NOTES SUR LES DEMIGROUPES TOPOLOGIQUES DES FONCTIONS CONTINUES II

KAICHIRÔ FUJIWARA

0. Pour un espace complètement régulier E, désignons par $\mathfrak{C}(E)$ le demigroupe multiplicatif topologique (muni de la topologie de Pontryagin) des fonctions numériques continues (à valeurs complexes, à valeurs réelles ou bien à valeurs non-négatives) définies sur E. Dans la note précédente[1] nous avons montré que le demigroupe topologique $\mathfrak{C}(E)$ détermine l'espace topologique E.

Supposons qu'il existe un isomorphisme σ entre $\mathfrak{C}(E_1)$ et $\mathfrak{C}(E_2)$. Alors σ induit un homéomorphisme τ entre E_1 et E_2. Nous considérons dans la note présente la relation entre σ et τ.

1. Soit $\mathfrak{C}$ un sous-demigroupe topologique de $\mathfrak{C}(E)$ vérifiant les condition:

1) $\mathfrak{C}$ contient toutes les fonctions constantes,

2) quels que soient le point $x_0 \in E$ et l'ensemble fermé $F \subset E$ qui ne contient pas x_0, il existe une fonction $f \in \mathfrak{C}$ telle que $f(x_0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \in F$,

3) quels que soient le point $x_0 \in E$, l'ensemble compact $K \subset E$ qui ne contient pas x_0 et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \mathfrak{C}$ telle que $f(x_0) = 0$, $|f(x)-1| < \varepsilon$ si $x \in K$ et $|f(x)| \leqq 1$ pour tout $x \in E$, et

4) si une fonction $f \in \mathfrak{C}$ prend la valeur 1 à $x_0 \in E$, quels que soient l'ensemble compact $K \subset E$ et le nombre $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathfrak{C}$ telle que $g(x) = 1$ sur un voisinage du point x_0 et $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ si $x \in K$.

Sous ces condition, les ensembles de la forme $\mathfrak{Z}(x) = \{f \mid f(x) = 0, f \in \mathfrak{C}\}$ peuvent être caractérisés comme les idéaux d'une certaine espèce dans $\mathfrak{C}$[2]. Nous allons caractériser maintenant les ensemble de la forme $\mathfrak{U}(x) = \{f \mid f(x) = 1, f \in \mathfrak{C}\}$ dans la structure de demigroupe topologique.

Lemme 1. *Pour qu'une fonction $f \in \mathfrak{C}$ soit égale à 1 sur un voisinage de x_0, il faut et il suffit qu'il existe $g \in \mathfrak{C} \setminus \mathfrak{Z}(x_0)$ telle que $fg = g$.*

1) Ce *Journal*, Vol. 6, 71—76.

2) Théorème 1 dans la note précédente.

En effet, si $f(x)=1$ sur un voisinage $V(x_0)$ de x_0, on peut trouver g telle que $g(x_0)=1$ et $g(x)=0$ en dehors de $V(x_0)$ en vertu de la condition 2). Alors, $fg=g$ et $g\notin\mathfrak{J}(x_0)$. Réciproquement, $fg=g$ et $g(x_0)\neq 0$ entraînent $x_0\in\{x\mid g(x)\neq 0\}\subset\{x\mid f(x)=1\}$.

Lemme 2. *Pour qu'une fonction* $f\in\mathfrak{C}$ *soit égale à* 1 *au point* x_0, *il faut et il suffit qu'elle soit adhérente à l'ensemble* $\{g\mid g$ est égale à 1 sur un voisinage du point $x_0, g\in\mathfrak{C}\}$.

La suffisance est claire. La nécessité est une conséquence de la condition 4).

D'après ces Lemmes, en se rappelant la caractérisation des $\mathfrak{J}(x)$ déjà obtenue[2], on peut définir la relation « $f(x)=1$ », ainsi que « $f(x)=0$ », intrinsèquement à la structure de demigroupe topologique.

2. Maintenant, pour chaque i, soit $\mathfrak{C}_i$ un sous-demigroupe topologique de $\mathfrak{C}(E_i)$ vérifiant les quatre conditions ci-dessus ($i=1,2$), et supposons qu'il y a un isomorphisme (algébrique ainsi que topologique) σ de $\mathfrak{C}_1$ sur $\mathfrak{C}_2$.

Alors, pour chaque $x\in E_1$, $\sigma\mathfrak{J}(x)$ étant aussi un idéal de la forme $\mathfrak{J}(y)$ pour $y\in E_2$, on peut définir une application $y=\tau x$ bien déterminée par la relation $\sigma\mathfrak{J}(x)=\mathfrak{J}(\tau x)$. τ devient un homéomorphisme de E_1 sur E_2, parce que la correspondance $x\leftrightarrow\mathfrak{J}(x)$ entre E_i et l'espace $\{\mathfrak{J}(x)\mid x\in E_i\}$ muni de la topologie de Jacobson est topologique[3].

D'après la définition de τ, évidemment on a

$$f(x)=0 \text{ si et seulement si } \sigma f(\tau x)=0$$

et

$$f(x)=1 \text{ si et seulement si } \sigma f(\tau x)=1.$$

Et puis on a aussi

$$f(x)=a \text{ entraîne } \sigma f(\tau x)=\sigma a(\tau x).$$

En effet, $f(x)=a\neq 0$ entraîne $a^{-1}f(x)=1$. Donc $\sigma(a^{-1}f)(\tau x)=1$. En considérant a comme une fonction constante, on a $(\sigma a(\tau x))^{-1}f(\tau x)=1$ d'où $\sigma f(\tau x)=\sigma a(\tau x)$.

De plus,

$$\sigma(-1)=-1 \text{ pourvu que } -1\in\mathfrak{C}(E_1)$$

parce que la fonction constante -1 peut être caractérisée par la relation

3) Théorème 2 dans la note précédente.

$f^2 = 1 \neq f$. De même

$$\sigma(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{-1} \quad \text{pourvu que } \sqrt{-1} \in \mathfrak{C}(E_1).$$

3. Un point $x \in E$ soit fixé et considérons la valeur de la fonction σa au point τx comme une fonction de $a : \varphi_x(a) = \sigma a(\tau x)$.

Considérons, d'abord, le cas où $\mathfrak{C}(E_1)$ est le demigroupe des fonctions *à valeurs complexes*[4]. Alors, on peut voir sans peine que la fonction φ_x est un automorphisme du demigroupe topologique des nombres complexes. Donc nous pouvons l'exprimer

$$\varphi_x(a) = |\, a \,|^{p(x)} \exp(\varepsilon(x)\sqrt{-1} \arg a)$$

où $p(x) > 0$ et $\varepsilon(x) = \pm 1$. Lorsq'on fixe a, φ_x est continue par rapport à x et puis $p(x)$ l'est aussi. En outre $\varepsilon(x)$ est $+1$ ou -1 suivant $\sigma(\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}$ ou $-\sqrt{-1}$ et indépendante de x.

De la même manière, dans le cas où $\mathfrak{C}(E_1)$ ne contient les fonctions qu'*à valeurs réelles* (*à valeurs non-négatives* resp.) on a

$$\varphi_x(a) = |\, a \,|^{p(x)} \operatorname{sgn} a$$
$$(\varphi_x(a) = a^{p(x)} \quad \text{resp.}).$$

Mais cette formule peut être considérée comme le cas spécial où $\arg a = \pi$ ou 0 ($\arg a = 0$ resp.) dans la formule susdite.

Ainsi on a le

Théorème. *Pour chaque i, soit $\mathfrak{C}_i$ un demigroupe multiplicatif topologique muni de la topologie de Pontryagin de fonctions numériques continues (soit à valeurs complexes, soit à valeurs réelles ou bien soit à valeurs non-négatives) définies sur un espace complètement régurier E_i vérifiant les quatre conditions dans* § **1** ($i = 1, 2$). *S'il existe un isomorphisme σ de $\mathfrak{C}_1$ sur $\mathfrak{C}_2$, il est de la forme ;*

$$\sigma f(\tau x) = |\, f(x) \,|^{p(x)} \exp(\sqrt{-1} \arg f(x)) \qquad x \in E_1,\ f \in \mathfrak{C}_1$$

ou

$$\sigma f(\tau x) = |\, f(x) \,|^{p(x)} \exp(-\sqrt{-1} \arg f(x)) \qquad x \in E_1,\ f \in \mathfrak{C}_1,$$

où p est uue fonction continue et strictement positive définie sur E_1 et τ est un homéomorphisme de E_1 sur E_2.

Il va sans dire que, réciproquement, étant donnés p et τ, l'application σ définie par cette formule donne un isomorphisme entre $\mathfrak{C}(E_1)$ et $\mathfrak{C}(E_2)$.

---

4) Dans ce cas, $\mathfrak{C}(E_2)$ l'est aussi.

4. Nous examinons ici les conditions auxquelles nous avons assujetti $\mathfrak{C}$ dans § **1.**

Si $\mathfrak{C}$ forme un anneau, la condition 3′) suivante entraîne la condition 4).

3′) quels que soient l'ensemble fermé $F \subset E$, l'ensemble compact $K \subset E$ disjoint de F et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \mathfrak{C}$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in F$, $| f(x) - 1 | < \varepsilon$ si $x \in K$ et $| f(x) | \leqq 1$ pour tout $x \in E$.

En effet, supposons $f(x_0) = 1$. Étant donnés $\varepsilon > 0$ et K compact, posons $F = \left\{ x \,\middle|\, |f(x) - 1| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$, $K' = K \cap \left\{ x \,\middle|\, |f(x) - 1| \geqq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$ et $M = \underset{x \in K'}{\mathrm{Max}} \, | f(x) - 1 |$ et choisissons une fonction $e \in \mathfrak{C}$ telle que $e(x) = 0$ si $x \in F$, $| e(x) - 1 | < \frac{\varepsilon}{M}$ si $x \in K'$ et $| e(x) | \leqq 1$ pour tout $x \in E$. Soit $g = (f-1)e+1$. Alors, évidemment $g(x) = 1$ si $x \in F$, et donc g est égale à 1 sur le voisinage $\left\{ x \,\middle|\, |f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \right\}$ de x_0. Comme $f(x) - g(x) = (f(x) - 1)(1 - e(x))$, $| f(x) - g(x) | < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ si $x \in K'$ et $| f(x) - g(x) | < \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 = \varepsilon$ si $x \in K \setminus K'$. Ainsi g remplit la demande de la condition 4).

En particulier, $\mathfrak{C}(E)$ lui-même satisfait aux conditions 1), 2) et 3′). Le sous-demigroupe des fonctions bornées et celui des fonctions différentiables (naturellement pourvu que E soit une variété différentiable) en sont les autres exemples.

5. En général, la détermination des homomorphismes de $\mathfrak{C}(E_1)$ dans $\mathfrak{C}(E_2)$ est plus difficile. Nous considérons ici un cas extrêmement spécial.

Soient E compact et $\mathfrak{C}(E)$ le demigroupe des fonctions continues non-négatives. Soit σ un homomorphisme continu de $\mathfrak{C}(E)$ sur le demigroupe R_+ des nombres non-négatives.

Si on définit $\bar{\sigma} f = \log \sigma(\exp f)$, on obtient une fonctionnelle linéaire $\bar{\sigma}$ sur les fonctions continues à valeurs réelles (non-négatives ou non). Alors, d'après un théorème bien connu de Riesz et Markov, on peut construire une mésure μ sur E telle que $\bar{\sigma} f = \int_E f(x) d\mu$ ou $\sigma(\exp f) = \exp \left(\int_E f(x) d\mu \right)$. Donc quels que soient le nombre naturel n et la fonction $f \in \mathfrak{C}(E)$, on a $\sigma(\mathrm{Max}\,(f, \frac{1}{n})) = \exp \left(\int_E \log \mathrm{Max}\,(f(x), \frac{1}{n}) d\mu \right)$. Ainsi nous avons la formule :

$$\sigma f = \lim_{n\to\infty} \exp \left(\int_E \log \operatorname{Max} \left(f(x), \frac{1}{n}\right) d\mu\right).$$

On peut l'exprimer aussi comme suit :

$$\begin{cases} \sigma f = \exp \left(\int_{E \setminus Z(f)} \log f(x) \, d\mu\right) & \text{si } \mu(Z(f)) = 0 \\ \sigma f = 0 & \text{si } \mu(Z(f)) \neq 0, \end{cases}$$

$Z(f)$ étant l'ensemble $\{x \mid f(x) = 0\}$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received December 9, 1957)