SUR LA FACTEUR-REPRESENTATION D'UN GROUPE DE LIE RESOLUBLE DE TYPE (E)

OSAMU TAKENOUCHI

Un des problèmes centrals de la théorie de représentation unitaire sera ceci : déterminer la classe de groupe qui ne possède pas autre facteur-représentation que de type (I). (Pour la notion de facteur-représentation et de son type voir les premières lignes du paragraphe 1.) C'a été démontré par M. Harish-Chandra[1] que les groupes de Lie semi-simples en font partie, mais sauf cela on ne savait jusqu'à maintenant aucune autre exposition d'une caractère générale.[*] Je crois que c'est un fait bien connu, et l'auteur l'a une fois montré, que les groupes nilpotents aussi en font partie. Mais si l'on essaie d'étendre ce résultat aux groupes résolubles, on se heurte à une difficulté. En effet comme M. Mautner a annoncé[2], le groupe résoluble ne lui sera tout contenu.

Récemment, MM. Dixmier et Saito ont fait études sur une famille de groupes de Lie résolubles contenant les groupes nilpotents que nous appellerons avec M. Saito les groupes de type (E)[3]. (Leur définition et leurs premières propriétés seront citées dans le paragraphe 2.) C'est pour le groupe de ce type que nous voulons donner la réponse dans ce qui suit. En fait, nous montrons que la facteur-représentation d'un groupe de ce type est toujours de type (I).

Le théorème du paragraphe 1 est l'outil essentiel de notre recherche, et après avoir préparé quelques résultats concernant du sous-groupe, nous établissons dans le paragraphe 5 le résultat mentionné ci-dessus.

Notation. — Etant donnée une représentation unitaire $g \rightarrow U_g$ d'un groupe localement compact sur un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$, on désigne

---

1) Voir
Harish-Chandra, *Representation of a semi-simple Lie group on a Banach space. I.*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *tom.* 75, 1953, *p.* 185 *à* 243. Spécialement, p. 230.

2) Voir
F. I. Mautner, *Unitary representations of locally compact groups II*, *Annals of Mathematics*, *tom.* 32, 1950, *p.* 528 *à* 556. Spécialment sa Introduction.

3) Voir
J. Dixmier, *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, *Bull. Soc. math. France*, 85, 1957, *p.* 113 *à* 121.

M. Saitô, *Sur certains groupes de Lie résolubles*, *Scientific Papers of the College of General Education, University of Tokyo*, *tom.* 7, 1957, *p.* 1 *à* 11.

(*) Après avoir présenté ce mémoire, M. Dixmier m'a fait connaitre qu'il a montré que les groupes algébriques aussi en font partie.

toujours par $\boldsymbol{M}$ l'algèbre d'opérateurs sur $\boldsymbol{H}$ engendrée par tous les $U_g(g \in G)$, et par $\boldsymbol{M}'$ son commutateur.

Le groupe de caractères d'un groupe abélien H sera noté par $\hat{H}$, son élément par $\hat{h}, \cdots$, la valeur de $\hat{h}$ tenue sur un élément $h \in H$ par $\langle h, \hat{h} \rangle$. Si un groupe abélien H est contenu dans un groupe G comme un sous-groupe distingué, on désigne par $T_g\hat{h}$ (pour $g \in G$, $\hat{h} \in \hat{H}$) l'élément de $\hat{H}$ qui satisfait à

$$\langle h, T_g\hat{h} \rangle = \langle ghg^{-1}, \hat{h} \rangle$$

pour un arbitraire $h \in H$.

Quand on considère les groupes de Lie G, H, C, $\cdots$, les algèbres de Lie correspondantes seront notées par les lettres petites allemandes correspondantes, à savoir $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{c}$, $\cdots$ respectivement.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et soit $X \to \operatorname{ad} X$ sa représentation adjointe. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, $\operatorname{ad} X$ définit une transformation linéaire sur $\mathfrak{h}$ que nous dénoterons par $\operatorname{ad} X$ aussi.

L'élément neutre d'un groupe sera noté toujours par 1, l'opérateur unité sur un espace de Hilbert aussi par 1.

1. — Soit G un groupe localement compact. Une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$

$$g \to U_g$$

est dite une *facteur-représentation*, si l'algèbre d'opérateurs $\boldsymbol{M}$ est un facteur au sens de Murray et von Neumann. Le type de $\boldsymbol{M}$ s'appelle aussi le *type* de cette facteur-représentation.

Soit H un sous-groupe distingué abélien de G, et soit $\hat{h}$ une caractère de H. Nous appelons l'ensemble de transformés de $\hat{h}$ par $T_g(g \in G)$ l'orbite de $\hat{h}$. Un ensemble dans $\hat{H}$ qui est l'orbite d'un de ses éléments est appelé simplement une orbite. S'il existe une famille dénombrable $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2, \cdots$ d'ensembles boreliens constitués par orbites telle qu'une orbite arbitraire est toujours représentée par l'intersection de sa partie convenable, nous disons avec Mackey que *H est plongé dans G régulièrement*, ou les *orbites dans $\hat{H}$ sont régulières*[4].

Théorème. — *Soit G un groupe localement compact séparable, et soit H son sous-groupe distingué abélien. Supposons que H soit plongé dans G régulièrement au sens de Mackey.*

---

[4] Voir
G. W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. tom.* 35, 1949, *p.* 537 *à* 544.

Considérons une facteur-représentation de G par les opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}$:

$$g \to U_g.$$

Alors il existe une caractère $\hat{h}_0$ de H et cette représentation est équivalente à la représentation dė G induite[5] *d'une facteur-représentation du sous-groupe G_0 défini par*

$$G_0 = \{g \; ; \; < ghg^{-1}, \; \hat{h}_0 > \; = \; < h, \; \hat{h}_0 > \; pour \; tout \; h \in H\}.$$

De plus les types de ces deux facteur-représentations sont les mêmes.

Démonstration. Nous réduirons notre problème à ce que Mackey a montré.

La représentation $g \to U_g$ définit sur H sa représentation sur $\boldsymbol{H}$. Donc, il existe une mesure spectrale $E(\hat{M})$ sur $\hat{H}$, et tous les $U_h(h \in H)$ se représentent comme

$$U_h = \int < h, \; \hat{h} > dE(\hat{h}).$$

On notera ici que ces opérateurs $E(\hat{M})$ sont contenus dans le facteur $\boldsymbol{M}$. En égalant

$$U_g U_h U_g^{-1} = \int < h, \; \hat{h} > d \; U_g E(\hat{h}) U_g^{-1}$$

et

$$\begin{aligned} U_{ghg^{-1}} &= \int < ghg^{-1}, \; \hat{h} > dE(\hat{h}) \\ &= \int < h, \; T_g \hat{h} > dE(\hat{h}) \\ &= \int < h, \; \hat{h} > dE(T_g^{-1}\hat{h}), \end{aligned}$$

nous avons

$$U_g E(\hat{M}) U_g^{-1} = E(T_g^{-1}\hat{M}).$$

Un $E(\hat{M})$ qui satisfait à $E(T_g^{-1}\hat{M}) = E(\hat{M})$ pour tout $g \in G$ satisfait donc à $U_g E(\hat{M}) U_g^{-1} = E(\hat{M})$ pour tout $g \in G$. Ou en autre terme $E(\hat{M}) \in \boldsymbol{M} \cap \boldsymbol{M}' = (\alpha 1)$. On en déduit que $E(\hat{M}) = 0$ ou 1, ce qui revient à dire que l'espace $\hat{H}$ est ergodique sous le groupe de transformations $\{T_g \; ; \; g \in G\}$ par rapport à la mesure spectrale $E(\hat{M})$.

5) L'auteur suppose qu'on sait le contenu de l'article de Mackey cité à 4).

De l'hypothèse que H est plongé régulièrement dans G, on voit grâce à Mackey que $E(\hat{M})$ n'a de valeur que sur une seule orbite dans $\hat{H}$. En choisissant un $\hat{h}_0$ sur cette orbite, et en posant G_0 comme dans l'énoncé du théorème, la théorie de Mackey enseigne que cette représentation de G est induite d'une représentation de G_0

$$g \to V_g$$

sur un espace de Hilbert $\boldsymbol{H}_1$. Désignant par N la plus petite algèbre d'opérateur sur $\boldsymbol{H}$ contenant $V_g(g \in G_0)$, $\boldsymbol{M}'$ et N' sont isomorphes selon sa théorie. Par suite $\boldsymbol{M}$ et N sont des facteurs de même type.

2. — Un groupe de Lie connexe G est dit *de type* (E), si pour tout élément g de G il existe un élément X de $\mathfrak{g}$ tel que $g = \exp X$. Un tel groupe est étudié par Dixmier et Saito[6]. On leur doit les résultats suivants.

Soit G un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E).

(1) Sous-groupes connexes de G et groupes quotients de G par sous-groupes distingés connexes sont tous de type (E).

(2) Le centre de G est connexe.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie G, et soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ sa complexification. $\tilde{\mathfrak{g}}$ a une base $X_1, X_2, \cdots, X_n$, ayant la propriété

$$[\tilde{X}, \tilde{X}_k] \equiv \varphi_k(\tilde{X})\tilde{X}_k \qquad \text{mod } \tilde{X}_{k+1}, \cdots, \tilde{X}_n.$$

$\varphi_1(\tilde{X}), \cdots, \varphi_n(\tilde{X})$ sont les formes linéaires sur $\tilde{\mathfrak{g}}$ que Dixmier a appelées les racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soient $\varphi_1(X), \cdots, \varphi_n(X)$ ses restrictions à G. Alors

$$\text{(3)} \qquad \varphi_k(X) = \psi_k(X)\,(1 + i\alpha_k) \qquad (X \in \mathfrak{g},\ k = 1, 2, \cdots, n)$$

où $\psi_k(X)$ sont les formes linéaires à valeur réelle sur $\mathfrak{g}$, et α_k sont nombres réels zéros ou non.

Conformément à ces racines, $\mathfrak{g}$ possède une suite de composition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_r = (0),$$

telle que $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}$ est ou bien à 1 dimension ou bien à 2 dimension. Si $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} = 1$, en choisissant $X_j \in \mathfrak{g}_j, \ \notin \mathfrak{g}_{j+1}$, nous avons

$$[X, X_j] \equiv \psi_k(X)X_j \qquad \text{mod } \mathfrak{g}_{j+1}$$

pour certain k où $\alpha_k = 0$. Si $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} = 2$, en choisissant X_j, X_j' $\in \mathfrak{g}_j, \ \notin \mathfrak{g}_{1+j}$ suitablement, nous avons

6) Voir les articles cités à 3)

$$[X,\ X_j] \equiv \psi_k(X)\,(X_j - \alpha_k X_j') \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}_{j+1}$$
$$[X,\ X_j'] \equiv \psi_k(X)\,(\alpha_k X_j + X_j') \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}_{j+1}$$

pour certain k où $\psi_k(X) \not\equiv 0$, $\alpha_k \neq 0$.

3. — G soit un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E), et C soit son centre. La dimension de C soit d (peut-être $= 0$).

S'il n'existe aucun sous-groupe distingué abélien à dimension $d+1$ contenant C, alors il existe un sous-groupe distingué abélien à dimension $d+2$.

En fait, G/C étant aussi un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E), nous allons appliquer à ce groupe ce que nous venons de voir. Soient $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de G, C, G/C respectivment. Bien entendu $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. $\mathfrak{g}'$ a au moins un idéal abélien à dimension 1 ou 2. S'il existait un idéal à 1 dimension engendré par A mod $\mathfrak{c}$, alors la sous-algèbre engendrée par A et $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}$ serait abélienne et formerait un idéal à dimension d + 1, ce qui est absurde par hypothèse.

Donc l'idéal non trival de $\mathfrak{g}'$ de dimension la moindre possible est celui de 2 dimension. Prenons un tel idéal $\mathfrak{h}'$ engendré par A, A' mod $\mathfrak{c}$ ayant les propriétés :

$$[X,\ A] \equiv \psi(X)\,(A - \alpha A') \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{c}$$
$$[X,\ A'] \equiv \psi(X)\,(\alpha A + A') \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{c}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, où $\psi(X) \not\equiv 0$, $\alpha \neq 0$. Comme nous avons

$$\begin{aligned}[X,\ [A,\ A']] &= [[X,\ A],\ A'] + [A,\ [X,\ A']] \\ &= \psi(X)\,[A - \alpha A',\ A'] + \psi(X)[A,\ \alpha A + A'] \\ &= 2\psi(X)\,[A,\ A']\end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, nous avons nécessairement $[A,\ A'] = 0$, sinon il existerait un idéal à $d+1$ dimension. Par conséquent la sousalgèbre engendrée par A, A' et $\mathfrak{c}$ dans $\mathfrak{g}$ est abélienne et forme un idéal, et c'est ce que nous voulons démontrer.

4. — G soit un groupe de Lie résoluble simplement connexe de type (E), et supposons que son centre C est au plus à 1 dimension. H soit un sous-groupe distingué abélien connexe contenant C proprement et de dimension la moindre possible. Alors *H est plongé dans G régulèrement au sens de Mackey.*

En premier, comme H est isomorphe au groupe vectoriel, une caractère $\hat{h}$ de H est représentée, en choisissant suitablement une forme linéaire u sur $\mathfrak{h}$, de la manière suivante :

$$< \exp Z,\ \hat{h} > = \exp 2\pi i < Z,\ u > \quad (Z \in \mathfrak{h}).$$

Nous identifions par cette correspondance $\hat{H}$ et $\mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{h}^*$ étant l'espace linéaire dual de $\mathfrak{h}$. Alors si $g = \exp X$, $T_g\hat{h}$ correspond à $\exp(\mathrm{ad}^*X)u$, où on désigne par ad* l'application duale à ad.

Discutons maintenant notre proposition en partagéant à quatre cas.

(1) $C = (1)$, $\dim H = 1$.

Soit $\mathfrak{h}$ engendrée par A. Alors nous avons

$$[X,\ A] = \psi(X)\,A.$$

Par conséquent

$$\exp(\mathrm{ad}^*X)u = \exp\psi(X)\cdot u.$$

L'orbite dans H est ou bien un seul point, ou bien une demi-droite. Dans ce cas notre assertion est claire.

(2) $C = (1)$, $\dim H = 2$.

Soit $\mathfrak{h}$ engendrée par A, A'. En choisissant ces éléments convenablement nous avons

$$[X,\ A] = \psi(X)\,(A - \alpha A')$$
$$[X,\ A'] = \psi(X)\,(\alpha A + A')$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Prenons la base u_1, u_2 de $\mathfrak{h}^*$ duale à A, A'. Alors $\xi u_1 + \eta u_2 \in \mathfrak{h}^*$ est transformé à $\xi' u_1 + \eta' u_2$ par $T_g = \exp(\mathrm{ad}^*X)$ ($g = \exp X$), où

$$\xi' = \exp\psi(X)\,[\xi\cos\alpha\psi(X) - \eta\sin\alpha\psi(X)]$$
$$\eta' = \exp\psi(X)\,[\xi\sin\alpha\psi(X) + \eta\cos\alpha\psi(X)].$$

L'orbite dans $\hat{H}$ est ou bien un seul point, ou bien une spirale. On verrait sans difficulté que ces orbites sont régulières dans $\hat{H}$.

(3) $\dim C = 1$, $\dim H = 2$.

Soit B une base de $\mathfrak{c}$ et soit A une base de $\mathfrak{h}$ mod $\mathfrak{c}$, et choisissons la base u_1, u_2 de $\mathfrak{h}^*$ duale à A, B. Nous avons

$$[X,\ A] = \psi(X)A + \lambda(X)B$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, où $\lambda(X)$ est une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Nous divisions le cas.

(i) $\psi(X) \equiv 0$.

Dans ce cas la transformation $T_g = \exp(\mathrm{ad}^*X)$ $(g = \exp X)$: $\xi u_1 + \eta u_2 \to \xi' u_1 + \eta' u_2$ obéit à la formule

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + \lambda(x)\eta \\ \eta' &= \eta. \end{aligned}$$

L'orbite dans $\hat{H}$ est ou bien un seul point, ou bien une droite. On voit aussitôt que ces orbites sont régulières dans $\hat{H}$.

(ii) $\psi(X) \not\equiv 0$, $\lambda(X) = \gamma\psi(X)$, γ : const.

Si l'on pose $A' = A + \gamma B$, A$'$ est aussi une base de $\mathfrak{h}$ mod $\mathfrak{c}$ et

$$[X, A'] = [X, A] = \psi(X)(A + \gamma B) = \psi(X)A'.$$

Donc nons pouvons supposer que $\lambda(X) \equiv 0$ dès le début. Alors dans ce cas

$$\begin{aligned} \xi' &= \exp\ \psi(X) \cdot \xi \\ \eta' &= \eta. \end{aligned}$$

L'orbite dans $\hat{H}$ est ou bien un seul point, ou bien une demi-droite. On voit aussitôt que ces orbites sont régulières dans $\hat{H}$.

(iii) $\psi(X)$ et $\lambda(X)$ sont linéairement indépendantes.

Dans ce cas, nous pouvons prendre deux éléments X_1, X_2 satisfaisant à

$$\begin{aligned} \psi(X_1) &= 1, & \lambda(X_1) &= 0, \\ \psi(X_2) &= 0, & \lambda(X_2) &= 1. \end{aligned}$$

$\xi u_1 + \eta u_2$ est transformé par $\exp(\mathrm{ad}^*tX_1)$ $(-\infty < t < \infty)$ à $\xi' u_1 + \eta' u_2$ où

$$\begin{aligned} \xi' &= e^t \cdot \xi \\ \eta' &= \eta \end{aligned}$$

et par $\exp(\mathrm{ad}^*tX_2)$ $(-\infty < t < \infty)$

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + t\eta \\ \eta' &= \eta. \end{aligned}$$

Donc orbite dans $\hat{H}$ est ou bien un seul point, ou bien une demi-droite, ou bien une droite. On voit aussitôt que ces orbites sont régulières dans $\hat{H}$.

(4) $\dim C = 1$, $\dim H = 3$.

Soit B une base de $\mathfrak{c}$, et soit A, A' une base de $\mathfrak{h}$ mod $\mathfrak{c}$, et choisissons la base u_1, u_2, u_3 de $\mathfrak{h}^*$ duale à A, A', B. En choisissant convenablment A, A', nous avons

$$[X, A] = \psi(X)(A - \alpha A') + \lambda(X)B$$
$$[X, A'] = \psi(X)(\alpha A + A') + \mu(X)B$$

pour tour tout $X \in \mathfrak{g}$, où $\psi(X) \not\equiv 0$, $\alpha \neq 0$, et $\lambda(X)$, $\mu(X)$ sont certaines formes linéaires. Comme nous avons vu dans le cas (3, ii), s'il est nécessaire, en changeant A, A', nous avons trois cas à considérer.

(i) $\lambda(X) \equiv 0, \qquad \mu(X) \equiv 0.$

L'élément $\xi u_1 + \eta u_2 + \zeta u_3$ se transforme à $\xi' u_1 + \eta' u_2 + \zeta' u_3$ par $T_g = \exp(\mathrm{ad}^* X)$ ($g = \exp X$), où ξ', η' satisfait à la même formule donnée dans le cas (2) et $\zeta' = \zeta$. De là c'est immédiat que orbites sont ou bien seuls points, ou bien spirales, et qu'elles sont régulières dans $\hat{H}$.

(ii) $\psi(X)$, $\lambda(X)$, $\mu(X)$ sont linéairement indépendantes.

Dans ce cas on peut prendre trois éléments X_1, X_2, X_3 satisfaisant à

$$\begin{aligned} &\psi(X_1) = 1, \quad &&\lambda(X_1) = 0, \quad &&\mu(X_1) = 0, \\ &\psi(X_2) = 0, &&\lambda(X_2) = 1, &&\mu(X_2) = 0, \\ &\psi(X_3) = 0, &&\lambda(X_3) = 0, &&\mu(X_3) = 1. \end{aligned}$$

$\xi u_1 + \eta u_2 + \zeta u_3$ est transformé par $\exp(\mathrm{ad}^* t X_1)$ $(-\infty < t < \infty)$ à $\xi' u_1 + \eta' u_2 + \zeta' u_3$, où

$$\begin{aligned} \xi' &= e^t(\xi \cos \alpha t - \eta \sin \alpha t) \\ \eta' &= e^t(\xi \sin \alpha t + \eta \cos \alpha t) \\ \zeta' &= \zeta, \end{aligned}$$

par $\exp(\mathrm{ad}^* t X_2)$ $(-\infty < t < \infty)$

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + t\zeta \\ \eta' &= \eta \\ \zeta' &= \zeta, \end{aligned}$$

par $\exp(\mathrm{ad}^* t X_3)$ $(-\infty < t < \infty)$

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi \\ \eta' &= \eta + t\zeta \\ \zeta' &= \zeta. \end{aligned}$$

Par conséquent, orbite est ou bien un seul point (si $\xi = \eta = \zeta = 0$), ou bien une spirale (si $|\xi| + |\eta| \neq 0$, $\zeta = 0$), ou bien un plan (si $\zeta \neq 0$). On verrait sans peine que ces orbites sont régulières dans $\hat{H}$.

(iii) $\psi(X)$, $\lambda(X)$ sont linéairement indépendantes, et $\mu(X) = \gamma\lambda(X)$, γ : const.

Nous montrons que ce cas est exclu.

En premier nouvons admettre que $\gamma = 0$. Sinon, en effet, soit à nouveau $A_0 = A + \gamma A'$, $A_0' = -\gamma A + A'$. Alors

$$[X, A_0] = \psi(X)\,(A_0 - \alpha A_0') + (1+\gamma^2)\,\lambda(X)B$$
$$[X, A_0'] = \psi(X)\,(\alpha A_0 + A_0').$$

Donc, nous supposons $\gamma = 0$ dès le début.

On peut choisir deux éléments X_1, X_2 satisfaisant à

$$\psi(X_1) = 1, \quad \lambda(X_1) = 0,$$
$$\psi(X_2) = 0, \quad \lambda(X_2) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} [X_1, A] &= A - \alpha A' \\ [X_1, A'] &= \alpha A + A' \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} [X_2, A] &= B \\ [X_2, A'] &= 0. \end{aligned}$$

Calculons $[X_2, [X_1, A']]$. En premier

$$[X_2, [X_1, A']] = [X_2, \alpha A + A'] = \alpha B.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}[X_2, [X_1, A']] &= [[X_2, X_1], A'] + [X_1, [X_2, A']] \\ &= [[X_2, X_1], A'].\end{aligned}$$

Ce dernier membre ne devenant jamais à un multiple de B, nous obtenons une contradiction.

(iii') $\psi(X)$, $\mu(X)$ sont linéairemet indépendantes, et $\lambda(X) = \gamma\mu(X)$, γ : const.

Ce cas est aussi exclu comme le cas précédent.

5. — **Théorème.** *Toute facteur-représentation d'un groupe de Lie résoluble connexe de type* (E) *est de type* (I).

Si elle est irréductible, elle est obtenue de proche en proche d'une caractère du groupe additif de nombers réels par deux procédés suivants :

1° *formation d'une représentation induite d'une représentation d'un sous-groupe.*

2° *extension triviale d'une représentation, à savoir extension d'une représentation de groupe $G' = G/H$ à la représentation de G en convenant que l'élément de H est toujours représenté par l'opérateur unité.*

Démostration. Nous pouvons supposer que notre groupe G est simplement connexe. Nous raisonnons par récurrence en supposant que pour un groupe de la dimension moindre que celle de G le théorème soit vrai. Le cas où G est de dimension la moindre possible est bien entendu celui où G est le groupe additif de nombres réels, et dans ce cas c'est bien connu que notre théorème est vrai.

Soit

$$g \to U_g$$

la facteur-représentation donnée. Soit C le centre de G. Si $h \in C$, U_h est contenu dans le centre de M, donc est un multiple de l'opérateur unité. Aussi existe-t-il une caractère $\hat{h}$ de C, et on a

$$U_h = \langle h, \hat{h} \rangle 1 \qquad (h \in C).$$

Soit D le composant connexe contenant 1 du sous-groupe $\{h ; \langle h, \hat{h} \rangle = 1\}$. Alors notre représentation n'est autre que l'extension triviale d'une représentation de G/D. Si la dimension de G/D est moindre que celle de G, on sait par l'hypothèse de récurrence que notre théorème est vrai. Dans le cas contraire, dim $C = 0$ ou 1, et nous pouvons utiliser ce qu'on vient de voir dans les paragraphes précédents.

Soit H le sous-groupe distingué abélien de G considéré dans le paragraphe 4, dont l'existence est garantie dans le paragraphe 3. H étant plongé dans G régulièrement, nous voyons du théorème du paragraphe 1 qu'il existe une caractère $\hat{h}_0$ de H et la représentation U_g est équivalente à la représentation induite d'une facteur-représentation du sous-groupe

$$G_0 = \{g \; ; \; \langle ghg^{-1}, \hat{h}_0 \rangle = \langle h, \hat{h}_0 \rangle \text{ pour tout } h \in H\}.$$

Ce sous-groupe est connexe. On le verrifiera aisément en examinant chaque cas considéré dans le paragraphe précédent.

Si dim $G_0 <$ dim G, on sait par l'hypothèse de récurrence que notre thèorème est vrai.

Si $G_0 = G$, l'orbite de $\hat{h}_0$ est constituée par $\hat{h}_0$ seule. En examinant chaque cas considéré dans le paragraphe précédent, on sait que la condition que l'orbite consiste d'un seul point est obtenue en posant quelques-unes des coordonnées relativement à une base de $\hat{H}$ égales à zéros. Conséquemment le composant connexe H_0 contenant 1 du sous-groupe $\{h \; ; h \in H, \; \langle h, \hat{h}_0 \rangle = 1\}$ est de dimension au moins une et est un sous-groupe distingué de G. D'autant que la mesure spectrale sur $\hat{H}$ obtenue de la représentation $h \to U_h$ de H n'a de valeure que sur $\hat{h}_0$(voir ce qui est exposé dans la démonstration du théorème du paragraphe 1),

$$U_h = \langle h, \hat{h}_0 \rangle 1 \qquad (h \in H),$$

et par suite l'élément de H_0 corresponde à l'opérateur unité sous la représentation U_g. Ainsi nous voyons que notre représentation n'est autre que l'exension triviale d'une representation de G/H_0 dont la dimension est moindre que celle de G, et donc notre théorème est vrai dans ce cas aussi grâce à l'hypothèse de récurrence.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received November 11, 1957*)