Wir können die Dreiecke $T_1(A'_2A'_3B'_1)$ *und* $T_1(A'_3A'_4B'_2)$ *längs der Kante* $T_1(A'_2A'_3)$ *innerhalb* $\mathfrak{K}_1$ *schneiden, wo die Ecke* $T_1(A'_2)$ *unverändert bleibt, so daß die übrigen Gebieten homöomorph mit der Kugel* $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ *sind.*

Wir bekommen dann aus $\mathfrak{K}_1$ *das Gebiet* $\mathfrak{K}'_1$, *das mit der Kugel homöomorph ist. Wir zerlegen die Sphäre* $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, *die wir mit* S'_1 *bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf* S'_1 *die Kanten* $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}'_3$, $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}''_3$, $\widetilde{A}'_1\widetilde{A}'_2$, $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}'_5$ *gibt und* S'_1 *ebenso wie* S_1 *in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.*

Wir bilden die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ *auf* $\mathfrak{K}'_1$ *ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit* T *bezeichnen, das Bild durch* T *von einem Dreieck bezw. einer Zelle, das mit* $\widetilde{A}'_3$ *inzident ist, mit dem Bild durch* T_1 *von dem Dreieck bezw. der Zelle, das mit der Ecke* A'_3 *inzident ist und auf der rechte Ufer* r *liegt, übereinstimmt und das Bild durch* T *von einem Dreieck bezw. Zelle, das mit* $\widetilde{A}''_3$ *inzident ist, mit dem Bild durch* T_1 *von dem Dreieck bezw. der Zelle, das mit der Ecke* A'_3 *inzident ist und auf der linke Ufer liegt, übereinstimmt.*

Wenn eine Zelle Z'_1 *mit* $A'_2A'_3$ *inzident ist und auf der rechte Ufer* r *liegt, so ist eine Zelle* Z''_1 *mit der Kante* $A'_4A'_3$ *inzident und die beiden Kanten* $A'_2A'_3$ *und* $A'_4A'_3$ *sind miteinander äquivalent, wo* $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ *ist. Wir schneiden die Zelle* $T_1(Z'_1)=T_1(Z''_1)$ *längs der Kante* $T_1(A'_2A'_3)$ *innerhalb* $\mathfrak{K}_1$, *wo die Ecke* $T_1(A'_2)$ *unverändert bleibt.*

Wir bekommen dann aus $\mathfrak{K}_1$ *das Gebiet* $\mathfrak{K}'_1$, *das mit der Kugel homöomorph ist. Wir zerlegen die Sphäre* $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, *die wir mit* S'_1 *bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf* S'_1 *die Kanten* $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}'_3$, $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}''_3$, $\widetilde{A}'_1\widetilde{A}'_2$, $\widetilde{A}'_2\widetilde{A}'_5$ *gibt und* S'_1 *ebenso wie* S_1 *in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.*

Wir bilden die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ *auf* $\mathfrak{K}'_1$ *ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit* T *bezeichnen, das Bild durch* T *von einem Dreieck bezw. eiener Zelle, das mit* $\widetilde{A}'_3$ *inzident ist, mit dem Bild durch* T_1 *von dem Dreieck bezw. der Zelle, das mit der Ecke* A'_3 *inzident ist und auf* *der rechte Ufer r liegt, übereinstimmt und das Bild durch T von einem Dreieck bezw. einer Zelle, das mit* $\widetilde{A}''_3$ *inzident ist, mit dem Bild durch* T_1 *von dem Dreieck bezw. der Zelle, das mit der Ecke* A'_3 *inzident ist und auf der linke Ufer l liegt, übereinstimmt.*

Wir nehmen die beiden Kanten $A'_2A'_3$ *und* $A'_3A'_4$ *aus w fort, und wir identifizieren die beiden Ecken* A'_2 *und* A'_4, *so bekommen wir aus w den Kantenweg* $w' = A'_1A'_2 + A'_4A'_5 + \cdots$. *Der Kantenweg w' liegt, wie im obigen gezeigt worden ist, auf* S'_1. *Die obige Verfahren wenden wir an, so bekommen wir aus w' den Kantenweg w''. Wir bezeichnen im folgenden die beiden Kanten* $\overrightarrow{A'_2A'_3}$ *und* $\overrightarrow{A'_3A'_4}$ *als zueinander konjugiert.*

Nach der Bedingung 1 *in dieser Zwischenbehauptung liegt die Ecke* A'_n *auf* Z'_1 *und die Ecke* $\widetilde{A}'_n$ *liegt auf* Z''_1. *Indem wir die Zelle* $T_1(Z'_1)$ *durch eine neue Zelle ersetzen, können wir die beiden Ecken* A'_n *und* $\widetilde{A}'_n$ *identifizieren. Nach dieser Identifizierung der Ecken* A'_n *und* $\widetilde{A}'_n$ *können wir die obige Verfahren für* $A'_{n-1}A'_n + \widetilde{A}'_nK'_1$ *anwenden, wenn* $\overrightarrow{A'_{n-1}A'_n}$ *und* $\overrightarrow{A'_nK'_1}$ *zueinander konjugiert sind.*

Diese Verfahren nennen wir von jetzt an Identifizierung der Kanten. Indem wir Identifizierung der Kanten wiederholen, können wir die Ecken A'_1 *und* A'_0 *identifizieren. Wir nennen die Kantenwege* w_1, $w_2, \cdots$ *von jetzt an die Kantenwegegruppe, die die beiden Ecken* A'_1 *und* A'_0 *verbindet, mit den Bedingungen* 1 *und* 2 *in der Zwischenbehauptung* III.

Diese Zwischenbehauptung ist für die folgende Zwischenbehauptung IV benutzt, und wir können diese Zwischenbehauptung III und die Zwischenbehauptung IV gleichzeitig beweisen.

Zwischenbehauptung IV. $\mathfrak{G}_i$ *sei ein stark-zusammenhängender* 2-*Komplex, so daß jedes in* $\mathfrak{G}_i$ *enthaltene Dreieck in* $\mathfrak{M}$ *enthalten ist.*

Es sei $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$ *ein Kantenweg, der in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten ist, und die folgenden Bedingungen seien für* w_1 *erfüllt.*

a). Der Kantenweg w_1 *bildet eine einfach-geschlossene Kurve. Zu jeder Kante* $A_jA_{j+1} (j = 1, 2, \cdots, n\,;\ A_{n+1} = A_1)$ *ist ein Dreieck* $A_jA_{j+1}B_j$ *geordnet, und das Dreieck* $A_jA_{j+1}B_j$ *ist nicht noch in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten. Sowohl* $A_jA_{j+1}B_j$ *als auch* $A_{j+1}A_{j+2}B_{j+1}$ *ist in einem und demselben Kegel* $\mathfrak{B}(A_{j+1})$ *in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten.*

b). Durch $\mathfrak{G}_i$ *ist* $\mathfrak{M}$ *in die Teilkomplexe* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_p$ *zerlegt. Alle Kegel* $\mathfrak{B}(A_1), \mathfrak{B}(A_2), \cdots, \mathfrak{B}(A_n)$ *sind in einem und demselben unter* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots, \mathfrak{M}_p$, *etwa in* $\mathfrak{M}_1$, *enthalten.*

Wir nennen im folgenden den Kantenweg w_1 *mit den obigen Bedingungen a) und b) einen ausgezeichneten geschlossenen Kantenweg in* $\mathfrak{G}_i$, *der zu* $\mathfrak{M}_1$ *gehört.*

Es sei $w_2 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$ *ein in* $\mathfrak{G}_i$ *enthaltener Kantenweg mit den folgenden Bedingungen*

a) Der Kantenweg w_2 *bildet einen einfachen Bogen. Zn jeder Kante* $A_jA_{j+1}(j=1, 2, \cdots, n-1)$ *ist ein Dreieck* $A_jA_{j+1}B_j$ *geordnet und das Dreieck* $A_jA_{j+1}B_j$ *ist nicht noch in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten. Sowohl* $A_jA_{j+1}B_j$ *als auch* $A_{j+1}A_{j+2}B_{j+1}$ *ist in einem und demselben Kegel* $\mathfrak{B}(A_{j+1})$ *in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten.*

b) Alle Kegel $\mathfrak{B}(A_1)$, $\mathfrak{B}(A_2)$, $\cdots$, $\mathfrak{B}(A_n)$ *sind in einem und demselben unter* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2, \cdots$, $\mathfrak{M}_p$, *etwa in* $\mathfrak{M}_1$, *enthalten.*

Wir nennen im folgenden den Kantenweg w_2 *mit den obigen Bedingungen a) und b) einen ausgezeichneten offenen Kantenweg in* $\mathfrak{G}_i$, *der zu* $\mathfrak{M}_1$ *gehört.*

Es sei $w_3 = A_1A_2 + A_2A_1$ *ein Kantenweg, der in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten ist, und die folgenden Bedingungen seien für* w_3 *erfüllt.*

a) Zu der Kante A_1A_2 *bezw.* A_2A_1 *ist ein Dreieck* $A_1A_2D_1$ *bezw.* $A_2A_1D_2$ *gehört.* $A_1A_2D_1$ *und* $A_2A_1D_2$ *sind nicht noch in* $\mathfrak{G}_i$ *enthalten und sowohl in einem Kegel* $\mathfrak{B}(A_1)$ *als auch in* $\mathfrak{B}(A_2)$ *enthalten.*

b). $\mathfrak{B}(A_1)$ *und* $\mathfrak{B}(A_2)$ *sind in einem und demselben unter* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{M}_p$, *etwa in* $\mathfrak{M}_1$, *enthalten.*

Wir nennen von jetzst an den Kantenweg w_3 *mit den obigen Bedingungen a) und b) einen ausgezeichneten Zweig in* $\mathfrak{G}_i$, *der zu* $\mathfrak{M}_1$ *gehört.*

Es seien einige ausgezeichneten geschlossenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_i$ $w_1, w_2, \cdots, w_s$ *und einige ausgezeichneten offenen Kantenwege in* $\mathfrak{G}_i$ x_1, x_2, $x_3, \cdots, x_t$ *und einige ausgezeichneten Zweige in* $\mathfrak{G}_i$ $y_1, y_2, \cdots, y_r$ *gegeben, so daß je zwei unter* $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ *keine Ecke gemeinsam haben oder, wenn eine Ecke* A *in den beiden unter* $w_1, \cdots, y_r$, *etwa in* w_1 *und* w_2, *enthalten ist, so der Ecke* A *in* w_1 *geordnete Kegel und der zu der Ecke* A *in* w_2 *geordnete Kegel voneinander verschieden sind. Wir können dann die geeigneten Zellen* Z_1, $Z_2, \cdots, Z_q$ *aufnehmen und* $\mathfrak{G}_i + Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_q = \mathfrak{F}_i$ *in* E^3 derart *einbetten, so daß die Bedingungen* 1—8 *im* 3 *Schritte für* $\mathfrak{F}_i$ *erfüllt sind und außerdem die folgende Bedingung für* $\mathfrak{F}_i$ *erfürllt ist.*

Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3 - \mathfrak{F}_i$ *mit* $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots, \mathfrak{K}_p$. *Jede* $\mathfrak{K}_j(j=1, 2, \cdots, p)$ *ist homöomorph mit der Kugel* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$. *Wir bezeichnen die topologische Abbildung von der Kugel* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ *auf* $\mathfrak{K}_1$ *bezw.* $\mathfrak{K}_2$ *bezw.* $\cdots$ *bezw.* $\mathfrak{K}_p$ *mit* T_1 *bezw.* T_2 *bezw.* $\cdots$ *bezw.* T_p *und die Sphären* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ *mit* S_1 *bezw.* S_2 *bezw.* $\cdots$ *bezw.* S_p.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $w_1, \cdots, w_s, x_1, \cdots, x_t, y_1, \cdots, y_r$ *zu* $\mathfrak{M}_1$ *gehören. Es gibt auf* S_1 *für* w_1 *die*

Kantenwege w_1^1, w_1^2, $\cdots$, *und die folgenden Bedingungen sind erfüllt.*

1) *Der Kantenweg* w_1^1 *ist von der Gestalt* $A'_1A'_2+A'_2A'_3+\cdots+A'_{a-1}A'_a$. *Der Kantenweg* w_1^2 *ist von der Gestalt* $\mathring{A}'_aA'_{a+1}+\cdots+A'_{a+b-1}A'_{a+b}$. *Die beiden Ecken* A'_a *und* $\mathring{A}'_a$ *sind miteinander äquivalent.*

Dasselbe gilt für w_1^3, $\cdots$.

Wir bezeichnen den zu der Kante $A'_1A'_2$ *geordneten Schnitt mit* $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ *und den, den Schnitt* $\mathfrak{P}(A_1A_2)$ *enthaltenden, Schnitt in* $\mathfrak{G}_t$ *mit* $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$. *Das Dreieck*[1] $A_1A_2B_1$ *ist dann in* $\mathfrak{P}_1(A_1A_2)$ *enthalten. Dasselbe gilt für alle Kanten* $A'_2A'_3$, $\cdots$, $\mathring{A}'_aA'_{a+1}$, $\cdots$.

2). *Es gibt für die beiden Ecken* A'_a *und* $\mathring{A}'_a$ *die, die Ecken* A'_a *und* $\mathring{A}'_a$ *verbindende, Kantenwege-gruppe* u_1^a, u_2^a, $\cdots$. *Es gibt auch die, die beiden Ecken* A'_{a+b} *und* $\mathring{A}'_{a+b}$ *verbindende, Kantenwege-gruppe* u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, $\cdots$.

Die beiden benachbarten Kanten in w_1^1, w_1^2, $\cdots$, *etwa* $A'_1A'_2+A'_2A'_3$, *sind dann keineswegs durch die beiden benachbarten Kanten in* u_1^a, u_2^a, $\cdots$, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, $\cdots$ *gekreuzt.*

Die beiden benachbarten Kanten in u_k^a *oder* $u_k^{a+b}\cdots(k=1,\ 2,\ \cdots)$ *und die beiden benachbarten Kanten in* u_j^a *oder* $u_j^{a+b}\cdots$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\ k\neq j)$ *kreuzen dann nicht sich.*

Einer unter u_1^a, u_2^a, $\cdots$, *etwa* u_1^a, *verbindet die beiden Ecken* A'_a *und* $\mathring{A}'_a$. *Wir setzen* $u_1^a=A'_aB'_1+B'_1B'_2+\cdots+B'_m\mathring{A}'_a$. *Die benachbarten Kanten in* u_1^a, u_2^a, $\cdots$, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, $\cdots$ *und die benachbarten Kanten* $A'_{a-1}A'_a+A'_aB'_1$ *kreuzen nicht sich. Dasselbe gilt für* w_1^2, $\cdots$.

Wenn die beiden Kanten w_1^1, w_1^2, $\cdots$, u_1^a, u_2^a, $\cdots$, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, $\cdots$, *etwa* u_1^a *und* u_2^a *den Kantenweg* l *gemeinsam hat, so setzen wir* $u_1^a=u_1+\overrightarrow{C'_1D_1}+l+\overrightarrow{D_2C'_2}+u_2$, $u_2^a=m_1+\overrightarrow{C_1D_1}+l+\overrightarrow{D_2C_2}+m_2$, *wo* l *einen einfachen Bogen bildet und die Ecken* D_1 *und* D_2 *verbindet. Die Kanten* C_1D_1 *und* D_2C_2 *liegen dann auf einer und derselben Ufer von den beiden Ufern von* $C'_1D_1+l+D_2C'_2$.

Wenn $u_2^a(\neq u_1^a)$ *mit der Zelle* Z'_1 *inzident*[2] *ist, so liegen mindestens die beiden Ecken* F' *und* G' *von* u_2^a *auf dem Rand von* Z'_1. *Der Rand von* Z'_1 *wird durch die beiden Ecken* F' *und* G' *in die beiden Kantenwege* k_1 *und* k_2 *zerlegt. Wir bezeichnen den, die beiden Ecken* F' *und* G' *verbindenden, Kantenweg, der in* u_2^a *enthalten ist, mit* k_3. *Die beiden Kantenwege* k_1 *und* k_3 *bestimmen dann auf* S_1 *einige Gebiete* $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\cdots$. *Jedes unter* u_1^a, $u_2^a-k_3$, u_1^{a+b}, $\cdots$, w_1^1, w_1^2, $\cdots$ *ist in einem und demselben unter* $\overline{\mathfrak{P}}_1$, $\overline{\mathfrak{P}}_2$, $\cdots$ *enthalten.*

1) Vgl. S. 86. Zeile. 32.
2) Vgl. S. 84. Auslegung.

Wir nennen im folgenden die Kantenwege-gruppe $(w_1^1, w_1^2, \cdots, u_1^a, u_2^a, \cdots, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, \cdots)$ *das ausgezeichnete Urbild von* w_1. *Wir nennen auch die Kante* $A'_1A'_2$ *bezw.* $(u_1^a, u_2^a, \cdots, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, \cdots)$ *das ausgezeichnete Urbild von* A_1A_2 *bezw. das imaginäre Urbild von* w_1.

3). *Wenn für* $x_1 = B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{n-1}B_n$ *es die, die beiden Ecken* B_1 *und* B_n *verbindende, Kante in* $\mathfrak{M}$ *gibt und die Kante* B_1B_n *in* $\mathfrak{G}_t$ *enthalten ist, und wenn* $\mathfrak{B}(B_1)$ *bezw.* $\mathfrak{B}(B_n)$ *zu* B_1 *bezw.* B_n *geordnet ist und* $\mathfrak{P}_1(B_1B_n)$ *ein in* $\mathfrak{B}(B_1)$ *und* $\mathfrak{B}(B_n)$ *enthaltener Schnitt in* $\mathfrak{G}_t$ *ist, so gibt es auf* S_1 *die Kante* $B'_1B'_n$, *und der Schnitt* $\mathfrak{P}(B_1B_n)$ *ist zu* $B'_1B'_n$ *geordnet und* $\mathfrak{P}(B_1B_n)$ *ist in* $\mathfrak{P}_1(B_1B_n)$ *enthalten.*

Wenn für $B_p(1 < p < n\,;\ p \neq 2,\ \neq n-1)$ *es die Kanten* B_1B_p *und* B_pB_n *in* $\mathfrak{M}$ *gibt und sowohl* B_1B_p *als auch* B_pB_n *in* $\mathfrak{G}_t$ *enthalten ist, und wenn* $\mathfrak{P}_1(B_1B_p)$ *bezw.* $\mathfrak{P}_1(B_pB_n)$ *ein in* $\mathfrak{B}(B_1)$ *und* $\mathfrak{B}(B_p)$ *bezw.* $\mathfrak{B}(B_p)$ *und* $\mathfrak{B}(B_n)$ *enthaltener Schnitt in* $\mathfrak{G}_t$ *ist, so gibt es auf* S_1 *die Kante* $B''_1B'_p$ *und* $B''_pB''_n$, *und der Schnitt* $\mathfrak{P}(B_1B_p)$ *bezw.* $\mathfrak{P}(B_pB_n)$ *ist zu* $B''_1B'_p$ *bezw.* $B''_pB''_n$ *geordnet und* $\mathfrak{P}(B_1B_p)$ *bezw.* $\mathfrak{P}(B_pB_n)$ *ist in* $\mathfrak{P}_1(B_1B_p)$ *bezw.* $\mathfrak{P}_1(B_pB_n)$ *enthalten.*

Wir nennen die Kanten B_1B_n, B_1B_p, B_pB_n *die Hilfskante von* $w_1, \cdots, w_s, x_1, \cdots, x_t, y_1, \cdots, y_r$ *und wir nennen die Kante* $B'_1B'_n$ *bezw.* $B''_1B'_p$ *bezw.* $B''_pB''_n$ *das ausgezeichnete Urbild von* B_1B_n *bezw.* B_1B_p *bezw.* B_pB_n.

Wir bezeichnen das ausgezeichnete[1] *Urbild von* B_1B_2 *bezw.* $B_{n-1}B_n$ *bezw.* $B_{p-1}B_p$ *bezw.* B_pB_{p+1} *mit* $\mathring{B}'_1B'_2$ *bezw.* $B'_{n-1}\mathring{B}'_n$ *bezw.* $B'_{p-1}\mathring{B}'_p$ *bezw.* $\mathring{B}''_pB'_{p+1}$. *Es gibt die, die Ecken* B'_1 *und* $\mathring{B}'_1$ *verbindende, Kantenwege-gruppe, die wir mit* $[B'_1\mathring{B}'_1]$ *bezeichnen.*

Ebenfalls gibt es auf S_1 $[B'_n\mathring{B}'_n]$, $[B'_p\mathring{B}'_p]$, $[B''_p\mathring{B}''_p]$, $[B'_nB''_n]$, $[\mathring{B}'_nB''_n]$, $[B'_1B''_1]$, $[B''_1\mathring{B}'_1]$. *Wir bezeichnen* $[B'_1\mathring{B}'_1]$, $[B'_n\mathring{B}'_n]$, $[B''_1\mathring{B}'_1]$, $[\mathring{B}'_1B'_1]$, $[\mathring{B}'_nB''_n]$, $[B''_nB'_n]$, $[B'_p\mathring{B}'_p]$ *und* $[B''_p\mathring{B}''_p]$ *auch als die imaginären Urbilder.*

4). *Wenn* C *eine Ecke ist, die in einem unter* $w_1, \cdots, w_s, x_1, \cdots, x_t, y_1, \cdots, y_r$ *enthalten ist, und wenn es in* $\mathfrak{G}_t$ *für einen von* $w_1, \cdots, y_r$, *etwa für* $x_1 = B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{n-1}B_n$ *die, die beiden Ecken* B_1 *und* C *verbindende Kante gibt und* $\mathfrak{P}_1(B_1C)$ *ein in* $\mathfrak{B}(B_1)$ *und* $\mathfrak{B}(C)$ *enthaltener Schnitt in* $\mathfrak{G}_t$ *ist, so gibt es auf* S_1 *die Kante* B'_1C', *und der Schnitt* $\mathfrak{P}(B_1C)$ *ist zu* B'_1C' *geordnet und* $\mathfrak{P}(B_1C)$ *ist in* $\mathfrak{P}_1(B_1C)$ *enthalten.*

Wenn es die Kanten B_1C *und* CB_n *in* $\mathfrak{M}$ *gibt und sowohl* B_1C *als auch* CB_n *in* $\mathfrak{G}_t$ *enthalten ist, und wenn* $\mathfrak{P}_1(B_1C)$ *bezw.* $\mathfrak{P}_1(CB_n)$ *ein in*

1) Vgl. S. 89. Zeile. 3.

$\mathfrak{B}(B_1)$ und $\mathfrak{B}(C)$ bezw. in $\mathfrak{B}(C)$ und $\mathfrak{B}(B_n)$ enthaltener Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ ist, so gibt es auf S_1 die Kante B'_1C' und $C''B'_n$ und der Schnitt $\mathfrak{P}(B_1C)$ bezw. $\mathfrak{P}(CB_n)$ ist zu B'_1C' bezw. $C''B'_n$ geordnet und $\mathfrak{P}(B_1C)$ bezw. $\mathfrak{P}(CB_n)$ ist in $\mathfrak{P}_1(B_1C)$ bezw. $\mathfrak{P}_1(CB_n)$ enthalten.

Wir nennen die Kanten B_1C, CB_n auch die Hilfskanten, und wir nennen die Kante B'_1C' bezw. $C''B'_n$ das ausgezeichnete Urbild von B_1C bezw. CB_n.

Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von B_1B_2 bezw. $B_{n-1}B_n$ mit $\mathring{B}'_1B'_2$ bezw. $B'_{n-1}\mathring{B}'_n$. Es gibt auf S_1 $[B'_1\mathring{B}'_1]$, $[B'_n\mathring{B}'_n]$ und $[C'C'']$. Wir bezeichnen $[B'_1\mathring{B}'_1]$, $[B'_n\mathring{B}'_n]$, $[C'C'']$ die imaginären Urbilder.

5). *BC sei eine in einem unter $w_1, \cdots, w_s, x_1, \cdots, x_t, y_1, \cdots, y_r$ enthaltene Kante oder eine Hilfskante. Wir bezeichnen den zu der Kante BC geordneten*[1] *Schnitt in $\mathfrak{G}_i$ mit $\mathfrak{P}_1(BC)$. Es gibt auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von BC, das wir mit $B'C'$ bezeichnen.*

Wenn $\mathfrak{P}_2(BC)$ ein von $\mathfrak{P}_1(BC)$ verschiedener Schnnit in $\mathfrak{G}_i$ ist, und wenn $\mathfrak{P}_2(BC)$ und $\mathfrak{P}_1(BC)$ in einem und demselben Kegel in $\mathfrak{G}_i$ mit der Spitze B bezw. C enthalten sind, so gibt es auf S_1 eine Kante $B''C''$, so daß der zu Kante $B''C''$ geordnete Schnitt in $\mathfrak{P}_2(BC)$ enthalten ist. Es gibt die, die Ecken B' und B'' bezw. C' und C'' verbindende, Kantenwegegruppe $[B'B'']$ bezw. $[C'C'']$.

Wir nennen diese Kante BC, mit dem Schnitt $\mathfrak{P}_2(BC)$, die Hilfskante zweiter Art, und wir nennen die Kante $B''C''$ auch das ausgezeichnete Urbild von der Hilfskante BC zweiter Art und $[B'B'']$ bezw. $[C'C'']$ das imaginäre Urbild.

Für die gegebenen Kantenwege $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ und ihre Hilfskanten und ihre Hilfskanten zweiter Art gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ und ihren Hilfskanten und ihren Hilfskanten zweiter Art und die imaginären Urbilder, so daß für jeder von ihren und für je zwei von ihren dieselbe Bedingung wie 2) gilt.[2]

Beweis. Wir wollen diese Zwischenbehauptung IV nach der mathematischen Induktion beweisen. Wir nehmen an, daß die Zwischenbehauptung für $\mathfrak{G}_i$ richtig ist. ABC sei ein Dreieck, das nicht noch in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und mit $\mathfrak{G}_i$ mindestens eine Kante gemeinsam hat. Wir unterscheiden nun die folgenden vier Fälle.

1. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ nur eine einzige Kante, etwa BC, gemeinsam.

2. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ die beiden Kanten, etwa AB und AC, gemeinsam.

---

1) Vgl. S. 89. Zeile. 33.

2) Vgl. S. 88.

3. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ drei Kanten AB, AC und BC gemeinsam.

4. *Fall.* ABC hat mit $\mathfrak{G}_i$ die Kante BC und die Ecke A gemeinsam.

Wir behandeln erstens den

1. *Fall.* Wir setzen $\mathfrak{G}_i+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$. Es seien einige ausgezeichneten geschlossenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $w_1, w_2, \cdots, w_s$ und einige ausgezeichneten offenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $x_1, x_2, \cdots, x_t$ und einige ausgezeichneten Zweige in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $y_1, y_2, \cdots, y_r$ gegeben, so daß je zwei unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ keine Ecke gemeinsam haben oder, wenn eine Ecke A_0 etwa in w_1 und x_1 enthalten ist, so der zu der Ecke A_0 in w_1 geordnete Kegel und der zu der Ecke A_0 in x_1 geordnete Kegel voneinander verschieden sind.

Wir nehmen an, daß die Ecke A in einem unter $w_1, \cdots, w_s, x_1, \cdots, x_t, y_1, \cdots, y_r$, etwa in w_1, enthalten ist. Wir setzen $w_1=A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_1$ und $A_2=A$. Es gilt dann offenbar $A_1A_2+A_2A_3=BA+AC$ oder $A_1A_2+A_2A_3=CA+AB$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $A_1A_2+A_2A_3=BA+AC$ ist, umd wir ersetzen den Kantenweg $A_1A_2+A_2A_3$ durch die Kante $A_1A_3=BC$, so bekommen wir den Kantenweg $w'_1=A_1A_3+\cdots+A_nA_1$. Wir lassen zu der Kante $A_1A_3=BC$ das Dreieck BCA ordnen. Wenn A_n nicht mit A_3 übereinstimmt, so ist w'_1 ein ausgezeichneter geschlossener Kantenweg in $\mathfrak{G}_i$. Wenn A_n mit A_3 übereinstimmt, so ist w'_1 ein ausgezeichneter Zweig in $\mathfrak{G}_i$.

Wir nehmen an, daß w'_1 ein ausgezeichneter geschlossener Kantenweg in $\mathfrak{G}_i$ ist. Wenn auch w'_1 ein ausgezeichneter Zweig ist, läuft die folgende Diskussion ganz analog.

Für die Kantenwege $w'_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ gibt es auf S_1 ihre ausgezeichneten Urbilder, und die Bedingungen 1, 2, 3, 4 und 5 sind für sie erfüllt. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von BC mit $B'C'$.

Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O, B'C')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''(B''C''=l_1)$ und $A''B''C''(B''C''=l_2)$ gibt und $S'_1-\{A''B''C''(B''C''=l_1)+A''B''C''(B''C''=l_2)\}$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O, B'C')$ derart konstruieren, daß $T(B''C''A''\,;\,B''C''=l_1)=T(B''C''A''\,;\,B''C''=l_2)=(O, B'C')$ und $T(l_1)=T(l_2)=B'C'$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T'_1(A''B''C'')=ABC$, $\mathfrak{G}_i+ABC=\mathfrak{G}_{i+1}$, $\mathfrak{Z}_i+ABC=\mathfrak{Z}_{i+1}$ und $\mathfrak{K}_1-ABC=\mathfrak{K}'_1$.

Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von w'_1 mit $(v_1^1, v_1^2, \cdots, u_1^a, u_2^a, \cdots, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}\cdots)$. Die Kante $B'C'$ ist in einem unter $(v_1^1, v_1^2, \cdots)$, etwa in v_1^1, enthalten. Wir setzen $v_1^1 = B'C'(= A'_1A'_3) + A'_3A'_4 + \cdots + A'_{a-1}A'_a$. Es gibt auf S'_1 die Kante $A''_3A''_4, \cdots, A''_{a-1}A''_a$, $(A''_3 = C'')$, so daß $T(A''_3A''_4) = A'_3A'_4, \cdots, T(A''_{a-1}A''_a) = A'_{a-1}A'_a$ ist. Wir setzen $B''A'' + A''C'' + A''_3A''_4 + \cdots + A''_{a-1}A''_a = \tilde{v}_1^1$. Es gibt auf S'_1 den Kantenweg $\tilde{v}_1^2$ usw., so daß $T(\tilde{v}_1^2) = v_1^2$ usw. Die Kantenwegegruppe $(\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_1^2, \cdots, \tilde{u}_1^a, \tilde{u}_2^a, \cdots, \tilde{u}_1^{a+b}, \cdots)$ bildet dann offenbar das ausgezeichnete Urbild von w_1, und die Bedingung 2 in der Zwischenbehauptung IV ist für sie erfüllt.

Ebenfalls gibt es auf S'_1 das ausgezeichnete Urbild von $w_2, \cdots$, und die Bedingungen 1, 2, 3, 4, 5 sind für sie erfüllt.

Wir nehmen zweitens an, daß die Ecke A in x_1 enthalten ist. Wir setzen dann $x_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Wenn die Ecke A mit einer unter $A_2, A_3, \cdots, A_{n-1}$ übereinstimmt, so läuft Diskussion ganz analog mit der obigen. Wir behandeln daher den Fall, worin die Ecke A mit einer von den beiden A_1 und A_n, etwa mit A_1, übereinstimmt. Die Ecke A_2 stimmt dann mit einer von den beiden B und C, etwa mit B, übereinstimmt.

Wenn die Ecke C in keinem von $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, so ersetzen wir die Kante $A_1A_2 = AB$ durch die Kante CB, so bekommen wir aus x_1 den Kantenweg $x'_1 = CB + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Für $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_3, \cdots, y_r$ gilt die Zwischenbehauptung IV.

Wenn die Ecke C in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$, etwa in x_2, enthalten ist, so setzen wir $x_2 = B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{m-1}B_m$ und $C = B_j (1 < j < m)$. Wir ersetzen die Kante $A_1A_2 = AB$ durch die Kante CB, so bekommen wir aus x_1 den Kantenweg $x'_1 = CB + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n$. Wir ersetzen x_2 durch die beiden Kantenwege $x'_2 = B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{j-2}B_{j-1}$ und $x''_2 = B_{j+1}B_{j+2} + \cdots + B_{m-1}B_m$.

Sowohl $B_{j-1}B_j$ als auch B_jB_{j+1} ist die, in der Bedingung 4 erwähnte, Hilfskante. Es gibt auf S_1 für $w_1, w_2, \cdots, w_s, x'_1, x'_2, x''_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ die ausgezeichneten Urbilder. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von x'_2 mit $(w_1^1, w_1^2, \cdots, u_1^a, u_2^a, \cdots, u_1^{a+b}, u_2^{a+b}, \cdots)$. Es gibt auf S'_1 die Kantenwege $\tilde{w}_1^1, \tilde{w}_1^2, \cdots, \tilde{u}_1^a, \tilde{u}_2^a, \cdots, \tilde{u}_1^{a+b}, \tilde{u}_2^{a+b}, \cdots$, so daß $T(\tilde{w}_1^1) = w_1^1$ usw. Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{w}_1^1, \tilde{w}_1^2, \cdots, \tilde{u}_1^a, \tilde{u}_2^a, \cdots, \tilde{u}_1^{a+b}, \tilde{u}_2^{a+b}, \cdots)$ bildet dann das ausgezeichnete Urbild von x'_2 auf S'_1.

Es gibt auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von $B_{j-1}B_j$ bezw. B_jB_{j+1}, das wir mit $\mathring{B}'_{j-1}\mathring{B}'_j(\mathring{B}'_j = \mathring{C}')$ bezw. $\mathring{B}'_{j+1}\mathring{B}''_j(\mathring{B}''_j = \mathring{C}'')$. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von $B_{j-2}B_{j-1}$ mit $B'_{j-2}B'_{j-1}$. Es gibt auf S_1 die, die beiden Ecken B'_{j-1} und $\mathring{B}'_{j-1}$ verbindende, Kantenwege-gruppe, die wir mit $(u_1^{a+b+c},\ u_2^{a+b+c}, \cdots)$ bezeichnen. Wir setzen $T(\tilde{u}_1^{a+b+c}) = u_1^{a+b+c}$ usw. Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{u}_1^{a+b+c},\ \tilde{u}_2^{a+b+c}, \cdots)$ bildet die, die beiden Ecken $\widetilde{B'}_{j-1}$ und $\widetilde{\overset{\supset}{B'}}_{j-1}$ verbindende, Kantenwege-gruppe, die wir mit $[\widetilde{B'}_{j-1}\widetilde{\overset{\subset}{B'}}_{j-1}]$ bezeichnen, wo $T(\widetilde{B'}_{j-1}) = B'_{j-1}$ $T(\widetilde{\overset{\subset}{B'}}_{j-1}) = \overset{\circ}{B'}_{j-1}$ ist.

Ebenfalls gibt es auf S'_1 das ausgezeichnete Urbild von x''_2. Das ausgezeichnete Urbild von $x'_2 + [\widetilde{B'}_{j-1}\widetilde{\overset{\supset}{B'}}_{j-1}] + \widetilde{\overset{\supset}{B'}}_{j-1}\widetilde{\overset{\supset}{B'}}_j + [\widetilde{\overset{\circ}{B'}}_j\widetilde{\overset{\circ}{B''}}_j] + \widetilde{\overset{\supset}{B''}}_j\widetilde{\overset{\subset}{B'}}_{j+1}$ $+ [\widetilde{\overset{\supset}{B'}}_{j+1}\widetilde{B'}_{j+1}] +$ das ausgezeichnete Urbild von x''_2 bildet nach der Bedingung 5 das ausgezeichnete Urbild von x_2 auf S'_1.

Wenn auch die Ecke C in x_1 enthalten ist, läuft Diskussion ganz analog.

Wir behandeln nun den

2. *Fall.* Wir setzen $\mathfrak{G}_i + ABC = \mathfrak{G}_{i+1}$. Es seien einige ausgezeichneten geschlossenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ w_j $(j = 1, 2, \cdots, s)$ und einige ausgezeichneten offenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ x_j $(j = 1, 2, \cdots, t)$ und einige ausgezeichneten Zweige in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $y_j (j = 1, 2, \cdots, r)$ gegeben, so daß je zwei unter w_j, x_j und y_j keine Ecke gemeinsam haben oder, wenn eine Ecke D in zwei unter w_j, x_j und y_j, etwa in w_j und x_j, enthalten ist, so der zu der Ecke D in w_j geordnete Kegel und der zu der Ecke D in x_j geordnete Kegel voneinander verschieden sind.

Wir nehmen an, daß die Kante BC in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$, etwa in w_1, enthalten ist. Wir setzen $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$ und $A_2A_3 = BC$. Wir ersetzen die Kante A_2A_3 durch den Kantenweg $A_2A + AA_3$, so bekommen wir den Kantenweg $w'_1 = A_1A_2 + A_2A + AA_3 + \cdots + A_nA_1$. Wir lassen sowohl zu der Kante A_2A als auch zu der Kante AA_3 das Dreieck ABC ordnen.

Wenn keine Ecke unter $A_1, A_2, \cdots, A_n$ mit A übereinstimmt, so ist w'_1 ein ausgezeichneter geschlossener Kantenweg in $\mathfrak{G}_i$.

Wir nehmen an, daß A_p mit A übereinstimmt und der zu A_p geordnete Kegel und der zu A geordnete Kegel miteinander übereinstimmen. Wir bekommen aus w'_1 die beiden Kantenwege $w''_1 = A_1A_2 + A_2A + AA_3 + \cdots + A_{p-2}A_{p-1}$ und $w'''_1 = A_{p+1}A_{p+2} + \cdots + A_{n-1}A_n$. Die Kanten $A_{p-1}A_p$, A_pA_{p+1}, A_nA_1 sind[1] dann die Hilfskanten.

Für $w_2, \cdots, w_s, w''_1, w'''_1, x_1, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ gibt es auf S_1 ihre ausgezeichneten Urbilder, und die Bedingungen 1, 2, 3, 4 und 5 sind für sie erfüllt. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von A_2A bezw. AA_3 mit $B'A'$ bezw. $\overset{\circ}{A'}C'$. Wir nehmen erstens an, daß die beiden Ecken A' und $\overset{\circ}{A'}$ übereinstimmen.

---

1) Vgl. S. 89. Zeile. 18.

Die Menge $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'A'+A'C')$ ist homöomorph mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$. Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, in Dreiecke und Zellen, so daß es auf S'_1 die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A'''B''C''$ gibt und $S'_1-(A''B''C''+A'''B''C'')$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt ist.

Wir können eine topologische Abbildung T von $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ auf $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}-(O,\ B'A'+A'C')$ derart konstruieren, daß $T(B''A''C'')=T(B''A'''C'')=(O,\ B'A'+A'C')$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen durch T topologisch auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S_1 abgebildet werden.

Wir setzen $T_1T=T'_1$, $T'_1(A''B''C'')=ABC$, $\mathfrak{S}_i+ABC=\mathfrak{S}_{i+1}$, $\mathfrak{F}_i+ABC=\mathfrak{F}_{i+1}$ und $\mathfrak{R}_1-ABC=\mathfrak{R}'_1$.

β_1). Wir bezeichnen den zu der Ecke A' geordneten Kegel mit $\mathfrak{B}(A)$. $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)$ zerlegt oder nicht zerlegt. Wenn $\mathfrak{B}(A)$ durch ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}'(A)$ und $\mathfrak{B}''(A)$ zerlegt wird, so ergibt sich der Fall β_1) in S. 69.

β_2). Der Fall β_1) ergibt nicht sich.

Wir nehmen erstens an, daß der Fall β_1) sich ergibt.

β_1). Es gibt auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von w''_1, das wir mit $(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_1^a,\ u_2^a,\ \cdots)$ bezeichnen. Ebenfalls gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von w'''_1, das wir mit $(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_1^b,\ v_2^b,\ \cdots)$ bezeichnen. Die Kante $B'A'$ bezw. $A'C'$ ist etwa in u_1 enthalten. Wir setzen $u_1=A'_1A'_2+A'_2A'(A'_2=B')+A'A'_3(A'_3=C')+\cdots+A'_{a-1}A'_a$. Es gibt auf S'_1 die Kanten $A''_1A''_2,\ A''_3A''_4,\ \cdots,\ A''_{a-1}A''_a$, so daß $T(A''_1A''_2)=A'_1A'_2$, $T(A''_3A''_4)=A'_3A'_4,\ \cdots,\ T(A''_{a-1}A''_a)=A'_{a-1}A'_a$ ist. Es gibt auch auf S'_1 $\tilde{u}_2,\ \cdots,\ \tilde{u}_1^a,\ \tilde{u}_2^a,\ \cdots,\ \tilde{v}_1,\tilde{v}_2\cdots$, so daß $T(\tilde{u}_2)=u_2$ usw. Wir setzen $\tilde{u}_1=A''_1A''_2+B''C''+C''A''_3+\cdots+A''_{a-1}A''_a$.

Anderseits gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von der Kante $A_{p-1}A_p$ bezw. A_pA_{p+1} bezw. A_nA_1, das wir mit $\mathring{A}'_{p-1}\mathring{A}'_p$, $\mathring{A}''_p\mathring{A}'_{p+1}$, $\mathring{A}'_n\mathring{A}'_1$ bezeichnen. Wir bezeichnen das auf S_1 liegende ausgezeichnete Urbild von $A_{p-2}A_{p-1}$ bezw. $A_{p+1}A_{p+2}$ bezw. $A_{n-1}A_n$ mit $A'_{p-2}A'_{p-1}$ bezw. $A'_{p+1}A'_{p+2}$ bezw. $A'_{n-1}A'_n$. Es gibt auf S_1 $[A'_{p-1}\mathring{A}'_{p-1}]$, $[\mathring{A}'_p\mathring{A}''_p]$, $[A'_{p+1}\overset{c}{A}'_{p+1}]$, $[A'_n\mathring{A}'_n]$, $[A'_1\mathring{A}'_1]$. Es gibt auf S'_1 $[\widetilde{A}'_{p-1}\widetilde{\overset{\supset}{A}}'_{p-1}]$, $[\widetilde{\overset{c}{A}}'_p\widetilde{\mathring{A}}''_p]$, $[\widetilde{A}'_{p+1}\widetilde{\overset{\supset}{A}}'_{p+1}]$, $[\widetilde{A}'_n\widetilde{\mathring{A}}'_n]$, $[\widetilde{A}'_1\widetilde{\overset{c}{A}}'_1]$, so daß $T[\widetilde{A}'_{p-1}\widetilde{\overset{\supset}{A}}'_{p-1}]=[A'_{p-1}\mathring{A}'_{p-1}]$, $T[\widetilde{\overset{c}{A}}'_p\widetilde{\overset{c}{A}}''_p]=[\mathring{A}'_p\mathring{A}''_p]$, $T[\widetilde{A}'_{p+1}\widetilde{\mathring{A}}'_{p+1}]=[A'_{p+1}\mathring{A}'_{p+1}]$, $T[\widetilde{A}'_1\widetilde{\overset{c}{A}}'_1]=[A'_1\mathring{A}'_1]$, $T[\widetilde{A}_n\widetilde{\overset{c}{A}}'_n]=[A_n\mathring{A}'_n]$ ist.

Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{u}_1,\ \tilde{u}_2,\ \cdots\tilde{u}_1^a,\ \tilde{u}_2^a,\ \cdots)+[\widetilde{A}'_{p-1}\widetilde{\overset{\supset}{A}}'_{p-1}]+\widetilde{\overset{c}{A}}'_{p-1}\widetilde{\mathring{A}}'_p+[\widetilde{\mathring{A}}'_p\widetilde{\overset{\supset}{A}}''_p]+\widetilde{\mathring{A}}''_p\widetilde{\overset{c}{A}}'_{p+1}+[\widetilde{\overset{\supset}{A}}'_{p+1}\widetilde{A}'_{p+1}]+(\tilde{v}_1,\ \tilde{v}_2,\ \cdots,\ \tilde{v}_1^b,\ \tilde{v}_2^b,\ \cdots)+[\widetilde{A}_n\widetilde{\mathring{A}}'_n]+\widetilde{\overset{c}{A}}'_n\widetilde{\mathring{A}}'_1+[\widetilde{A}'_1\widetilde{\overset{c}{A}}'_1]$ bildet nach der Bedingung 5 das ausgezeichnete Urbild von w_1 auf S'_1.

Wir nehmen zweitens an, daß der Fall β_2) sich ergibt.

β_2). Wir nehmen die Abb. 6 auf. Wir setzen $\tilde{u}_1 = A''_1 A''_2$, $A''_2 = \widetilde{B''}_2$, $\tilde{\tilde{u}}_1 = B''C'' + C''A''_3 + \cdots + A''_{a-1}A''_a$, $[\widetilde{B''}B''] = \widetilde{B''}\widetilde{A''} + \widetilde{A''}B''$.

Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{u}_1, \tilde{\tilde{u}}_1, \tilde{u}_2, \cdots, [\widetilde{B''}B''], \tilde{u}_1^a, \tilde{u}_2^a, \cdots) + [\widetilde{A'}_{p-1}\widetilde{\mathring{A}'}_{p-1}] + \widetilde{\mathring{A}'}_{p-1}\widetilde{\mathring{A}'}_p + [\widetilde{\mathring{A}'}_p\widetilde{\mathring{A}''}_p] + \widetilde{\mathring{A}''}_p\widetilde{\mathring{A}''}_{p+1} + [\widetilde{\mathring{A}'}_{p+1}\widetilde{A'}_{p+1}] + (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \cdots, \tilde{v}_1^b, \tilde{v}_2^b, \cdots) + [\widetilde{A'}_n\widetilde{\mathring{A}'}_n] + \widetilde{\mathring{A}'}_n\widetilde{\mathring{A}'}_1 + [\widetilde{A'}_1\widetilde{\mathring{A}'}_1]$ bildet nach der Bedingung 5 das ausgezeichnete Urbild von w_1 auf S'_1.

Für die Abb. 7, 8, 9 läuft Diskussion ganz analog. Wenn auch die beiden Ecken A' und $\mathring{A}'$ nicht miteinander übereinstimmen, läuft Diskussion ganz analog.

Wenn auch die Kante BC in einem ausgezeichneten offenen Kantenweg enthalten ist, so läuft Diskussion ganz analog.

Wir behandeln nun den

3. *Fall.* Wir setzen $\mathfrak{G}_i + ABC = \mathfrak{G}_{i+1}$. Es seien einige ausgezeichneten geschlossenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $w_1, w_2, \cdots, w_s$ und einige ausgezeichneten offenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $x_1, x_2, \cdots, x_t$ und einige ausgezeichneten Zweige in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $y_1, y_2, \cdots, y_r$ gegeben, so daß je zwei unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ keine Ecke gemeinsam haben oder, wenn etwa $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$ und $x_1 = B_1B_2 + \cdots + B_{m-1}B_m$ eine Ecke $D = A_1 = B_1$ gemeinsam haben, der zu A_1 geordnete Kegel und der zu B_1 geordnete Kegel voneinander verschieden sind.

Wir nehmen an, daß eine Ecke unter A, B und C in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist. Der Komplex $\mathfrak{M}_1$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Teilkomplex $\mathfrak{M}'_1$ und $\mathfrak{M}''_1$ zerlegt oder nicht zerlegt. Wir behandeln erstens den Fall.

α_1). Der Komplex $\mathfrak{M}_1$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Teilkomplexe $\mathfrak{M}'_1$ und $\mathfrak{M}''_1$ zerlegt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß alle Kantenwege $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ zu $\mathfrak{M}'_1$ gehören. Wir setzen $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$. Wir bezeichnen den Kegel in $\mathfrak{G}_i$ mit der Spitze A bezw. B bezw. C, der das Dreieck ABC enthält, mit $\mathfrak{B}(A)$ bezw. $\mathfrak{B}(B)$ bezw. $\mathfrak{B}(C)$. Der Kegel $\mathfrak{B}(A)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(A)$ und $\mathfrak{B}_2(A)$, etwa $\mathfrak{B}_1(A)$, ist in $\mathfrak{M}'_1$ enthalten und der andere $\mathfrak{B}_2(A)$ ist in $\mathfrak{M}''_1$ enthalten. Der Kegel $\mathfrak{B}(B)$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(B)$ und $\mathfrak{B}_2(B)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(B)$ und $\mathfrak{B}_2(B)$, etwa $\mathfrak{B}_1(B)$, ist in $\mathfrak{M}'_1$ enthalten und der andere $\mathfrak{B}_2(B)$ ist in $\mathfrak{M}''_1$ enthalten. Ebenfalls wird der Kegel $\mathfrak{B}(C)$ durch das Dreieck ABC in die beiden Kegel $\mathfrak{B}_1(C)$ und $\mathfrak{B}_2(C)$ zerlegt, und einer von den beiden $\mathfrak{B}_1(C)$ und $\mathfrak{B}_2(C)$, etwa $\mathfrak{B}_1(C)$, ist in $\mathfrak{M}'_1$ enthalten und der andere $\mathfrak{B}_2(C)$ ist in $\mathfrak{M}''_1$ enthalten.

Wir nehmen an, daß $A_1A_2 = BC$ ist und der, zu der Ecke A_1 bezw. A_2 geordnete Kegel mit $\mathfrak{B}_1(B)$ bezw. $\mathfrak{B}_1(C)$ übereinstimmt. Wenn die Ecke A in keinem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, so nehmen wir die Kanten A_1A_2, A_2A_3 und A_nA_1 aus w_1 fort. Wir bekommen dann aus w_1 den Kantenweg $w'_1 = A_3A_4 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

Wir setzen $w''_1 = AB + BC + CA$, und wir lassen zu jeder Kante unter AB, BC und CA das Dreieck ABC ordnen. Der Kantenweg w''_1 ist dann ein ausgezeichneter geschlossener Kantenweg in $\mathfrak{G}_i$.

Da die Zwischenbehauptung IV nach der Annahme für $\mathfrak{G}_i$ richtig ist, so gibt es auf S_1 die ausgezeichneten Urbilder von $w''_1, w_2, \cdots, w_s, w'_1, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots y_r$. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von AB bezw. BC bezw. CA mit $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'C'$ bezw. $\mathring{C}'\mathring{A}'$.

Wir behandeln erstens den Fall, worin es $A' = \mathring{A}'$ $B' = \mathring{B}'$ und $C' = \mathring{C}'$ gilt. Die Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ wird durch die Menge $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ nnd $\mathfrak{H}_2$ zerlegt. Die Sphäre S_1 wird durch $A'B' + B'C' + C'A'$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt. Die Begrenzung von $\mathfrak{H}_1$ besteht aus H_1 und $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ und die Begrenzung von $\mathfrak{H}_2$ besteht aus H_2 und $(O,\ A'B' + B'C' + C'A')$.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, das Dreieck $A''B''C''$ gibt und $S'_1 - A''B''C''$ ebenso wie H_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird. Ebenfalls zerlegen wir die Sphäre $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, $A'''B'''C'''$ gibt und $S''_1 - A'''B'''C'''$ ebenso wie H_2 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird.

Wir bilden topologisch die Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$ durch die Abbildung T auf $\mathfrak{H}_1$ ab, so daß die induzierte Abbildung von T die Sphäre S'_1 auf $H_1 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ topologisch abbildet. Ebenfalls bilden wir topologisch die Kugel $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 < 1$ durch die Abbildung T' auf $\mathfrak{H}_2$ ab, so daß die induzierte Abbildung von T' die Sphäre S'' auf $H_2 + (O,\ A'B' + B'C' + C'A')$ topologisch abbildet.

Wir setzen $T_1T = T'_1$, $T_1T' = T''_1$, $T'_1(A''B''C'') = T''_1(A'''B'''C''') = ABC$, $\mathfrak{G}_i + ABC = \mathfrak{G}_{i+1}$ und $\mathfrak{F}_i + ABC = \mathfrak{F}_{i+1}$. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $T'_1(S'_1)$ (mod. 2) den Rand von $\mathfrak{M}'_1$ bildet und die zu den auf S'_1 liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}'_1$ enthalten sind, und daß $T''_1(S''_1)$ (mod. 2) den Rand von $\mathfrak{M}''_1$ bildet und die zu den auf S''_1 liegenden Dreiecken geordneten 3-Simplexe in $\mathfrak{M}''_1$ enthalten sind.

Nach der Bedingung 5 in der Zwischenbehauptung IV liegen die ausgezeichneten Urbilder von $w''_1, w_2, \cdots, w_s, w'_1, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ auf H_1. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von w'_1 bezw. A_2A_3 bezw. A_nA_1 mit $(v_1^1, v_1^2, \cdots, v_1^a, v_2^a, \cdots)$ bezw. $A'_2A'_3$ bezw. $A'_nA'_1 (A'_2 = \mathring{C}'$, $A'_1 = \mathring{B}')$. Wir bezeichnen auch das ausgezeichnete Urbild von A_3A_4 bezw. $A_{n-1}A_n$ mit $\mathring{A}'_3A'_4$ bezw. $A'_{n-1}\mathring{A}'_n$.

Wir bezeichnen den zu der Kante $B'C'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ ist in einem einzigen und bestimmten Schnitt in $\mathfrak{G}_t$ enthalten, den wir mit $\mathfrak{P}_1(BC)$ bezeichnen. Das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck ist in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten oder nicht.

Wir nehmen erstens an, daß das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten ist. Der Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ wird durch ABC in die beiden Schnitte $\mathfrak{P}'(BC)$ und $\mathfrak{P}''(BC)$ zerlegt, und der zu der Kante $B''C''$ geordnete Schnitt ist in einem unter $\mathfrak{P}'(BC)$ und $\mathfrak{P}''(BC)$, etwa in $\mathfrak{P}'(BC)$, enthalten. Das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck ist dann in $\mathfrak{P}'(BC)$ enthalten.

Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_1^2, \cdots, \tilde{v}_1^a, \tilde{v}_2^a, \cdots) + [\widetilde{\mathring{C}'}C''] + C''B'' + [B''\widetilde{\mathring{B}'}] + \widetilde{A'_1}\widetilde{A'_n} + [\widetilde{A'_n}\widetilde{\mathring{A}'_n}] + [\widetilde{\mathring{A}'_3}\widetilde{A'_3}] + \widetilde{A'_2}\widetilde{A'_3}$ bildet dann das ausgezeichnete Urbild von w_1, wo $T(\tilde{v}_1^1) = v_1^1$ usw.

Wir nehmen zweitens an, daß das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck nicht in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten ist. In diesem Falle gibt es auf S die Kante $B'_1C'_1$, so daß $T_1(B'_1C'_1) = BC$ ist und der zu der Kante $B'_1C'_1$ geordnete Schnitt in dem Schnitte $\mathfrak{P}_2(BC)$ in $\mathfrak{G}_i$ enthalten ist und $\mathfrak{P}_2(BC)$ das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck enthält. Es gibt ferner $[C'C'_1]$, $[B'B'_1]$, und die Bedingung 5 ist für sie erfüllt.

Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_1^2, \cdots, \tilde{v}_1^a, \tilde{v}_2^a, \cdots) + [\widetilde{\mathring{C}'}C''] + [C''\widetilde{C'_1}] + \widetilde{C'_1}\widetilde{B'_1} + [\widetilde{B'_1}B''] + [B''\widetilde{\mathring{B}'}] + \widetilde{A'_1}\widetilde{A'_n} + [\widetilde{A'_n}\widetilde{\mathring{A}'_n}] + [\widetilde{\mathring{A}'_3}\widetilde{A'_3}] + \widetilde{A'_2}\widetilde{A'_3}$ bildet dann das ausgezeichnete Urbild von w_1, wo $T(\widetilde{C'_1}\widetilde{B'_1}) = C'_1B'_1$ ist.
Wenn auch $A_1A_2 = BC$ in einem unter $x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, läuft Diskussion ganz analog. Wenn auch sowohl BC als auch CA in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, läuft Diskussion ganz analog.

Wenn es $A' = \mathring{A}'$ $B' = \mathring{B}'$ und $C' = \mathring{C}'$ nicht gilt, vergl. den Fall β) im 3. Fall im 3. Schritte. (S. 102)

Wir behandeln den Fall

α_2). Der Komplex $\mathfrak{M}_1$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Teilkomplexe nicht zerlegt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß alle Kantenwege $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1,$

$y_2, \cdots, y_r$ zu $\mathfrak{M}_1$ gehören. Wir setzen $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$. Wir nehmen an, daß $A_1A_2 = BC$. Wenn die Ecke A in keinem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, so nehmen wir die Kante A_2A_3, A_1A_2, A_nA_1 aus w_1 fort. Wir bekommen dann aus w_1 den Kantenweg $w'_1 = A_3A_4 + \cdots + A_{n-1}A_n$.

Wir setzen $w''_1 = AB + BC + CA$, und wir lassen zu jeder Kante von AB, BC und CA das Dreieck ABC ordnen. Der Kantenweg w''_1 ist dann ein ausgezeichneter geschlossener Kantenweg in $\mathfrak{G}_t$.

Da die Zwischenbehauptung IV nach der Annahme für $\mathfrak{G}_t$ richtig ist, so gibt es auf S_1 die ausgezeichneten Urbilder von $w''_1, w_2, \cdots, w_s, w'_1, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$. Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von AB bezw. BC bezw. CA mit $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'C'$ bezw. $C'\mathring{A}'$.

Wenn die Ecke A in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, so bildet die Kante AB bezw. AC eine Hilfskante. Wir bezeichnen ebenfalls das ausgezeichnete Urbild von AB bezw. BC bezw. CA mit $A'B'$ bezw. $\mathring{B}'C'$ bezw. $\mathring{C}'\mathring{A}'$

Um die Idee zu fixieren, nehmen wir an, daß die Ecke A in keinem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist. Wir behandeln erstens den Fall, daß es $A' = \mathring{A}'$, $B' = \mathring{B}'$ und $C' = \mathring{C}'$ gilt. Die Kugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ wird durch die Menge $(O, A'B' + B'C' + C'A')$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zerlegt. Die Sphäre S_1 wird durch $A'B' + B'C' + C'A'$ in die beiden Halbsphären H_1 und H_2 zerlegt. Die Begrenzung von $\mathfrak{H}_1$ besteht aus H_1 und $(O, A'B' + B'C' + C'A')$, und die Begrenzung von $\mathfrak{H}_2$ besteht aus H_2 und $(O, A'B' + B'C' + C'A')$.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, das Dreieck $A''B''C''$ gibt und $S'_1 - A''B''C''$ ebenso wie H_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird. Ebenfalls zerlegen wir die Sphäre $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, die wir mit S''_1 bezeichnen, $A'''B'''C'''$ gibt und $S''_1 - A'''B'''C'''$ ebenso wie H_2 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird.

Wir bilden topologisch die Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$ durch die Abbildung T auf $\mathfrak{H}_1$ ab, so daß die induzierte Abbildung von T die Sphäre S'_1 auf $H_1 + (O, A'B' + B'C' + C'A')$ topologisch abbildet. Ebenfalls bilden wir topologisch die Kugel $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 < 1$ durch die Abbildung T' auf $\mathfrak{H}_2$ ab, so daß die induzierte Abbildung von T' die Sphäre S''_1 auf $H_2 + (O, A'B' + B'C' + C'A')$ topologisch abbildet.

Da der Komplex $\mathfrak{M}_1$ durch das Dreieck ABC in die beiden Teilkomplexe nicht zerlegt wird, so gibt es auf H_1 bezw. H_2 eine Zelle Z'_1 bezw. Z''_1 und es gilt $T_1(Z'_1) = T_1(Z''_1)$. Daher gibt es auf S'_1 bezw. S''_1 die Zelle $\widetilde{Z}'_1$ bezw. $\widetilde{Z}''_1$, so daß $T(\widetilde{Z}'_1) = Z'_1$ und $T(\widetilde{Z}''_1) = Z''_1$ ist.

Wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von w'_1 bezw. A_2A_3 bezw. A_nA_1 mit $(v_1^1, v_1^2, \cdots, v_1^a, v_2^a, \cdots)$ bezw. $A'_2A'_3$ bezw. $A'_nA'_1 (A'_2 = \mathring{C}', A'_1 = \mathring{B}')$. Wir bezeichnen auch das ausgezeichnete Urbild von A_3A_4 bezw. $A_{n-1}A_n$ mit $\mathring{A}'_3A'_4$ bezw. $A'_{n-1}\mathring{A}'_n$.

Wir identifizieren die beiden Zellen $\widetilde{Z}'_1$ und $\widetilde{Z}''_1$, so bekommen wir aus $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ und $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ eine neue Kugel $\mathfrak{H}_3$. Wir bezeichnen den zu der Kante $B'C'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. Der Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ ist in einm einzigen und bestimmten Schnitt in $\mathfrak{G}_t$ enthalten, den wir mit $\mathfrak{P}_1(BC)$ bezeichnen. Das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck ist in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten oder nicht.

Wir nehmen erstens an, daß das, zu der Kante A_1A_2 geordnete, Dreieck in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten ist. Wir setzen $v_1^1 = \mathring{A}'_3A'_4 + \cdots + A'_{a-1}A'_a$ und $v_1^2 = \mathring{A}'_aA_{a+1} + \cdots + A'_{a+b-1}A'_{a+b}$. Die Kantenwege-gruppe $(v_1^a, v_2^a, \cdots)$ ist die, die beiden Ecken A'_a und $\mathring{A}'_a$ verbindende, Kantenwege-gruppe. Einer unter $v_1^a, v_2^a, \cdots$, etwa v_1^a, verbindet die beiden Ecken A'_a und $\mathring{A}'_a$.

Nach der Bedingung 5 in der Zwischenbehauptung IV kreuzen die benachbarten Kanten von $A'B'+B'C'+C'A'$ und die benachbarten Kanten von v_1^a nicht sich. Daher liegt der Kantenweg v_1^a auf einem von den beiden H_1 und H_2, etwa auf H_1. Der Kantenweg v_1^1 liegt[1] offenbar auf einem von den beiden H_1 und H_2. Da die Ecke A'_a auf H_1 liegt, so liegt v_1^1 auf H_1. Ebenfalls liegt der Kantenweg v_1^2 auf H_1. Dasselbe gilt für $v_1^3, \cdots$.

Folglich liegt sowohl $\mathring{A}'_3A'_4$ als auch $A'_{n-1}A'_n$ auf H_1. Nach der Bedingung 5 kreuzen die beiden benachbarten Kanten von $A'B'+B'C'+C'A'$ und die beiden benachbarten Kanten von $[\mathring{A}'_3A'_3]$ nicht sich. Daher liegt das ausgezeichnete Urbild $A'_2A'_3$ auf H_1. Ebenfalls liegt das ausgezeichnete Urbild $A'_nA'_1$ auf H_1.

Wenn der Kentenweg v_2^a mit Z'_1 inzident und v_3^a mit Z''_1 inzident ist, so gibt es auf S'_1 bezw. S''_1 den Kantenweg $\tilde{v}_2^a$ bezw. $\tilde{v}_3^a$, derart daß $T(\tilde{v}_2^a) = v_2^a$ und $T'(\tilde{v}_3^a) = v_3^a$ ist. Nach der Identifizierung der Zellen $\widetilde{Z}'_1$ und $\widetilde{Z}''_1$ vereinigen wir die Kantenwege $\tilde{v}_2^a$ und $\tilde{v}_3^a$, so bekommen wir den Kantenweg $\tilde{v}_2^a+\tilde{v}_3^a$.

Die Kantenwege-gruppe $(\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_1^2, \cdots, \tilde{v}_1^a, \tilde{v}_2^a+\tilde{v}_3^a, \cdots) + [\widetilde{\mathring{C}'C''}] + C''B'' + [\widetilde{B''\mathring{B}'}] + \widetilde{A}'_1\widetilde{A}'_n + [\widetilde{A}'_n\widetilde{\mathring{A}}'_n] + \widetilde{A}'_2\widetilde{A}'_3 + [\widetilde{A}'_3\widetilde{\mathring{A}}'_3]$ bildet dann das ausgezeichnete Urbild von w_1, wo $T(\tilde{v}_1^1) = v_1^1$ usw.

Wenn das, zu der Kante A_1A_2 in w_1 geordnete, Dreieck nicht in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten ist, so läuft[2] Diskussion ganz analog.

---

[1] Nach der Bedingung 5 in der Zwischenbehauptung IV.

[2] Vgl. S. 97. Zeile 21.

Wenn es $A' = \overset{\circ}{A}'$, $B' = \overset{\circ}{B}'$ und $C' = \overset{\circ}{C}'$ nicht gilt, vgl. den Fall β) im 3. Falle im 3. Schritte (S. 102)

Wir behandeln nun den

4. *Fall.* Wir setzen $\mathfrak{G}_i + ABC = \mathfrak{G}_{i-1}$. Es seien einige ausgezeichneten geschlossenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $w_1, w_2, \cdots, w_s$ und einige ausgezeichneten offenen Kantenwege in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $x_1, x_2, \cdots, x_t$ und einige ausgezeichneten Zweige in $\mathfrak{G}_{i+1}$ $y_1, y_2, \cdots, y_r$ gegeben. Je zwei unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ haben keine Ecke gemeinsam, oder, wenn etwa $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$ und $x_1 = B_1B_2 + \cdots + B_{m-1}B_m$ eine Ecke $D = A_1 = B_1$ gemeinsam haben, der zu A_1 geordnete Kegel und der zu B_1 geordnete Kegel voneinander verschieden sind.

Wir nehmen an, daß AB in einem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist. Wir setzen $w_1 = A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$ und $A_1A_2 = \grave{A}B$. Wir nehmen die Kante A_1A_2 aus w_1 fort, so bekommen wir aus w_1 den Kantenweg $A_2A_3 + \cdots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$. Wir bezeichnen den, das Dreieck ABC enthaltende, Kegel mit der Spitze C mit $\mathfrak{B}(C)$. Wenn die Ecke C in keinem unter $w_1, w_2, \cdots, w_s, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ enthalten ist, so setzen wir $w'_1 = CB + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$. Wir lassen zu der Kante CB das Dreieck CBA ordnen. Wenn die Ecke C etwa in $x_1 = B_1B_2 + \cdots + B_{m-1}B_m$ enthalten ist und $B_1 = C$ ist, und wenn der zu der Ecke B_1 geordnete Kegel nicht mit $\mathfrak{B}(C)$ übereinstimmt, so setzen wir auch $w'_1 = CB + A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$. Wir lassen auch zu der Kante CB das Dreieck CBA ordnen. Wenn der zu der Ecke B_1 geordnete Kegel mit $\mathfrak{B}(C)$ übereinstimmt, so setzen wir $w'_1 = A_2A_3 + \cdots + A_nA_1$. Der Kantenweg w'_1 ist dann ein ausgezeichneter offener Kantenweg in $\mathfrak{G}_i$.

Für die Kantenwege $w_2, \cdots, w_s, w'_1, x_1, x_2, \cdots, x_t, y_1, y_2, \cdots, y_r$ gibt es auf S_1 die ausgezeichneten Urbilder von ihren. Wir setzen $x_1 = B_1B_2 + B_2B_3 + \cdots + B_{n-1}B_n$, und wir bezeichnen das ausgezeichnete Urbild von x_1 mit $(v_1^1, v_1^2, \cdots, v_1^a, v_2^a \cdots)$. Der Kantenweg v_1^1 ist von der Gestalt $B'_1B'_2 + B'_2B'_3 + \cdots + B'_{a-1}B'_a$, und der Kantenweg v_1^2 ist von der Gestalt $\overset{\circ}{B}'_aB'_{a+1} + \cdots + B'_{a+b-1}B'_{a+b}$. Einer von den Kantenwege $v_1^a, v_2^a, \cdots$, etwa v_1^a, verbindet die beiden Ecken B'_a und $\overset{\circ}{B}'_a$. Wir nehmen nur solchen Kantenweg v_1^a auf. Die Vereinigungsmenge $v_1^1 + v_1^2 + \cdots + v_1^a + v_1^{a+b} + \cdots$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(w_2)$.

Wenn B_1B_n bezw. B_1B_p bezw. B_pB_n eine in der Bedingung 3 in der Zwischenbehauptung IV erwähnte Hilfskante ist, so gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von B_1B_n bezw. B_1B_p bezw. B_pB_n, das wir mit $\overset{\circ}{B}'_1\overset{\circ}{B}'_n$ bezw. $\overset{\circ}{B}''_1B''_p$ bezw. $B'''_p\overset{\circ}{B}''_n$ bezeichnen. Es gibt auch auf S_1 $[B'_1\overset{\circ}{B}'_1]$, $[B'_n\overset{\circ}{B}'_n]$, $[B'_pB''_p]$, $[B''_pB'''_p]$. Einer von den zu $[B'_n\overset{\circ}{B}'_n]$ gehörigen Kantenwegen verbindet die beiden Ecken B'_n und $\overset{\circ}{B}'_n$, den wir mit u_1^b

bezeichnen. Einer von den zu $[B'_1\overset{\circ}{B}'_1]$ gehörigen Kantenwegen verbindet die beiden Ecken B'_1 und $\overset{\circ}{B}'_1$, den wir mit u_1^a bezeichnen. Die Vereinigungsmenge $\overset{\circ}{B}'_1\overset{\circ}{B}'_n+u_1^a+u_1^b$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(B_1B_n)$. Ebenfalls können wir $\mathfrak{A}(B_1B_p+B_pB_n)$ definieren.

Wenn CB_1 bezw. CB_n eine in der Bedingung 4 erwähnte Hilfskante ist, so gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von CB_1 bezw. CB_n, das wir mit $C'B'_1$ bezw. $C''B'_n$ bezeichnen. Einer von den zu $[C'C'']$ gehörigen Kantenwegen verbindet die beiden Ecken C' und C'', den wir mit x_1^c bezeichnen. Einer von den zu $[B'_1\overset{\circ}{B}'_1]$ gehörigen Kantenwegen verbindet die beiden Ecken B'_1 und $\overset{\circ}{B}'_1$, den wir mit u_1^a bezeichnen. Einer von den zu $[B'_n\overset{\circ}{B}'_n]$ gehörigen Kantenwegen verbindet die beiden Ecken B'_n und $\overset{\circ}{B}'_n$, den wir mit u_1^b bezeichnen. Die Vereinigungsmenge $C'B'_1+u_1^a+x_1^c+u_1^b+C''B'_n$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{A}(B_1C+CB_n)$.

Für die Hilfskante zweiter Art benehmen wir uns ebenfalls.

Es gibt auf S_1 die Kante $B'C'$, so daß das Dreieck ABC in dem zu der Kante $B'C'$ geordneten Schnitt $\mathfrak{P}(BC)$ enthalten ist. Wenn BCA in dem Schnitt $\mathfrak{P}_1(BC)$ in $\mathfrak{G}_t$ enthalten ist, so gibt es auf S_1 das ausgezeichnete Urbild von BC, zu welchem geordneter Schnitt in $\mathfrak{P}_1(BC)$ enthalten ist. Wir können dann dieses ausgezeichnete Urbild als die Kante $B'C'$ wählen.

Es gibt auf S'_1 die Kante $A'_nA'_1(A'_1=A')$, die das ausgezeichnete Urbild von A_nA_1 ist. Es gibt auf S_1 den Kantenweg $\widetilde{B}'_n\widetilde{B}'_{n-1}+\widetilde{B}'_{n-1}\widetilde{B}'_{n-2}+\cdots+\widetilde{B}'_1\widetilde{B}'_0(\widetilde{B}'_n=B',\ \widetilde{B}'_0=A')$, der einen einfachen Bogen bildet und die Ecke C' nicht enthält, und zwar, daß die beiden benachbarten Kanten von $\widetilde{B}'_n\widetilde{B}'_{n-1}+\widetilde{B}'_{n-1}\widetilde{B}'_{n-2}+\cdots+\widetilde{B}'_1\widetilde{B}'_0$ und die beiden benachbarten Kanten von jedem unter $\mathfrak{A}(w_2), \cdots, \mathfrak{A}(w_s), \mathfrak{A}(w'_1), \mathfrak{A}(x_1), \cdots, \mathfrak{A}(x_t), \mathfrak{A}(y_1), \cdots, \mathfrak{A}(y_r)$, $\mathfrak{A}(DE), \cdots, \mathfrak{A}(FG), \cdots$ keineswegs sich kreuzen, wo DE eine Hilfskante und FG eine Hilfskante zweiter Art bedeutet.

Wir verbinden die beiden Ecken A' und B' durch die Kante $A'B'$ und die beiden Ecken A' und C' durch die Kante $A'C'$, so daß $A'B'$ und $A'C'$, außer den Ecken A', B' und C' in der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ enthalten sind. Wir konstruieren die Zelle X'_1 und das Dreieck $A'B'C'$ in der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$, so daß X'_1 als Rand den Kantenweg $A'B'+\widetilde{B}'_n\widetilde{B}'_{n-1}+\widetilde{B}'_{n-1}\widetilde{B}'_{n-2}+\cdots+\widetilde{B}'_1\widetilde{B}'_0$ hat und die Menge $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1-(X'_1+A'B'C')$ mit der Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ homöomorph ist.

Wir bezeichnen die Menge aller in $\mathfrak{A}(w_2)+\cdots+\mathfrak{A}(w_s)+\mathfrak{A}(x_1)+\cdots+\mathfrak{A}(x_t)+\mathfrak{A}(y_1)+\cdots+\mathfrak{A}(y_r)+\Sigma'\mathfrak{A}(DE)+\Sigma''\mathfrak{A}(FG)$ enthaltenen und mit B' inzidenten Kanten mit M. Die Menge M wird durch den Kantenweg $C'B'+\widetilde{B}'_n\widetilde{B}'_{n-1}$ in die beiden Teilmengen M_1 und M_2 zerlegt, so daß M_1 und

M_2 nur die Kanten $B'C'$ und $\widetilde{B'_n B'_{n-1}}$ gemein haben. Wir können ferner den Kantenweg $\widetilde{B'_n B'_{n-1}} + \widetilde{B'_{n-1} B'_{n-2}} + \cdots + \widetilde{B'_1 B'_0}$ derart wählen, daß eine von den beiden M_1 und M_2, etwa M_1, aus nur den beiden Kanten $B'C'$ und $\widetilde{B'_n B'_{n-1}}$ besteht.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, die beiden Dreiecke $A''B''C''$ und $A''B'''C''$ und die beiden Zellen X''_1 und X'''_1 gibt und X''_1 durch den Kantenweg $A''B'' + B''_n B''_{n-1} + \cdots + B''_1 B''_0 (B''_n = B'',\ B''_0 = A'')$ und X'''_1 durch den Kantenweg $A''B''' + B'''_n B'''_{n-1} + \cdots + B'''_1 B'''_0 (B'''_n = B''',\ B'''_0 = A'')$ berandet ist, und daß $S'_1 - (A''B''C'' + A''B'''C'' + X''_1 + X'''_1)$ ebenso wie S_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird.

Wir bilden die Kugel $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 < 1$ auf die Menge $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\} - (X'_1 + A'B'C')$ topologisch ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit T bezeichnen, $T(A''B''C'') = T(A''B'''C'') = A'B'C'$ und $T(X''_1) = T(X'''_1) = X'_1$ ist und die anderen Dreiecke bezw. Zellen auf S'_1 durch T auf die Dreiecke bezw. Zellen auf S_1 topologisch abgebildet werden.

Es ist leicht einzusehen, daß es auf S'_1 das ausgezeichnete Urbild von w_1 gibt.

Wir behandeln nun den Fall

β).[1] Es gilt nicht gleichzeitig, daß $A' = \mathring{A}'$, $B' = \mathring{B}'$ und $C' = \mathring{C}'$ ist. Wir nehmen an, daß $B' = \mathring{B}'$, $C' = \mathring{C}'$ und aber $A' \neq \mathring{A}'$ ist. Es gibt dann auf S_1 die, die beiden Ecken A' und $\mathring{A}'$ verbindende, Kantenwege-gruppe, die wir mit $(v_1^a, v_2^a, \cdots)$ bezeichnen. Einer von $v_1^a, v_2^a, \cdots$, etwa v_1^a, verbindet die beiden Ecken A' und $\mathring{A}'$. Indem wir die Zellen in $\mathfrak{F}_1$ ändern, können wir die Kantenwege $v_1^a, v_2^a, \cdots$ vereinigen. Daher können wir von Anfang an annehmen, daß der Kantenweg v_1^a die, die beiden A' und $\mathring{A}'$ verbindende, Kantenwege-gruppe bildet. Nach der Bedingung 2 in der Zwischenbehauptung IV die benachbarten Kanten von dem Kantenweg $A'B' + B'C' + C'\mathring{A}'$ und die benachbarten Kanten von v_1^a kreuzen nicht sich.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Kantenweg $v_1^a = A'D'_1 + D'_1 D'_2 + D'_2 E'_1 + E'_1 \mathring{A}'$ ist und $T(A'_1 D'_1) = T(\mathring{A}' E'_1)$ und $T(D'_1 D'_2) = T(D'_2 E'_1)$ ist, und daß $A'D'_1$ auf der Zelle Z'_1 und $E'_1 \mathring{A}'$ auf der Zelle Z''_1 inzident ist.

Der Komplex $\mathfrak{M}_1$ wird durch das Dreieck ABC in die beiden Komplexe $\mathfrak{M}'_1$ und $\mathfrak{M}''_1$ zerlegt oder nicht zerlegt. Wir behandeln erstens den Fall, daß $\mathfrak{M}_1$ durch das Dreieck ABC in die beiden Komplexe $\mathfrak{M}'_1$ und $\mathfrak{M}''_1$ zerlegt wird.

---

1) Vgl. S. 76. Zeile. 37.

Die Sphäre S_1 wird durch $A'B'+B'C'+C'\mathring{A}'+v_1^a$ in die beiden Gebiete P_1 und P_2 zerlegt, und jedes von P_1 und P_2 hat als Begrenzung die Menge $A'B'+B'C'+C'\mathring{A}'+v_1^a$. Folglich liegt $D'_1D'_2$ auf dem Rand von einer Zelle Z'_2 und $D'_2E'_1$ liegt auf dem Rand von einer Zelle Z''_2, wo $T_1(Z'_2)=T_1(Z''_2)$ ist.

Wir schneiden $T_1(S_1)$ längs $T_1(A'D'_1+D'_1D'_2+D'_2E'_1+E'_1\mathring{A}')$ ab, und wir nehmen die Zellen $T_1(Z'_1)$ und $T_1(Z'_2)$ fort. Wir nehmen das Innere von Z'_1 bezw. Z''_1 und das Innere von Z'_2 bezw. Z''_2 auf S_1 fort, und wir schneiden S_1 längs v_1^a ab. Wir identifizieren danach sowohl den Rand von Z'_1 und den Rand von Z''_1 als auch den Rand von Z'_2 und den Rand von Z''_2 miteinander. Also bekommen wir aus S_1 die Fläche H_1.

Wir zerlegen die Sphäre $y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$, die wir mit S'_1 bezeichnen, ebenso wie H_1 in Dreiecke und Zellen. Es gibt auf S'_1 die Kanten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$. Durch die Menge $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ wird die Kugel $y_1^2+y_2^2+y_3^2<1$ in die beiden Halbkugeln $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zerlegt. Durch den Kantenweg $A'B'+B'C'+C'A'$ wird die Sphäre S'_1 in die beiden Halbsphären K_1 und K_2 zerlegt. Die Begrenzung von $\mathfrak{P}_1$ besteht aus einer von den beiden K_1 und K_2, etwa K_1, und $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$, und die Begrenzung von $\mathfrak{P}_2$ besteht aus K_2 und $(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$.

Wir zerlegen die Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ das Dreieck $A''B''C''$ gibt und $\{z_1^2+z_2^2+z_3^2=1\}-A''B''C''$ ebenso wie K_1 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird. Ebenfalls zerlegen wir die Sphäre $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$ in Dreiecke und Zellen, so daß es auf $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$ das Dreieck $A'''B'''C'''$ gibt und $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1-A'''B'''C'''$ ebenso wie K_2 in Dreiecke und Zellen zerlegt wird.

Wir bilden die Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$ auf $\mathfrak{P}_1$ topologisch ab, derart daß, wenn wir diese Abbildung mit T bezeichnen, die Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ durch die induzierte Abbildung T topologisch auf $K_1+(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ abgebildet wird und $T(A''B''C'')=(O,\ A'B'+C'A'+C'A')$ ist. Ebenfalls bilden wir die Kugel $u_1^2+u_2^2+u_3^2<1$ auf $\mathfrak{P}_2$ topologisch ab, derart daß, wenn wir diese Abbildung mit T' bezeichnen, die Sphäre $u_1^2+u_2^2+u_3^2<1$ durch T' topologisch auf $K_2+(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ abgebildet wird und $T'(A'''B'''C''')=(O,\ A'B'+B'C'+C'A')$ ist.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß der Rand von Z'_1 aus dem Kantenweg $A'D'_1+D'_1G'_1+G'_1F'_1+F'_1A'$ und der Rand von Z''_1 aus dem Kantenweg $A'_0E'_1+E'_1F'_2+F'_2G'_2+G'_2A'_0$ und der Rand von Z'_2 aus dem Kantenweg $D'_1D'_2+D'_2I'_1+I'_1K'_1+K'_1D'_1$ und der Rand von Z''_2 aus dem Kantenweg $E'_1D'_2+D'_2I'_2+I'_2K'_2+K'_2E'_1$ besteht.

Es gibt auf der Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$ oder auf der Sphäre $u_1^2+u_2^2+u_3^2=1$, etwa auf der Sphäre $z_1^2+z_2^2+z_3^2=1$, das Dreieck $A''B''C''$ und den

Kantenweg $A''F''_1+F''_1G''_1+G''_1D''_1$ bezw. $D''_1K''_1+K''_1I''_1+I''_1D''_2$, so daß $T(A''G''_1)=A'G'_1=A'_0G'_2$ auf H_1 und $T(F''_1G''_1)=F'_1G'_1=F'_2G'_2$, $T(G''_1D''_1)=G'_1D'_1=G'_2E'_1$, $T(D''_1K''_1)=D'_1K'_1=E'_1K'_2$, $T(K''_1I''_1)=K'_1I'_1=K'_2I'_2$, $T(I''_1D''_2)=I'_1D'_1=I'_2D'_2$ ist.

Wir nehmen an, daß $T_1(A'D'_1)$ mit der Kante AB oder AC, etwa mit AB, übereinstimmt. Wir konstruieren dann eine Zelle X'_1 in der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$, so daß der Rand von X'_1 aus dem Kantenweg $B''A''+A''F''_1+F''_1G''_1+G''_1B''$ besteht. Wir identifizieren danach die beiden Kanten $G''_1D''_1$ und G''_1B'' innerhalb der Kugel $z_1^2+z_2^2+z_3^2<1$.

Auch wenn $T_1(A'D'_1)$ nicht mit AB übereinstimmt, benehmen wir uns ebenfalls.

Für die Kante $I''_1D''_2$ benehmen wir uns ebenfalls. Für die Kugel $u_1^2+u_2^2+u_3^2<1$ benehmen wir uns ebenfalls.

Wenn auch der Komplex $\mathfrak{M}_1$ durch das Dreieck ABC in die beiden Komplexe nicht zerlegt wird, läuft Diskussion ganz analog.

Wir behandeln nun den

4. *Fall.* Wir haben bereits diesen Fall in der Zwischenbehauptung IV behandelt. Daher lassen wir die ferner Diskussion weg.

4. Schritt. Wie im 3. Schritt gezeigt worden ist, können wir, wenn wir geeignete Zellen $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ aufnehmen und $\mathfrak{G}+Z_1+\cdots+Z_n=\mathfrak{F}$ setzen[1], $\mathfrak{F}$ in E^3 einbetten, so daß die Bedingungen 1—8 für $\mathfrak{G}$ erfüllt sind. $\mathfrak{F}$ muß aber in der Tat mit $\mathfrak{G}$ übereinstimmen. Folglich können wir $\mathfrak{G}$ in E^3 derart einbetten, daß die Bedingungen 1—8 für $\mathfrak{G}$ erfüllt sind.

Wir bezeichnen die Komponenten von $E^3-\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_p$. Jede Komponente $\mathfrak{P}_j (j=1, 2, \cdots, p)$ ist dann homöomorph mit der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$. Wir bezeichnen die topologischen Abbildungen von der Kugel $x_1^2+x_2^2+x_3^2<1$ auf den $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_p$ mit $T_1, T_2, \cdots, T_p$ und die Sphären $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ mit $S_1, S_2, \cdots, S_p$.

ABC sei ein in $\mathfrak{G}$ enthaltenes Dreieck, so gibt es nach der Bedingung 6 die beiden Dreiecke $A'B'C'$ auf S_j und $A''B''C''$ auf S_k, so daß $T_j(A'B'C')=T_k(A''B''C'')=ABC$ ist. Es gibt genau die beiden 3-Simplexe in $\mathfrak{M}$, die mit ABC inzident sind. Diese Simplexe bezeichnen wir mit $ABCD$ und $ABCE$. Eines von den beiden $ABCD$ und $ABCE$, etwa $ABCD$, ist zu $A'B'C'$ geordnet und das andere $ABCE$ ist zu $A''B''C''$ geordnet.

Wir bezeichnen den zu $A'B'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AB)$. Nach der Bedingung 6 ist ABD in $\mathfrak{P}(AB)$ enthalten. Da $\mathfrak{P}(AB)$ ein Schnitt in $\mathfrak{G}$ ist, so besteht $\mathfrak{P}(AB)$ aus den beiden ABC und ABD. Folglich gibt es auf S_j nach der Bedingung 2 ein, mit der Kante $A'B'$ inzidentes, Dreieck

[1] $\mathfrak{G}$ ist der 2-Komplex, der aus allen 0-, 1- und 2-Simplexen von $\mathfrak{M}$ besteht.

$A'B'D'$, und zwar, daß $T_j(A'B'D')=ABD$ ist. Da $\mathfrak{P}(AB)$ zu $A'B'$ geordnet ist und $\mathfrak{P}(AB)$ aus den beiden ABD und ABC besteht, so ist das Simplex $ABDC$ nach der Bedingung 6 zu $A'B'D'$ geordnet.

Wir bezeichnen den zu $A'D'$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}(AD)$. ADC ist in $\mathfrak{P}(AD)$ enthalten. Der Schnitt $\mathfrak{P}(AD)$ besteht aus den beiden ABD und ADC. Folglich gibt es auf S_j nach der Bedingung 2 ein, mit der Kante $A'D'$ inzidentes, Dreieck $A'D'C'_0$, so daß $T_j(A'D'C'_0)=ADC$ ist. Das Simplex $ADCB$ ist nach der Bedingung 6 zu $A'C'_0D'$ geordnet.

Wir bezeichnen den zu $A'C'_0$ geordneten Schnitt mit $\mathfrak{P}_1(AC)$. $\mathfrak{P}_1(AC)$ besteht dann aus den beiden Dreiecken ACD und ACB. Es ist leicht einzusehen, daß der zu $A'C'$ geordnete Schnitt auch aus den beiden Dreiecken ACD und ACB. Da $\mathfrak{P}(AC)$ nicht ausgeartet ist, so müssen die beiden Kanten $A'C'_0$ und $A'C'$ nach der Bedingung 2 übereinstimmen. Daher muß das Dreieck $A'D'C'_0$ mit dem Dreieck $A'D'C'$ übereinstimmen.

Wir bezeichnen den zu der Kante $B'C'$ geordnete Schnitt mit $\mathfrak{P}(BC)$. $\mathfrak{P}(BC)$ besteht dann aus den beiden Dreiecken BCA und BCD. Es gibt daher auf S_j ein, mit der Kante $B'C'$ inzidentes, Dreieck $B'C'D'_0$. Auf ganz analoge Weise mit der obigen können wir leicht einsehen, daß die Kante $B'D'_0$ mit $B'D'$ und die Kante $C'D'_0$ mit $C'D'$ übereinstimmt. Folglich ist die Sphäre S_j in vier Dreiecke $A'B'C'$, $B'C'D'$, $B'D'A'$, $C'D'A'$ zerlegt, und zu allen Dreiecken $A'B'C'$, $B'C'D'$, $B'D'A'$, $C'D'A'$ ist das Simplex $ABCD$ geordnet.

Die Begrenzung von $\mathfrak{P}_j$ besteht aus den Dreiecken $T_j(A'B'C')=ABC$, $T_j(B'C'D')=BCD$, $T_j(B'D'A')=BDA$, $T_j(C'D'A')=CDA$. Die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}_j$ ist daher homöomorph mit dem Simplex $ABCD$. Wir lassen zu $\mathfrak{P}_j$ das Simplex $ABCD$ ordnen.

Alle 3-Simplexe, die in $\mathfrak{M}$ enthalten sind, bezeichnen wir mit $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\cdots$, $\varDelta_p$. Zu jeder von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_p$ ist eines von $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\cdots$, $\varDelta_p$ geordnet, und zu beiden verschiedenen Komponenten $\mathfrak{P}_j$ und $\mathfrak{P}_k$ sind die beiden voneinander verschiedenen Simplexe unter $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\cdots$, $\varDelta_p$ geordnet. Folglich können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\cdots$, $\varDelta_p$ beziehungsweise zu $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\cdots$, $\mathfrak{P}_p$ geordnet sind.

Wir bilden das Simplex $\varDelta_1$ topologisch auf die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}_1$ ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit U_1 bezeichnen und die Seite von $\varDelta_1$ aus den Dreiecken $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_1A_3A_4$ besteht, es $U_1(A_1A_2A_3)=A_1A_2A_3$, $U_1(A_2A_3A_4)=A_2A_3A_4$, $\cdots$ gilt.

Es ist nun leicht einzusehen, daß, wenn $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ nur eine Ecke A_1 gemeinsam haben, $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2$ nur eine Ecke A_1 gemeinsam haben, und daß, wenn $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ das Dreieck $A_1A_2A_3$ gemeinsam haben, $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2$ das Dreieck $A_1A_2A_3$ gemeinsam haben, und daß, wenn $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ nur eine Kante A_1A_2 gemeinsam haben, $\overline{\mathfrak{P}}_1$ und $\overline{\mathfrak{P}}_2$ nur eine Kante A_1A_2 gemeinsam haben.

Wir bilden zweitens das Simplex $\varDelta_2$ topologisch auf die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}_2$ ab, so daß, wenn wir diese Abbildung mit U_2 bezeichnen und die Seite von $\varDelta_2$ aus den Dreiecken $A_5A_6A_7$, $A_6A_7A_8$, $A_5A_7A_8$, $A_5A_6A_7$ besteht, es $U_2(A_5A_6A_7)=A_5A_6A_7$, $U_2(A_6A_7A_8)=A_6A_7A_8$, $\cdots$ gilt und auf jedem sowohl in $\varDelta_1$ als auch in $\varDelta_2$ enthaltenen Punkte a es $U_1(a)=U_2(a)$ gilt.

Diese Verfahren setzen wir fort, so erhalten wir eine topologische Abbidung U von $\mathfrak{M}$ auf den Raum E^3 (∞ einschlagend). W. z. b. w.

Satz II.[1] *Jede 3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, in der jede echte abgeschlossene Menge zusammenziehrbar ist, ist mit der 3-Sphäre homöomorph.*

Satz. III.[2] *Es sei $\mathfrak{M}$ ein 3-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit. Wenn 3-Sphäre S_3 auf $\mathfrak{M}$ stetig mit dem Grad 1 sich abbilden läßt, so ist $\mathfrak{M}$ mit der S_3 homöomorph.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received January 24, 1958)

1) W. Hurewicz. Baiträge zu Topologie der Deformationen (II). Proc. Amsterdam. Vol. 38. 1935. S. 521—528.

2) W. Hurewicz. a. a. O.