

NOTES SUR LES DEMIGROUPES TOPOLOGIQUES DES FONCTIONS CONTINUES I

KAICHIRO FUJIWARA

0. Le but de ces Notes est à considérer les relations entre la structure topologique d'un espace complètement régulier et la structure algébrique du demigroupe multiplicatif topologique des fonctions numériques continues définies sur cet espace. Pour les espaces compacts, ces relations ont été clarifiées par A. N. Milgram¹⁾ et B. Yood²⁾. D'autre part, J. Nagata³⁾ a montré que la topologie d'un espace quelconque complètement régulier est bien déterminée par l'anneau topologique des fonctions numériques continues sur lui. Nous allons généraliser quelques de ces résultats.

Dans la note présente, nous établissons une correspondance entre les ensembles fermés et les idéaux d'une certaine espèce, en considérant le cas tant soit peu général.

1. En premier lieu, nous posons quelques définitions utilisées dans la suite.

Soit D un demigroupe topologique ayant un élément zéro $0:0a = a0 = 0$ quel que soit $a \in D$. Une partie D_0 de D sera dite *bornée à droite* si quel que soit le voisinage U de 0 il existe un voisinage V de 0 tel que $D_0V \subset U$. Un système filtrant⁴⁾ $\{e_x \mid X \in \Phi\}$ d'éléments de D sera dit *approximativement unité à gauche* si $\lim_{\Phi} e_x a = a$ quel que soit $a \in D$. Appelons une partie I non vide de D un *Id-idéal*, vérifiant les conditions :

- i) I est un idéal fermé à droite dans $D : ID \subset \bar{I} = I$, et
- ii) I possède un système approximativement unité à gauche qui soit

1) *Multiplicative semigroups of continuous functions*, Duke Math. J. Vol. 16 (1949), pp. 377—383.

2) *Multiplicative semigroups of continuous functions on a compact space*, *ibid.*, Vol. 22 (1955), pp. 383—392.

3) *On lattices of functions on topological spaces and functions on uniform spaces*, Osaka Math. J. Vol. 1 (1949), pp. 166—181. Aussi T. Shirota a l'énoncé sans démonstration dans *A generalization of a theorem of I. Kaplansky*, *ibid.* Vol. 4 (1952), pp. 121—131, que le demigroupe topologique des fonctions numériques continues sur un espace complètement régulier caractérise l'espace.

4) On désigne par Φ un filtre.

borné à droite dans D .

S'il existe un élément unité à droite, tout système approximativement unité à gauche converge vers un élément bilatéralement unité. Dans un demigroupe compact, tout système approximativement unité à gauche s'attroupe vers un élément unité à gauche. Tout Ud -idéal dans un anneau topologique est un idéal à droite au sens dans la théorie des anneaux.

2. Désormais, on désignera par G un demigroupe topologique ayant un élément zéro 0 et un élément unité 1^1 : $0a = a0 = 0$ et $1a = a1 = a$ quel que soit $a \in G$. De plus, on assujettira la condition suivante sur G :

(*) $\{e_x \mid X \in \Phi\}$ étant un système filtrant dans G et $a \in G$, la relation $\lim_{\Phi} e_x a = a$ est vraie si et seulement si $a = 0$ ou bien $\lim_{\Phi} e_x = 1$.

Il est clair que, dans le cas où $G \setminus \{0\}^2$ est un groupe, cette condition est remplie.

Désignons par E un espace séparé topologique et par $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(E, G)$ l'ensemble des fonctions continues définies sur E et prenant ses valeurs dans G . Définissons une opération multiplicative $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \ni (f, g) \rightarrow fg \in \mathfrak{C}$: $(fg)(x) = f(x)g(x)$ quel que soit $x \in E$. Introduisons la topologie de Pontryagin dans \mathfrak{C} : c'est-à-dire, on prend pour une base des ensembles ouverts dans \mathfrak{C} les ensembles de la forme $\mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) = \{f \mid f \in \mathfrak{C}, f(K_i) \subset V_i (i=1, \dots, n)\}$ où K_i est compact dans E et V_i ouvert dans G .

Avec ces définitions, \mathfrak{C} devient un demigroupe topologique. En effet, soient $fg \in \mathfrak{B}(K; V)$, $f, g \in \mathfrak{C}$, K compact dans E et V ouvert dans G . Alors, pour chaque point $x \in K$, on peut trouver deux ensembles ouverts V_x et V_x' tels que $f(x) \in V_x$, $g(x) \in V_x'$ et $V_x V_x' \subset V$. Soit $U(x)$ un voisinage de x dans K tel que $f(\overline{U(x)}) \subset V_x$ et $g(\overline{U(x)}) \subset V_x'$. Alors, on peut choisir un nombre fini de x_i vérifiant $\bigcup_{i=1}^n U(x_i) = K$. En définissant $K_i = \overline{U(x_i)}$, $V_i = V_{x_i}$ et $V_i' = V_{x_i}'$, on a $(f, g) \in \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) \times \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1', \dots, V_n')$ et $\mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1', \dots, V_n') \subset \mathfrak{B}(K; V)$. Il en résulte que la multiplication est

1) On suppose que $0 \neq 1$ ou ce qui revient au même chose que G contient au moins deux éléments.

2) $M \setminus N$ signifie le complémentaire de N dans M .

continue. Dans le cas particulier où $f = 1$, on peut prendre deux ensembles $V(1)$ et V' ouverts dans G tels que $(1, g) \in \mathfrak{B}(K; V(1)) \times \mathfrak{B}(K; V')$ et $\mathfrak{B}(K; V(1))\mathfrak{B}(K; V') \subset \mathfrak{B}(K; V)$. En effet, pour cela il suffit de poser $V(1) = \bigcap_{i=1}^n V_i$ et $V' = \bigcup_{i=1}^n V'_i$ dans la démonstration ci-dessus.

3. Soit \mathfrak{C}_0 un sous-demigroupe de \mathfrak{C} contenant toutes les fonctions constantes. Pour abrégé des langages nous posons la convention : le symbole K (sans ou avec suffixe) signifie un ensemble compact dans E . De même, U et V signifient un ensemble ouvert dans E et celui dans G respectivement. En particulier, $U(x)$ et $V(a)$ signifient un voisinage ouvert de x et celui de a respectivement. Par $\mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n)$ nous designons l'ensemble $\{f \mid f \in \mathfrak{C}_0, f(K_i) \subset V_i (i = 1, \dots, n)\}$, K_i et V_i s'assujettissant à la convention ci-dessus.

Maintenant nous allons montrer le

Lemme 1. *Pour qu'un ensemble \mathfrak{F} soit borné à droite dans \mathfrak{C}_0 , il faut et il suffit que $\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(K)$ soit borné à droite quel que soit K .*

Démonstration. D'abord, supposons que \mathfrak{F} soit borné à droite dans \mathfrak{C}_0 . Alors quels que soient $V(0)$ et K , il existe K_0 et $V_0(0)$ tels que $\mathfrak{F}\mathfrak{B}(K_0; V_0(0)) \subset \mathfrak{B}(K; V(0))$. Comme toute fonction constante dont valeur soit égale à un élément de $V_0(0)$ appartient à $\mathfrak{B}(K_0; V_0(0))$, on a $f(K)V_0(0) \subset V(0)$ quel que soit $f \in \mathfrak{F}$, autrement dit, $(\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(K))V_0(0) \subset V(0)$.

Réciproquement, supposons $\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(K)$ soit borné à droite dans G . Étant donné $\mathfrak{B}(K; V(0))$, si on prend $V_0(0)$ tel que $(\bigcup_{f \in \mathfrak{F}} f(K))V_0(0) \subset V(0)$, immédiatement on a $\mathfrak{F}\mathfrak{B}(K; V_0(0)) \subset \mathfrak{B}(K; V(0))$, c. q. f. d.

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{C} = \{e_x \mid X \in \phi\}$ un système filtrant et borné à droite dans \mathfrak{C}_0 . Supposons qu'il existe une fonction $f \in \mathfrak{C}_0$ telle que $f(K) \ni 0$ et $\lim_{\phi} e_x f = f$. Alors $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}(K; V(1)) \neq \emptyset$ quel que soit $V(1)$.*

Démonstration. Evidemment $\lim e_x f = f$ entraîne $\lim e_x(x)f(x) = f(x)$ quel que soit $x \in K$. En vertu de la condition (*), il existe $X_x \in \phi$ tel que $\phi \ni X \subset X_x$ entraîne $e_x(x) \subset V(1)$, pour chaque $x \in K$. Comme $\bigcup_{x \in K} e_x^{-1}(V(1)) \supset K$, on peut choisir un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $\bigcup_{i=1}^n e_{x_i}^{-1}(V(1)) \supset K$. Cela posé, $\phi \ni X \subset \bigcap_{i=1}^n X_{x_i}$ entraîne $e_x(K)$

$\subset V(1)$, c'est-à-dire $e_x \in \mathfrak{B}(K; V(1))$, c. q. f. d.

C'est pour déduire ce Lemme que nous assujettissons la condition (*) sur G . Nulle part ailleurs, la condition (*) ne sera employée. L'auteur ne le connaît pas si on peut ce Lemme démontrer en remplaçant « $\lim e_x = 1$ » par « e_x s'attroupe vers 1 » dans (*) ou non.

En utilisant le Lemme ci-dessus,

Lemme 3. *Soit \mathfrak{F} un Ud-idéal dans \mathfrak{C}_0 . Supposons qu'à tout point $x \in K$ on pouvait l'associer une fonction $f_x \in \mathfrak{F}$ telle que $f_x(x) \neq 0$. Désignons par $\mathfrak{E} = \{e_x \mid X \in \Phi\}$ un système approximativement unité à gauche de \mathfrak{F} et borné à droite dans \mathfrak{C}_0 . Alors, quel que soit le $V(1)$, $\mathfrak{E} \cap V(K; V(1)) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $V(1) \not\equiv 0$. Pour $x \in K$, $f_x(x)$ étant distinct de 0, il existe un $U(x)$ et un $V_x(0)$ tels que $f_x(U(x)) \cap V_x(0) = \emptyset$. D'après la compacité de K , on peut choisir un nombre fini de fonctions $f_1, \dots, f_n \in \mathfrak{F}$ et $V(0)$ vérifiant $\bigcup_{i=1}^n (K \setminus f_i^{-1}(V(0))) = K$. Ecrivons $K_i = K \setminus f_i^{-1}(V(0))$. En vertu du Lemme 2, il existe $X_i \in \Phi$ tels que $e_{x_i} \in \mathfrak{B}(K_i; V(1))$. Parce que $\lim_{\phi} e_x e_{x_i} = e_{x_i}$, on a $e_{x_i} e_{x_i} \in \mathfrak{B}(K_i; V(1))$ ($i = 1, \dots, n$) pour un $X_0 \in \Phi$ convenablement choisi. Il en résulte que $e_{x_0}(K) \not\equiv 0$. Ici, en utilisant le Lemme 2 encore une fois, on a $\mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}(K; V(1)) \neq \emptyset$, c. q. f. d.

Il en résulte que, si \mathfrak{F} est un Ud-idéal distinct de \mathfrak{C}_0 , on a $Z(\mathfrak{F}) = \bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{x \mid f(x) = 0\} \neq \emptyset$. En effet, si $Z(\mathfrak{F}) = \emptyset$, on ait $\mathfrak{B}(K; V(1)) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ quels que soit K et $V(1)$, d'où $1 \in \mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$ et puis $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_0$.

Lemme 4. *Tout Ud-idéal dans \mathfrak{C}_0 est de la forme $\mathfrak{F} = \{f \mid f \in \mathfrak{C}_0, f(Z(\mathfrak{F})) = 0\}$.*

Démonstration. C'est trivial si $\mathfrak{F} = \mathfrak{C}_0$. Donc supposons $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{C}_0$, et que $\mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$ quel que soit $V(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) \ni g$. Maintenant, si $g(K_i) \ni 0$, alors V_i est un voisinage de 0. $\bigcup_{x \in \Phi} e_x(K_i)$ étant borné à droite d'après le Lemme 1, il existe un $V_i(0)$ tel que $(\bigcup_{x \in \Phi} e_x(K_i)) V_i(0) \subset V_i$, pour tout i tel que $g(K_i) \ni 0$. Alors, il est clair que $e_x(x)g(x) \in e_x(K_i) V_i(0) \subset V_i$ quel que soit $x \in K_i \cap g^{-1}(V_i(0))$. Posons $K_i' = K_i \setminus g^{-1}(V_i(0))$ si $g(K_i) \ni 0$ et $K_i' = K_i$ si $g(K_i) \not\equiv 0$. Il est clair que $e_x g \in \mathfrak{B}(K_1', \dots, K_n'; V_1, \dots, V_n)$ entraîne $e_x g \in \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n)$. D'ailleurs, évidemment $\bigcup_{i=1}^n g(K_i') \not\equiv 0$.

Cela posé, prenons $V(1)$ et $\mathfrak{B}(K_1', \dots, K_n'; V_1', \dots, V_n')$ tels que $g \in \mathfrak{B}(K_1', \dots, K_n'; V_1, \dots, V_n')$ et $V(K_i'; V(1)) \cap V(K_i'; V_i') \subset V(K_i'; V_i)$. Puisque $\bigcup_{i=1}^n K_i$ est disjoint de $Z(\mathfrak{F})$ et compact, il existe $X_0 \in \phi$ tel que $e_{x_0} \in \mathfrak{B}(\bigcup_{i=1}^n K_i; V(1))$ à l'appui du Lemme 2. Conséquemment $e_{x_0} g \in \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n)$, et puis $e_{x_0} g \in \mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n)$.

Cependant, comme un idéal à droite, \mathfrak{F} contient $e_{x_0} g$. Autrement dit, $\mathfrak{B}(K_1, \dots, K_n; V_1, \dots, V_n) \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$, c. q. f. d.

Maintenant, pour une partie M de E , désignons par \tilde{M} l'ensemble des points que \mathfrak{C}_0 ne peut séparer de M : $\tilde{M} = \{x \mid f \in \mathfrak{C}_0 \text{ et } f(M) = 0 \text{ entraînent } f(x) = 0\}$.

Avec cette définition il est facile de vérifier le

Lemme 5. *Pour que $\mathfrak{F}(M) = \{f \mid f(M) = 0, f \in \mathfrak{C}_0\}$ soit un Ud -idéal dans \mathfrak{C}_0 , il faut et il suffit qu'il existe un ensemble \mathfrak{E} borné à droite dans \mathfrak{C}_0 tel que, quels que soient K disjoint de \tilde{M} et $V(1)$, $\mathfrak{F}(M) \cap \mathfrak{E} \cap \mathfrak{B}(K; V(1)) \neq \emptyset$.*

Nous appellerons M \mathfrak{C}_0 -régulier à droite si $M = \tilde{M}$ et s'il remplit la condition du Lemme 5.

Comme aisément vu, tout ensemble fermé dans un espace E complètement régulier est $\mathfrak{C}(E, R)$ -régulier, où R signifie le demigroupe multiplicatif topologique des nombres réels. Tout ensemble fermé dans un espace E totalement discontinu est $\mathfrak{C}(E, G)$ -régulier, où G est un demigroupe topologique quelconque ayant 0 et 1.

Théorème 1. *Soit G un demigroupe topologique ayant 0 et 1 et remplissant la condition (*). Soit \mathfrak{C}_0 un demigroupe topologique de fonctions continues d'un espace séparé topologique E dans G , muni de la topologie de Pontryagin et contenant toutes les fonctions constantes. Alors, pour qu'une partie \mathfrak{F} de \mathfrak{C}_0 soit un Ud -idéal dans \mathfrak{C}_0 , il faut et il suffit qu'elle soit de la forme $\mathfrak{F} = \{f \mid f(M) = 0, f \in \mathfrak{C}_0\}$ où M soit un ensemble \mathfrak{C}_0 -régulier dans E , coïncidant avec $\bigcap_{f \in \mathfrak{F}} \{x \mid f(x) = 0\}$.*

Maintenant, supposons que :

(**) $\tilde{M} = \bar{M}$ quel que soit $M \subset E$, et tout ensemble réduit à un point est \mathfrak{C}_0 -régulier à droite.

Alors, une partie \mathfrak{F} de \mathfrak{C}_0 est un Ud -idéal maximal si et seulement si

elle est de la forme $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(x) = \{f \mid f(x) = 0, f \in \mathfrak{C}_0\}$ pour un point $x \in E$. Soit $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}_0)$ l'ensemble des *Ud*-idéaux maximaux dans \mathfrak{C}_0 . Introduisons la topologie de Jacobson dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}_0)$: $\overline{\{\mathfrak{J}(x) \mid x \in M\}} = \{\mathfrak{J}(y) \mid \bigcap_{x \in M} \mathfrak{J}(x) \subset \mathfrak{J}(y)\}$. Sans peine on peut voir que $\overline{\{\mathfrak{J}(x) \mid x \in M\}} = \{\mathfrak{J}(x) \mid x \in \tilde{M}\} = \{\mathfrak{J}(x) \mid x \in \bar{M}\}$. Ainsi l'application $x \rightarrow \mathfrak{J}(x)$ donne un homéomorphisme de E sur $\mathfrak{S}(\mathfrak{C}_0)$. De cette manière nous avons le

Théorème 2. *Les mêmes notations et hypothèses que celles dans le Théorème 1 soient employées. De plus, la condition (**) soit supposée. Alors E est homéomorph à l'espace des *Ud*-idéaux maximaux dans \mathfrak{C}_0 muni de la topologie de Jacobson.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received August 6, 1956)