ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DERIVATIONSMODUL UND 2-KOHOMOLOGIE-GRUPPE II

MIKAO MORIYA

Einleitung. In der vorliegenden Note bezeichnet k durchweg einen diskret bewerteten perfekten (kommutativen) Körper und K eine endlich-separable Erweiterung über k. Die Hauptordnung von k bzw. K sei mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Ferner sei $\bar{K}$ eine endlich-separable Erweiterung über K ($\bar{K}$ kann eventuell mit K übereinstimmen) und $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$. Dann bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$ und mit $\bar{R}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\mathfrak{P}^m$; dabei wollen wir auch $m=\infty$ zulassen, indem wir unter $\bar{R}_\infty$ die Hauptordnung $\bar{\mathfrak{O}}$ selbst verstehen.

Eine eindeutige Abbildung f des Produktraumes $\mathfrak{O}\times\mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$ heißt ein *normaler 2-Kozyklus* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

i) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X, Y)\equiv f(Y, X) \qquad \mod \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

ii) Für beliebige Elemente $X_i, Y_i (i=1,2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X_1+X_2,\ Y_1+Y_2)\equiv \sum_{i,j=1}^{2} f(X_i, Y_j) \qquad \mod \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

iii) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$Xf(Y, Z)+f(X, YZ)\equiv f(XY, Z)+Zf(X, Y) \qquad \mod \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

iv) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt stets

$$f(x, X)\equiv 0 \qquad \mod \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

Dabei soll für mod $\bar{\mathfrak{P}}^\infty$ das Kongruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden.

Eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{O}$ in $\bar{\mathfrak{O}}$ heißt eine *normale 1-Kokette* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn g die folgenden Eigenschaften besitzt:

i) Für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ gilt stets

$$g(x) \equiv 0 \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

ii) Für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ gilt

$$g(xX) \equiv xg(X) \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

iii) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$g(X+Y) \equiv g(X) + g(Y) \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m.$$

Hierbei soll man für mod $\bar{\mathfrak{P}}^\infty$ wieder das Kongruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzen.

Definiert man nun den *2-Korand* δg von g durch die Gleichung

$$\delta g(X, Y) = Yg(X) + Xg(Y) - g(XY) \qquad (X, Y \text{ aus } \mathfrak{O}),$$

so ist δg ersichtlich ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Wenn insbesondere für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets $\delta g(X, Y) \equiv 0$ mod $\bar{\mathfrak{P}}^m$ gilt, so heißt g eine *Derivation* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Ein normaler 2-Kozyklus f' von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ heißt *kohomolog* zu einem normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$, wenn es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ gibt, so daß

$$f' \equiv f + \delta g \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt[1], in Zeichen: $f \sim f'(\bar{\mathfrak{P}}^m)$.
Insbesondere bedeutet $f \sim 0\ (\bar{\mathfrak{P}}^m)$, daß es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m mit $f \equiv \delta g$ mod $\bar{\mathfrak{P}}^m$ gibt.

Bekanntlich bildet die Gesamtheit Z^2_m aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul und die Gesamtheit B^2_m aller zur Null kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von Z^2_m; der Faktormodul $Z^2_m/B^2_m = H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ ist offenbar ein $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul und die *normale 2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ genannt. Dabei heißt jedes Element aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ eine *normale 2-Kohomologieklasse* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Es ist klar, daß die Gesamtheit $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ aller Derivationen von

1) Dies bedeutet, daß für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ stets die Kongruenz

$$f(X, Y) \equiv f(X, Y) + \delta g(X, Y) \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt.

$\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Modul bildet; $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{R}_m)$ heißt der *Derivationsmodul* von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.

Unter der $\bar{\mathfrak{O}}$-*Länge* eines $\bar{\mathfrak{O}}$-Moduls $\bar{M}$ versteht man die Länge einer endlichen Kompositionsreihe von $\bar{M}$ (wenn überhaupt eine solche endliche Kompositionsreihe existiert), die aus lauter $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermoduln von $\bar{M}$ besteht. Die $\bar{\mathfrak{O}}$-Länge von $\bar{M}$ ist bekanntlich eine Invariante von $\bar{M}$.

Wenn insbesondere $\bar{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}$ und das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet ist, so gilt, wie ich schon in einer früheren Note[1] bewiesen habe, für jede hinreichend große natürliche Zahl m stets folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:

$$(*) \qquad H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m) \cong H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m),$$

außerdem besteht noch die Gleichung

$$\begin{aligned} L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) &= L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) \\ &= \mathfrak{P}\text{-}\textit{Exponenten}^{2)}\ d(K/k)\ \textit{der Differente von}\ K/k. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $L(M)$ *die* $\mathfrak{O}$-*Länge eines* $\mathfrak{O}$-*Moduls* M *und* R_m *den Restklassenring von* $\mathfrak{O}$ *nach* $\mathfrak{P}^m$.

Das Ziel der vorliegenden Note ist zu beweisen, daß die obige Isomorphierelation $(*)$ für jede nicht-negative ganze rationale Zahl m stets gültig ist.

§1. Länge eines Derivationsmoduls und einer normalen 2-Kohomologiegruppe. In diesem Paragraphen wollen wir für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl m die $\mathfrak{O}$-Längen von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ und $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ bestimmen, wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Zu diesem Zweck ziehen wir eine K enthaltende, über k endlich-separable galoissche Erweiterung $\bar{K}$ heran. Nun sei $\bar{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung von $\bar{K}$ und $\bar{\mathfrak{P}}$ das nicht-triviale Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Ferner sei e die Verzweigungsordnung von $\bar{K}$ über K. Dann bezeichnen wir für eine durch e teilbare, nicht-negative ganze rationale Zahl m den Restklassenring $\bar{\mathfrak{O}}/\bar{\mathfrak{P}}^m$ durch $\bar{R}_m$, und wir ziehen zunächst die Deriva-

1) M. Moriya, Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe I, Journ. Math. Soc., Japan, Vol. 7, Supplement (1955), S. 444—452, Satz 3. Diese Note zitiere ich mit M III.

2) D. h. die Differente von K/k ist gleich $\mathfrak{P}^{d(K/k)}$.

tionsmoduln $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ und $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ in Betracht. Da $\bar{K}$ über k separabel-galoissch ist, so ist $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{o}$ *normal*; d. h. es existiert eine Folge von den Hauptordnungen $\mathfrak{O}_i(i=1, 2, \ldots, s)$

$$\mathfrak{o}=\mathfrak{O}_0\subset\mathfrak{O}_1\subset\ldots\subset\mathfrak{O}_s=\bar{\mathfrak{O}}$$

von der Art, daß jedes $\mathfrak{O}_i(0\leqq i\leqq s)$ die Hauptordnung eines Zwischenkörpers von $\bar{K}/k$ ist und $\mathfrak{O}_{i+1}$ aus $\mathfrak{O}_i$ $(0\leqq i\leqq s-1)$ durch Ringadjunktion eines einzigen Elementes besteht[1]. Ebenso ist $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}$ normal, weil $\bar{K}$ auch über K separabel-galoissch ist.

Es sei $\bar{D}$ eine beliebige Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$. Dann induziert $\bar{D}$ offenbar eine Derivation D von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$; d. h. D ist die Einschränkung von $\bar{D}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Ordnet man nun einer beliebigen Derivation $\bar{D}$ aus $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ die Einschränkung D von $\bar{D}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ zu, so ergibt diese Zuordnung einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus Φ von $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,R_m)$ *in* $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$. Dabei besteht der Kern von Φ offenbar aus allen Derivationen von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$, also stimmt mit dem Derivationsmodul $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\,\bar{R}_m)$ überein.

Bezeichnet man nun mit $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ das Bild von $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ durch Φ, so gilt folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:

$$H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,R_m)/H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\,\bar{R}_m)\cong G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m).$$

Dabei besteht $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ ersichtlich aus allen denjenigen Derivationen aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$, die in $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ ihre Fortsetzungen besitzen. Aus der letzten Isomorphierelation folgt ohne weiteres:

$$\bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m))=\bar{L}(G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m))+\bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\,\bar{R}_m)),$$

weil die hier auftretenden $\bar{\mathfrak{O}}$-Längen alle endlich sind[2]. Da $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ ein $\bar{\mathfrak{O}}$-Untermodul von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)$ ist, so ist

$$E=\bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m))-\bar{L}(G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m)) \tag{1.1}$$

eine nicht-negative, ganze rationale Zahl; ferner gilt offenbar:

$$\bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m))=\bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\,\bar{R}_m))+\bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\,\bar{R}_m))-E. \tag{1.2}$$

1) M. Moriya, Theorie der Derivationen und Körperdifferenten, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 2 (1953), S. 128—129, Hilfssatz 4. Diese Arbeit ist mit M I zitiert.

2) M I, S. 123—124, Satz 3.

Nun wollen wir uns den 2-Kohomologiegruppen zuwenden. Berücksichtigt man zunächst, daß $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}$ normal ist, so gilt folgende $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphierelation:

$$(1.3) \qquad H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)/H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)\cong H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)^{1)}.$$

Dabei bedeutet $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\ \mathfrak{O}\,;\ \bar{R}_m)$ diejenige $\bar{\mathfrak{O}}$-Untergruppe von $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$, die aus allen und nur allen, in $\mathfrak{O}$ zerfallenden normalen 2-Kohomologieklassen von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ besteht[2]. Ferner ist noch bewiesen worden, daß jede 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ mindestens einen normalen 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$ enthält[3]. Da ersichtlich jeder normale 2-Kozyklus $\bar{F}$ von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$ in $\mathfrak{O}$ zerfällt, so ordnen wir der $\bar{F}$ enthaltenden 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ die $\bar{F}$ enthaltende 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ zu. Dadurch ergibt sich ein $\bar{\mathfrak{O}}$-Homomorphismus Ψ von $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ auf $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$. Wenn man also den Kern von Ψ durch $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ bezeichnet, so gilt die folgende $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphie:

$$(1.4) \qquad H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)/G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)\cong H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o},\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m).$$

Nun sei $\bar{F}$ ein (normaler) 2-Kozyklus aus irgendeiner 2-Kohomologieklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$. Dann existiert nach Definition eine normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ von der Art, daß

$$(1.5) \qquad \bar{F}\equiv\delta\bar{g} \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m$$

gilt. Da $\bar{F}$ ein normaler 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$ ist, so besteht für die Einschränkung g von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ die Kongruenz:

$$\delta g(X,Y)\equiv\bar{F}(X,Y)\equiv 0 \qquad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^m,$$

wo X, Y beliebige Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen; *d. h. g ist eine Derivation von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$.* Gehört insbesondere in der Kongruenz (1.5) $\bar{F}$ zur Nullklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;R_m)$, so existiert eine normale 1-Kokette $\bar{G}$ von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$ mit $\bar{F}\equiv\delta\bar{G}$ mod $\bar{\mathfrak{P}}^m$. Weil offenbar

1) M. Moriya, Theorie der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 5 (1955), S. 69; diese Arbeit ist mit M II zitiert.

2) M II, S. 50.

3) M II, S. 50—51, Hilfssatz 2.

$$\delta(\bar{g}-\bar{G})\equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

gilt, so ist $\bar{D}=\bar{g}-\bar{G}$ eine Derivation von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Berücksichtigt man dabei, daß für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ stets

$$\bar{G}(X)\equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m$$

gilt, so ist

$$\bar{D}(X)=\bar{g}(X)-\bar{G}(X)\equiv\bar{g}(X)\equiv g(X) \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

d. h. g(die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$) ist als Derivation stets auf $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ fortsetzbar (die Derivation $\bar{D}$ ist sicher eine Fortsetzung von g auf $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$), also gehört g zu $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$.

Umgekehrt gehöre in (1.5) die Einschränkung g von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ zu $G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$. Dann besitzt g eine Fortsetzung $\bar{D}$ aus $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$, und die Einschränkung von $\bar{g}-\bar{D}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ ist offenbar die Nullderivation von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$. Weil wegen $\delta\bar{D}\equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^m$ die Kongruenz $\delta(\bar{g}-\bar{D})\equiv\delta\bar{g}$ mod $\mathfrak{P}^m$ besteht, so gilt für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ bzw. $\bar{X}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$

$$\delta(\bar{g}-\bar{D})(X,\bar{X})\equiv\delta\bar{g}(X,\bar{X})\equiv F(X,\bar{X})\equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

ferner folgt aus der letzten Kongruenz:

$$\begin{aligned}\delta(\bar{g}-\bar{D})(X,\bar{X})&\equiv\bar{X}(\bar{g}-\bar{D})(X)+X(\bar{g}-\bar{D})(\bar{X})-(\bar{g}-\bar{D})(X\bar{X})\\&\equiv X(\bar{g}-\bar{D})(\bar{X})-(\bar{g}-\bar{D})(X\bar{X})\equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m.\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, daß $\bar{G}=\bar{g}-\bar{D}$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{P}_m$ ist, und es ist

$$\delta\bar{G}\equiv\delta\bar{g}\equiv\bar{F} \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

d. h. $\bar{F}$ gehört zur Nullklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$.

Nun sei $\bar{C}$ eine beliebige 2-Kohomologieklasse aus $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)$ und $\bar{F}$ ein beliebiger 2-Kozyklus aus $\bar{C}$. Ferner sei $\bar{g}$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ mit $\bar{F}\equiv\delta\bar{g}$ mod $\mathfrak{P}^m$, und g die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$. Ordnet man dann $\bar{C}$ die Derivation g aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$ zu, so ergibt diese Zuordnung nach dem oben Gezeigten einen $\bar{\mathfrak{O}}$-Isomorphismus χ von $G^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;R_m)$ *in* $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)/G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$.

Nun sei D eine beliebige Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$. Dann wollen wir zeigen, daß es eine normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

i) $\delta\bar{g}$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$.

ii) Die Einschränkung von $\bar{g}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ ist D.

Zum Beweis dieser Tatsache legen wir eine Minimalbasis $\bar{W}_1 = 1$, $\bar{W}_2$, $\dots, \bar{W}_n$ von $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}$ fest. Dann ist ein beliebiges Element $\bar{X}$ aus $\bar{\mathfrak{O}}$ von der Form

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i\bar{W}_i,$$

wo die X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Wir setzen zunächst

$$\bar{g}_1(\bar{X}) = D(X_1).$$

Da die Elemente X_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ durch $\bar{X}$ und die $\bar{W}_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ eindeutig bestimmt sind, so ist $\bar{g}_1(\bar{X})$ nach Definition durch $\bar{X}$ eindeutig bestimmt. Ferner können wir leicht bestätigen, daß $\bar{g}_1$ eine normale 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\bar{R}_m$ ist. Nun setzen wir

$$\bar{g}_2(X_i\bar{W}_i) = \delta\bar{g}_1(X_i, \bar{W}_i)$$

und

$$\bar{g}_2(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\bar{W}_i) = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_2(X_i\bar{W}_i).$$

Nach Definition gilt für ein Element X aus $\mathfrak{O}$:

$$\bar{g}_2(X) = \bar{g}_2(X\bar{W}_1) = \delta\bar{g}_1(X, \bar{W}_1) = \delta\bar{g}_1(X, 1) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m;$$

dies zeigt, daß $\bar{g}_2$ eine 1-Kokette von $\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\bar{R}_m$ ist. Berücksichtigt man ferner die Kongruenzen

$$X\delta\bar{g}_1(X_i, \bar{W}_i) + \delta\bar{g}_1(X, X_i\bar{W}_i) \equiv \delta\bar{g}_1(XX_i, \bar{W}_i) + \bar{W}_i\delta\bar{g}_1(X, X_i) \quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

und

$$\delta\bar{g}_1(X, X_i) \equiv \delta D(X, X_i) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m,$$

so bestätigt man leicht, daß

$$\delta\bar{g}_1(X, X_i\bar{W}_i) \equiv -\,\delta\bar{g}_2(X, X_i\bar{W}_i) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^m$$

gilt. Wenn man also

$$\bar{g} = \bar{g}_1 + \bar{g}_2$$

setzt, so besteht die Kongruenz:

$$\begin{aligned}\delta\bar{g}(X, \textstyle\sum_{i=1}^{w} X_i\overline{W}_i) &= \delta\bar{g}_1(X, \textstyle\sum_{i=1}^{w} X_i\overline{W}_i) + \delta\bar{g}_2(X, \textstyle\sum_{i=1}^{w} X_i\overline{W}_i) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{w}(\delta\bar{g}_1(X, X_i\overline{W}_i) + \delta\bar{g}_2(X, X_i\overline{W}_i)) \\ &\equiv 0 \quad \mod \overline{\mathfrak{P}}^m;\end{aligned}$$

d. h. $\delta\bar{g}$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\overline{R}_m$. Ferner ist $\bar{g}$ eine normale 1-Kokette von $\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\overline{R}_m$, weil für jedes Element x aus $\mathfrak{o}$ stets $\bar{g}(x) \equiv 0 \mod \overline{\mathfrak{P}}^m$ gilt. Da offenbar für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$

$$\bar{g}(X) = \bar{g}_1(X) + \bar{g}_2(X) \equiv \bar{g}_1(X) \equiv D(X) \qquad \mod \overline{\mathfrak{P}}^m$$

besteht, so ist die normale 1-Kokette $\bar{g}$ von $\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$ über $\overline{R}_m$ eine Fortsetzung von D auf $\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}$. Bezeichnet also $\bar{C}$ die $\delta\bar{g}$ enthaltende, normale 2-Kohomologieklasse von $\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}$ über $\overline{R}_m$, so ist nach Definition

$$\bar{C} \in G^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m);$$

durch Anwendung des Isomorphismus χ auf $\bar{C}$ erhält man:

$$\chi(\bar{C}) = D + G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m).$$

Somit ist gezeigt, daß χ ein $\overline{\mathfrak{O}}$-Isomorphismus von $G^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m)$ *auf* $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)/G^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)$ ist, und daß nach (1.1)

$$\bar{L}(G^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m)) = E$$

gilt.

Unter der Voraussetzung, daß $H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m)$ *bzw.* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)$ *eine endliche* $\overline{\mathfrak{O}}$*-Länge besitzt,* erhält man ohne weiteres:

$$\bar{L}(H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}; \overline{R}_m)) = \bar{L}(H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m)) - E$$

und

$$\begin{aligned}\bar{L}(H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)) &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}; \overline{R}_m)) \\ &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\overline{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}; \overline{R}_m)) - E;\end{aligned}$$

d. h. es gilt nach (1. 2):

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad & \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) \\ & = \bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) - \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)) \\ & \qquad - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)).\end{aligned}$$

Nun wollen wir zeigen, daß $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))$ ist. Dazu betrachten wir $H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m)$ und $H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m)$. Dann gelten folgende Isomorphierelationen:

$$H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m) \cong \bar{\mathfrak{O}}/(\bar{\mathfrak{P}}^m, \mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1}))^{1)}$$

und

$$H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m) \cong \bar{\mathfrak{O}}/(\bar{\mathfrak{P}}^m, \mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1}))^{2)},$$

wo K_{s-1} den Quotientenkörper von $\mathfrak{O}_{s-1}$ und $\mathfrak{D}(\bar{K}/K_{s-1})$ die Differente von $\bar{K}/K_{s-1}$ bedeutet. Hieraus folgt sofort:

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_{s-1}\,;\bar{R}_m)).$$

Ebenso beweist man, daß

$$\bar{L}(H^2(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))$$

gilt. Nun nehmen wir an, daß

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_1\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_1\,;\bar{R}_m))$$

ist. Dann folgt aus (1.6);

$$\begin{aligned}& \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m) - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;R_m)) \\ & \quad = \bar{L}(H^2(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}\,;R_m)) - \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}_1/\mathfrak{o}\,;R_m)) + \bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_1\,;\bar{R}_m)) \\ & \qquad - \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}_1\,;\bar{R}_m)) = 0\,;\end{aligned}$$

also ist $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))$.

Da $\bar{\mathfrak{O}}$ über $\mathfrak{O}$ auch normal ist, so gilt ebenfalls:

$$\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)) = \bar{L}(H^1(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m)).$$

1) M II, S. 59, Satz 3.
2) M I, S. 117, Satz 1.

Weil $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))$ und $\bar{L}(H^2(\bar{\mathfrak{O}}/\mathfrak{O}\,;\bar{R}_m))$ endlich sind, so ist es auch $\bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))$ nach (1.3). Daher folgt aus (1.6):

$$\bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))=\bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)).$$

Setzt man nun $m_0 e = m$ und $R_{m_0} = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^{m_0}$, so sind $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$ und $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m)$ bzw. die Multiplikatorenbereicherweiterungen von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{m_0})$ und $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}:R_{m_0})$ zu $\bar{\mathfrak{O}}$,[1] wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ bezeichnet. Wenn man daher mit $L(M)$ die $\mathfrak{O}$-Länge eines $\mathfrak{O}$-Moduls M bezeichnet, so gilt:

$$\begin{aligned}L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{m_0})) &= \bar{L}(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_{m_0}))/e\\ &= \bar{L}(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\bar{R}_m))/e = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{m_0})).\end{aligned}$$

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *R_m sei der Restklassenring von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}^m$, wo $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ und m eine nicht-negative, ganze rationale Zahl bezeichnet. Dann gilt*

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)) = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)),$$

wo $L(M)$ die $\mathfrak{O}$-Länge eines $\mathfrak{O}$-Moduls M bezeichnet.

Satz 2. *Es bezeichne $L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m))$ die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$. Ferner seien m, n nicht-negative, ganze rationale Zahlen. Ist dann $m \leqq n$, so gilt:*

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)) \leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ R_n)) \leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)).$$

Beweis. Nach Satz 1 gelten

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)) = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m))$$

und

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_n)) = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_n)).$$

Da stets $L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)) \leqq L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_n))$ ist[2], so schließt man:

1) M II, S. 54—55, Hilfssatz 4 und M I, S. 127—128, Satz 4.
2) M I, S. 114, Hilfssatz 1

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m))\leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_n)).$$

Weil aber für eine hinreichend große natürliche Zahl n_1 mit $n_1 > n$ $L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{n_1})) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty))$ gilt[1], so muß

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_n))\leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty))$$

sein.

§2. **Struktur der normalen 2-Kohomologiegruppen.** In diesem Paragraphen setzen wir $R_m = \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m\ (0\leqq m\leqq\infty)$, wo $\mathfrak{P}$ das nichttriviale Primideal aus $\mathfrak{O}$ bedeutet. Ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m heißt von der $\mathfrak{O}$-Länge e in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, wenn aus einer Kohomologierelation $Af\sim 0\ (\mathfrak{P}^m)\ (A\in\mathfrak{O})$ stets $A\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^e$ folgt und umgekehrt. Es seien $f_1, f_2, \dots, f_n$ normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, deren $\mathfrak{O}$-Längen in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ bzw. natürliche Zahlen $e_1, e_2, \dots, e_n$ sind. Dann heißen $f_1, f_2, \dots, f_n$ *$\mathfrak{O}$-unabhängig* in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, wenn aus einer Kohomologierelation

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i f_i\sim 0\quad(\mathfrak{P}^m)\qquad\qquad (A_i\in\mathfrak{O}\,;\,i=1,2,\dots,n)$$

stets $A_i f_i\sim 0\ (\mathfrak{P}^m)\ (i=1,2,\dots,n)$ folgen, was mit den Kongruenzen $A_i\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^{e_i}\ (i=1,2,\dots,n)$ gleichbedeutend ist. Ein System von den normalen 2-Kozyklen $f_i\ (i=1,2,\dots,n)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, welche in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind, heißt eine *Kozyklenbasis* von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, wenn für jeden normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m stets eine Kohomologierelation

$$f\sim \textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i f_i\quad(\mathfrak{P}^m)$$

gilt, wo die $A_i\ (i=1,2,\dots,n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen.

Zunächst betrachten wir den Fall, wo $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ der Nullmodul ist. Nach Satz 2 gilt dann für eine beliebige, nicht-negative ganze rationale Zahl m:

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m))\leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)) = 0,$$

1) M II, S. 70—71, Satz 5.

also ist $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ der Nullmodul. Hieraus schließt man nach Satz 1, daß $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ auch der Nullmodul ist. Mithin ist bewiesen:

Hilfssatz 1. *Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl* m *sind* $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ *und* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ *als der Nullmodul voneinander isomorph, wenn* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ *der Nullmodul ist.*

Nun nehmen wir an, daß $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ kein Nullmodul ist. Dann besitzt $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ eine endliche Kozyklenbasis $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Wenn die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ mit e_i bezeichnet wird, so ist

$$L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i = \mathfrak{P}\text{-Exponenten } d(K/k) \text{ der Differente von } K/k\,^{1)}.$$

Ferner existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geqq N$ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ stets $\mathfrak{O}$-unabhängig bzw. von der $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sind. Bezeichnet man nun mit $C_m(f_i)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ die f_i enthaltende, normale 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$, so erzeugen die $C_m(f_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ einen $\mathfrak{O}$-Untermodul $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$. Dabei nennt man den $\mathfrak{O}$-Modul $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ einfach den durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ erzeugten Untermodul von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$. Es sei C_m eine beliebige 2-Kohomologieklasse aus $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ und f ein normaler 2-Kozyklus aus C_m. Dann ist f von der Form

$$f \sim \textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \qquad (\mathfrak{P}^m),$$

wo die $A_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Ordnet man also C_m die $\sum_{i=1}^{n} A_i f_i$ enthaltende, 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ zu, so ergibt diese Zuordnung offenbar einen $\mathfrak{O}$-Isomorphismus von $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ auf $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$, weil nach Voraussetzung dann und nur dann $\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^m)$ ist, wenn $\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$ ist. Es gilt daher:

$$L(H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)).$$

Da $L(H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) \leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m))$ und nach Satz 2 $L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) \leqq L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty))$ ist, so muß sicher

$$L(H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m))$$

sein; hieraus folgt sofort:

---

1) M II, S. 70—71, Satz 5.

$$H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m) = H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m).$$

Somit ist beweisen:

Hilfssatz 2. *Es sei $f_1, f_2, \ldots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$; ferner sei die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ gleich e_i. Sind dann $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $\mathfrak{O}$-unabhängig bzw. von der $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$, so stimmt $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ mit dem durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ erzeugten $\mathfrak{O}$-Modul überein, und es gilt sogar die $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:*

$$H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m) \cong H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty).$$

Ferner bilden $f_1, f_2, \ldots, f_n$ auch eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$.

Nun legen wir eine beliebige Koyzklenbasis $f_1, f_2, \ldots, f_n$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ fest; die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i $(1 \leqq i \leqq n)$ sei mit e_i bezeichnet. Ferner sei a die kleinste natürliche Zahl von der Art, daß für jede natürliche Zahl m mit $m \geqq a$ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $\mathfrak{O}$-unabhängig bzw. von der $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ sind aber nicht mehr so in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{a-1})$. Daß eine solche Zahl existiert, sieht man sofort ein, weil für ein $e_j = e$ mit $e = \mathrm{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ und für $e > \nu > 0$ $\pi^{e_j-\nu} f_j \sim 0$ $(\mathfrak{P}^{e-\nu})$ gilt, wo π ein Primelement von $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$ bedeutet; d. h. in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$ sind $f_1, f_2, \ldots, f_n$ nicht mehr $\mathfrak{O}$-unabhängig bzw. von der $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Es muß also

$$e \leqq a$$

sein.

Nun existiert nach Annahme eine Kohomologierelation

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0 \quad (\mathfrak{P}^{a-1}) \qquad (A_i \in \mathfrak{O}\,;\, i = 1, 2, \ldots, n)$$

mit mindestens einem durch $\mathfrak{P}^{e_i}$ unteilbaren Element A_i. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß nur $A_1, A_2, \ldots, A_s$ von Null verschieden sind. Es existiert also eine normale 1-Kokette h von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_{a-1}, für die

$$\textstyle\sum_{i=1}^{s} A_i f_i \equiv \delta h \mod \mathfrak{P}^{a-1} \tag{2.1}$$

gilt. Setzt man nun $A_i = \pi^{e_i - b_i} B_i$ mit $\mathfrak{P} \nmid B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, so muß es ein b_i mit $b_i > 0$ geben. Hierbei kann man ohne Einschränkung der

Allgemeinheit annehmen, daß $b_1 = \mathrm{Max}(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ ist. Aus der Kongruenz (2.1) erhält man ohne weiteres:

$$(2.2) \qquad \sum_{i=1}^{s} \pi^{b_1} A_i f_i \equiv \delta(\pi^{b_1} h) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^a,$$

wo $\pi^{b_1}h$ sicher eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_a wird. Da $\pi^{b_1}A_i \equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{e_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sind, so gibt es eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ derart, daß

$$(2.3) \qquad \sum_{i=1}^{s} \pi^{b_1} A_i f_i = \delta g.$$

(Man beachte, daß für jedes i $(1 \leqq i \leqq s)$ $\pi^{b_1}A_i f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^\infty)$ ist.) Weil aber $\pi^{b_1}A_1$ genau durch $\mathfrak{P}^{e_1}$ teilbar ist, so existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{O}$ mit $g(X_0) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{P}$[1]. Ferner folgt aus (2.2) und (2.3) die Kongruenz:

$$\delta(\pi^{b_1}h - g) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^a;$$

d. h. die normale 1-Kokette $\pi^{b_1}h - g$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_a ist eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_a)$.

Nun sei $a > e = \mathrm{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Dann ist $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ $\mathfrak{O}$-isomorph zu $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_a)$[2]; da jede 2-Kohomologieklasse aus $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ durch π^e annulliert ist, so ist es auch jede Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_a)$. Hieraus folgt die Kongruenz:

$$\pi^{e+b_1}h - \pi^e g \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^a.$$

Die letzte Kongruenz ergibt aber einen Widerspruch

$$\pi^e g(X_0) \equiv \pi^{b_1+e} h(X_0) \qquad \mathrm{mod}\ \mathfrak{P}^{e+1},$$

weil $\pi^e g(X_0) \not\equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{e+1}$ ist; also muß

$$a \leqq e$$

sein. Da nach dem oben Bewiesenen $a \geqq e$ ist, so gilt

$$a = e.$$

Hilfssatz 3. *Es sei* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *eine Kozyklenbasis von*

1) M III, S. 448—449, Zusatz.
2) M III, S. 451, Satz 2.

$H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ *und* e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ *die* $\mathfrak{O}$-*Länge von* f_i *in* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. *Dann ist* $e = \mathrm{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *die kleinste natürliche Zahl von der Art, daß für jede natürliche Zahl* m *mit* $m \geqq e$ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ $\mathfrak{O}$-*unabhängig bzw. von der* $\mathfrak{O}$-*Länge* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *in* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ *sind aber für* $m < e$ *nicht mehr so in* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Mit Hilfe von Hilfssatz 2 und Hilfssatz 3 beweist man folgenden

Zusatz zu Hilfssatz 3. *Es sei* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *eine Kozyklenbasis von* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ *und* e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ *sei die* $\mathfrak{O}$-*Länge von* f_i *in* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. *Setzt man dann* $e = \mathrm{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, *so ist für jede natürliche Zahl* m *mit* $m \geqq e$ *die normale* 2-*Kohomologiegruppe* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ $\mathfrak{O}$-*isomorph zu* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$, *und* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *bilden eine Kozyklenbasis von* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$; *ferner besitzen* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *bzw. die* $\mathfrak{O}$-*Länge* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *in* $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$.

Es sei $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wieder eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Dann kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit (nötigenfalls durch geeignete Numerierung) annehmen, daß die $\mathfrak{O}$-Längen e_i von den f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ auf folgende Weise angeordnet sind:

$$e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_n = e = \mathrm{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl ν mit $e > \nu$ sei

$$e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_p < e - \nu \leqq e_{p+1} \leqq \cdots \leqq e_n.$$

Dabei kann auch $p + 1 = 1$ oder $p + 1 = n$ sein. Dann wollen wir zeigen, daß in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ $f_1, f_2, \ldots, f_p$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_p$ besitzen, aber die $\mathfrak{O}$-Längen von $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$ gleich $e - \nu$ sind, und daß $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu})$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind. Da diese Tatsache nach Zusatz zu Hilfssatz 3 für $\nu = 0$ sicher richtig ist, so wollen wir annehmen, daß die obige Tatsache für ν $(e - 1 > \nu)$ richtig ist. Dann soll man beweisen, daß in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $f_1, f_2, \ldots, f_p$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \ldots, e_p$ und $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots, f_n$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $e - \nu - 1$ besitzen, und daß $f_1, f_2, \ldots, f_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind.

Nun sei

$$\sum_{i=1}^{p} X_i f_i + \sum_{j=p+1}^{n} X_j f_j \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^{e-\nu-1}), \tag{2.4}$$

wo die X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Hier kann man

$$X_i = \pi^{e_i - u_i} X'_i \quad , \quad X'_i \not\equiv 0 \quad \mod \mathfrak{P} \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

und

$$X_j = \pi^{e-\nu-1-u_j} X'_j, \; X'_j \not\equiv 0 \quad \mod \mathfrak{P} \quad (j = p+1, \; p+2, \ldots, n)$$

setzen. Wenn dabei $X_i = 0$ oder $X_j = 0$ ist, so setze man $u_i = -\infty$ oder $u_j = -\infty$, indem man unter π^{∞} das Nullelement versteht[1]. Nach (2.4) existiert eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu-1}$ derart, daß die Kongruenz

$$\sum_{i=1}^{p} \pi^{e_i - u_i} X'_i f_i + \sum_{j=p+1}^{n} \pi^{e-\nu-1-u_j} X'_j f_j \equiv \delta g \quad \mod \mathfrak{P}^{e-\nu-1}$$

gilt. Hieraus folgt ohne weiteres:

$$\sum_{i=1}^{p} \pi^{e_i - u_i + 1} X'_i f_i + \sum_{i=p+1}^{n} \pi^{e-\nu-u_j} X'_j f_j \equiv \delta(\pi g) \quad \mod \mathfrak{P}^{e-\nu}; \tag{2.5}$$

da πg sicher eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$ ist, so schließt man aus (2.5) nach Induktionsannahme:

$$e_i - u_i + 1 \geqq e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p) \text{ und } \quad e - \nu - u_j \geqq e - \nu$$
$$(j = p+1, \; p+2, \ldots, n).$$

Dies zeigt aber, daß $u_i \leqq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ und $u_j \leqq 0$ $(j = p+1, p+2, \ldots, n)$ sind; d. h. es ist $\mathrm{Max}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{Max}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \leqq 1$. Ferner folgt aus (2.5):

$$\sum_{i=1}^{p} \pi^{e_i - u_i + 1} X'_i f_i \equiv \delta(\pi g) \quad \mod \mathfrak{P}^{e-\nu}. \tag{2.6}$$

Da $\pi^{e_i} f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^{\infty})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind, so existieren normale 1-Koketten g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_{∞} so, daß

$$\pi^{e_i} f_i = \delta g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sind. Dabei bilden $\pi^{e-e_i} g_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H_1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_e)$ und die $\mathfrak{O}$-Länge von $\pi^{e-e_i} g_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_e)$ ist gleich e_i[2].

Nun nehmen wir an, daß $\mathrm{Max}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = 1$ und für ein geeignetes l $(1 \leqq l \leqq p)$ $u_l = 1$ ist. Dann folgt aus (2.6):

---

1) Man definiere $-(-\infty) = \infty$ und $a + \infty = \infty$ für eine ganze rationale Zahl a.

2) M III, S. 451, Satz 2.

$$\partial(X'_l g_l + \sum_{\substack{i=1\\ l\neq i}}^{p} X'_i \pi^{-u_i+1} g_i - \pi g) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

d. h. $X'_l g_l + \sum_{\substack{i=1\\ l\neq i}}^{p} X'_i \pi^{-u_i+1} g_i - \pi g$ ist eine Derivation von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$, also ist $\pi^\nu X'_l g_l + \sum_{\substack{i=1\\ l\neq i}}^{p} X'_i \pi^{\nu+1-u_i} g_i - \pi^{\nu+1} g$ eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_e)$. Da die $\pi^{e-e_i} g_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_e)$ bilden, so gilt die Kongruenz:

$$\begin{aligned}\pi^\nu X'_l g_l &+ \sum_{\substack{i=1\\ l\neq i}}^{p} X'_i \pi^{\nu+1-u_i} g_i - \pi^{\nu+1} g \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n} Y_i \pi^{e-e_i} g_i \qquad \mod \mathfrak{P}^e,\end{aligned}$$

wo die $Y_i (i=1,2,\dots,n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Hieraus schließt man:

$$\begin{aligned}h = (\pi^\nu X'_l - Y_l \pi^{e-e_l}) g_l &+ \sum_{\substack{i=1\\ l\neq i}}^{p} (X'_i \pi^{\nu+1-u_i} - Y_i \pi^{e-e_i}) g_i \\ &- \sum_{j=p+1}^{n} Y_j \pi^{e-e_j} g_j \equiv \pi^{\nu+1} g \qquad \mod \mathfrak{P}^e.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei ist $e - e_l > e-(e-\nu) = \nu$, also ist

$$\pi^\nu X'_l - Y_l \pi^{e-e_l} \not\equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{\nu+1}.$$

Daher existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{O}$ mit $h(X_0)\not\equiv 0 \mod \mathfrak{P}^{\nu+1}$ [1]. Wegen $e>\nu$ muß nach (2.7)

$$h(X_0) \equiv \pi^{\nu+1} g(X_0) \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{\nu+1}$$

sein, was aber ein Widerspruch ist. Daher ist $\mathrm{Max}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0$; dies besagt aber, daß in (2.4)

$$x_i \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{e_i} \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

und

$$x_j \equiv 0 \qquad \mod \mathfrak{P}^{e-\nu-1} \qquad (j=p+1,\ p+2,\dots,n)$$

sind, w. z. b. w.

Wenn man also die f_i $(i=1,2,\dots,n)$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $R_{e-\nu}$ betrachtet, so erzeugen die $f_i (i=1,2,\dots,n)$ einen $\mathfrak{O}$-Untermodul $H^2_1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$, und die $\mathfrak{O}$-Länge von $H^2_1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$

1) M III, S. 448—449, Zusatz.

ist gleich $\sum_{i=1}^{p} e_i + (n-p)(e-\nu)$. Somit ist bewiesen:

Satz 3. *Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ und e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$. Setzt man dann für eine natürliche Zahl m mit $m \leqq \mathrm{Max}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ $l_i = \mathrm{Min}(e_i, m)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, so besitzen $f_1, f_2, \dots, f_n$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $l_1, l_2, \dots, l_n$ in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$. Ferner erzeugen die f_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, betrachtet als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, einen $\mathfrak{O}$-Untermodul von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$ mit der $\mathfrak{O}$-Länge $\sum_{i=1}^{n} l_i$.*

§ 3. **Struktur der Derivationsmoduln.** Es sei $f_1, f_2, \dots, f_n$ eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$ und e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_\infty)$. Ferner sei $\pi \in \mathfrak{O}$ ein Primelement des nicht-trivialen Primideales $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$. Dann existiert für jedes i $(1 \leqq i \leqq n)$ eine normale 1-Kokette g_i von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ mit $\pi^{e_i} f_i = \delta g_i$. Wie in § 2 bemerkt ist, bilden

$$\pi^{e-e_1}g_1,\ \pi^{e-e_2}g_2, \dots, \pi^{e-e_n}g_n$$

eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_e)$. Im folgenden nehmen wir stets an, daß $e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_n$ sind.

Satz 4. *Es sei ν eine nicht-negative, ganze rationale Zahl mit $\nu < e$, und $e_1 \leqq e_2 \leqq \cdots \leqq e_p < e - \nu \leqq e_{p+1} \leqq \cdots \leqq e_n$. Dann bilden $\pi^{e-\nu-e_1}g_1, \pi^{e-\nu-e_2}g_2, \dots, \pi^{e-\nu-e_p}g_p$ und $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ zusammen eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$. Dabei besitzen $\pi^{e-\nu-e_1}g_1, \pi^{e-\nu-e_2}g_2, \dots, \pi^{e-\nu-e_p}g_p$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $e_1, e_2, \dots, e_p$ und $g_{p+1}, g_{p+2}, \dots, g_n$ die gleichen $\mathfrak{O}$-Längen $e-\nu$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$.*

Beweis. Für jede natürliche Zahl j mit $p+1 \leqq j \leqq n$ gilt:

$$\delta g_j = \pi^{e_j} f_j \equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

also sind die g_j $(j = p+1, p+2, \dots, n)$ Derivationen aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$. Da zu jedem g_j $(p+1 \leqq j \leqq n)$ ein Element Z_j aus $\mathfrak{O}$ mit $g_j(Z_j) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}$ existiert[1], so sind die $\mathfrak{O}$-Längen von den g_j $(j = p+1, p+2, \dots, n)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$ gleich $e - \nu$.

Da offenbar der Satz für $\nu = 0$ richtig ist[2], so nehmen wir an, daß der

1) M III, S. 448—449, Zusatz.
2) M III, S. 451, Satz 2.

Satz für ν' mit $e-1>\nu$ richtig ist. Es gelte nun eine Kongruenz:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\,\pi^{e-\nu-1-e_i}g_i+\sum_{j=p+1}^{n}X_jg_j\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu-1},$$

wo die X_i $(i=1,2,\ldots,n)$ Elemente aus $\mathfrak{O}$ bezeichnen. Dann erhält man durch Multiplikation mit π:

$$\sum_{i=1}^{p} X_i\pi^{e-\nu-e_i}g_i+\sum_{j=p+1}^{n}\pi X_jg_j\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu};$$

aus Induktionsannahme schließt man ohne weiteres:

$$X_i\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e_i} \qquad (i=1,2,\ldots,p),$$

und

$$X_j\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu-1} \qquad (j=p+1,\ p+2,\ldots,n),$$

weil $\pi X_j\equiv 0 \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu}$ $(j=p+1,\ p+2,\ldots,n)$ sein müssen. Dies zeigt aber, daß in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu-1})$ $\pi^{e-\nu-1-e_1}g_1,\ \pi^{e-\nu-1-e_2}g_2,\ldots,\ \pi^{e-\nu-1-e_p}g_p$ bzw. die $\mathfrak{O}$-Länge $e_1,\ e_2,\ldots,e_p$ und $g_{p+1},\ g_{p+2},\ldots,g_n$ die gleichen $\mathfrak{O}$-Längen $e-\nu-1$ besitzen, und daß $\pi^{e-\nu-1-e_1}g_1,\ \pi^{e-\nu-1-e_2}g_2,\ldots,\pi^{e-\nu-1-e_p}g_p$, $g_{p+1},\ldots,g_n$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;\ R_{e-\nu-1})$ $\mathfrak{O}$-unabhängig sind.

Nun sei D eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu-1})$. Dann ist πD sicher eine Derivation aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$. Da nach Induktionsannahme die $\pi^{e-\nu-e_i}g_i(i=1,2,\ldots,p)$ und die g_j $(j=p+1,\ p+2,\ldots,n)$ zusammen eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_{e-\nu})$ bilden, so existiert ein Elementsystem $Y_1,\ Y_2,\ldots,Y_n$ mit

$$\pi D\equiv \sum_{i=1}^{p} Y_i\,\pi^{e-\nu-e_i}g_i+\sum_{j=p+1}^{n}Y_jg_j \qquad \bmod \mathfrak{P}^{e-\nu}. \tag{3.1}$$

Wenn dabei eines von den Y_j $(j=p+1,\ p+2,\ldots,n)$ nicht durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist, so existiert ein Element X_0 aus $\mathfrak{O}$ mit

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i\pi^{e-\nu-e_i}g_i(X_0)+\sum_{j=p-1}^{n}Y_jg_j(X_0)\not\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}\,^{1)};$$

dies ergibt einen Widerspruch, weil nach (3.1)

$$\sum_{i=1}^{p} Y_i\pi^{e-\nu-e_i}g_i(X_0)+\sum_{j=p+1}^{n} Y_jg_j(X_0)\equiv \pi D(X_0)\equiv 0 \qquad \bmod \mathfrak{P}$$

sein müsste. Daher sind die Y_j $(j=p+1,\ p+2,\ldots,n)$ alle durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Hieraus schließt man wegen (3.1):

---

1) M III, S. 448—449, Zusatz.

$$D \equiv \sum_{i=1}^{p} Y_i \pi^{e-\nu-1-e_i} g_i + \sum_{j=p+1}^{n} (\pi^{-1} Y_j) g_j \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^{e-\nu-1};$$

d. h. die $\pi^{e-\nu-1-e_i} g_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ und die $g_j (j = p+1, p+2, \ldots, n)$ bilden zusammen eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_{e-\nu-1})$, w. z. b. w.

§ 4. Zusammenhang zwischen Derivationsmodul und 2-Kohomologiegruppe. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sei eine Kozyklenbasis von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$ und e_i $(1 \leqq i \leqq n)$ die $\mathfrak{O}$-Länge von f_i in $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_\infty)$. Ferner sei π $(\in \mathfrak{O})$ ein Primelement des nicht-trivialen Primideals $\mathfrak{P}$ aus $\mathfrak{O}$. Dann existiert zu jeder natürlichen Zahl i mit $1 \leqq i \leqq n$ eine normale 1-Kokette g_i von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_∞ mit $\pi^{e_i} f_i = \delta g_i$. Ist nun m eine beliebige natürliche Zahl, so setze man $m_i = \text{Max}(m, e_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und betrachte die $\pi^{m_i - e_i} g_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Dann bilden die $\pi^{m_i - e_i} g_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ für $m \geqq \text{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nach Satz 2 von M III und für $m < \text{Max}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ nach Satz 4 eine $\mathfrak{O}$-Basis von $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$. Ferner ist die $\mathfrak{O}$-Länge von $\pi^{m_i - e_i} g_i$ $(1 \leqq i \leqq n)$ in $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ gleich l_i, wo $l_i = \text{Min}(m, e_i)$ gesetzt ist. Betrachtet man nun $f_1, f_2, \ldots, f_n$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m, so bilden die $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ eine $\mathfrak{O}$-Basis des durch $f_1, f_2, \ldots, f_n$ erzeugten $\mathfrak{O}$-Untermoduls $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ von $H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$, und die $\mathfrak{O}$-Länge von $f_i (1 \leqq i \leqq n)$ in $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ ist gleich l_i (nach Zusatz zu Hilfssatz 3 und Satz 3).

Nun ordnen wir einem normalen 2-Kozyklus $\sum_{i=1}^{n} A_i f_i$ $(A_i \in \mathfrak{O}; i = 1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über R_m die Derivation $\sum_{i=1}^{n} A_i \pi^{m_i - e_i} g_i$ aus $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ zu. Weil aus $\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0$ $(\mathfrak{P}^m)$ die Kongruenzen $A_i \equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^{l_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folgen, so gilt

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \pi^{m_i - e_i} g_i \equiv 0 \qquad \text{mod } \mathfrak{P}^m.$$

Umgekehrt folgt aus $\sum_{i=1}^{n} A_i \pi^{m_i - e_i} g_i \equiv 0$ mod $\mathfrak{P}^m$ offenbar:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f_i \sim 0 \qquad (\mathfrak{P}^m).$$

Hieraus schließt man ohne weiteres, daß die obige Zuordnung einen $\mathfrak{O}$-Isomorphismus von $H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ auf $H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)$ ergibt; also gilt folgende $\mathfrak{O}$-Längenrelation:

$$L(H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)).$$

Da nach Satz 1 $L(H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m))$ besteht, so muß $L(H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m)) = L(H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; R_m))$ sein, woraus sofort die Gleichung

$$H_1^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)=H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)$$

folgt. Aus dem eben Bewiesenen und aus Hilfssatz 1 folgt:

Satz 5. *Für eine nicht-negative, ganze rationale Zahl m gilt stets folgende $\mathfrak{O}$-Isomorphierelation:*

$$H^2(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m)\cong H^1(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}\,;R_m).$$

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received July 24, 1956*)