UNE NOTE SUR L'ESPACE PRODUIT D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE PAR LUI-MÊME

KAICHIRO FUJIWARA

0. Soit E un espace topologique. Désignons par $E \times E$ l'espace produit topologique comme usuel. Dans cette note, nous allons considérer la propriété de E suivante :

(I) *Si A et B sont deux ensembles fermés dans E et si W est un ensemble ouvert dans $E \times E$ tel que $A \times B \subset W$, alors il existe deux ensembles ouverts U et V dans E tels que $A \times B \subset U \times V \subset W$.* Par exemples, les espaces compacts ainsi que les espaces discrets possèdent cette propriété. De plus, de cette propriété sont tirées quelques propriétés importantes de ces espaces¹⁾. Le but de cette note est de chercher des conditions pour qu'un espace possède cette propriété. En vertu du Théorème 1, c'est réduit à considérer la propriété (II) suivante (pour les espaces séparés) :

(II) *Si $a \in E$ et si W est un ensemble ouvert dans $E \times E$ tel que $\{a\} \times E \subset W$, alors il existe un voisinage U de a tel que $U \times E \subset W$.*

1. Lemme 1. *Soit E un espace topologique possédant la propriété (II). Si A est un ensemble quelconque et B est un ensemble fermé dans E et si W est un ensemble ouvert dans $E \times E$ tel que $A \times B \subset W$, alors il existe un ensemble ouvert U dans E tel que $A \times B \subset U \times B \subset W$.*

Démonstration. Posons $W' = W \cup (E \times (E - B))$. Alors W' est ouvert dans $E \times E$ et $A \times E \subset W'$. Donc, d'après (II), il existe un voisinage ouvert $U(a)$ de a tel que $U(a) \times E \subset W'$ pour chaque point a de A . Définissons $U = \bigcup \{U(a) : a \in A\}$. Comme $(U \times B) \cap (E \times (E - B)) = \emptyset$, $U \times B \subset W$, c. q. f. d.

Corollaire. *Tout sous-espace fermé d'un espace topologique possédant la propriété (II) la possède aussi.*

Théorème 1. *Pour qu'un espace séparé topologique possède la propriété (I), il faut et il suffit qu'il soit normal et possède la pro-*

1) Voir par exemple J. L. Kelley, *General Topology*, New York (1955).

priété (II).

Démonstration. Soit E un espace séparé topologique. D'abord, supposons que E possède la propriété (I). Il est clair que (I) entraîne (II). Nous allons montrer la normalité de E . Pour cela, soient A et B deux ensembles fermés non vides sans point commun. Désignons par W le complémentaire du diagonale dans $E \times E$. Alors, parce que $A \times B$ est contenu dans l'ensemble ouvert W , il existe deux ensembles ouverts U et V tels que $A \times B \subset U \times V \subset W$, ce qui exprime $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. Donc E est normal.

Réciproquement, supposons que E est un espace normal et possède la propriété (II). Soient A et B deux ensembles fermés dans E et soit W un ensemble ouvert dans $E \times E$ tel que $A \times B \subset W$. Alors, d'après le Lemme 1, il existe un ensemble ouvert U_0 tel que $A \times B \subset U_0 \times B \subset W$. Prenons un ensemble ouvert U tel que $A \subset U \subset \bar{U} \subset U_0$. En appliquant le Lemme 1 à la relation $B \times \bar{U} \subset \{(x, y) : (y, x) \in W\}$, on peut trouver un ensemble ouvert V tel que $A \times B \subset U \times V \subset W$, comme désiré, c. q. f. d.

2. Maintenant, nous posons quelques définitions. Soit $\mathfrak{B}$ une base d'un filtre $\mathfrak{F}$ sur un espace topologique E . Supposons qu'à chaque ensemble U de $\mathfrak{B}$ correspond un ensemble ouvert G_U dans E vérifiant la condition que $U \subset V$ entraîne $G_U \supset G_V$, où $U, V \in \mathfrak{B}$. Si, de plus, la famille $\{G_U : U \in \mathfrak{B}\}$ est un recouvrement de E , elle s'appelle un *recouvrement ouvert suivant* $\mathfrak{B}$.

Soit $\mathfrak{H} = \{G_U : U \in \mathfrak{B}\}$ un recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}$. Pour que $\mathfrak{H}$ contiendrait un sous-recouvrement fini, il faut et il suffit qu'il y a $U_0 \in \mathfrak{B}$ tel que $G_{U_0} = E$. De plus, on peut vérifier sans peine que, pour que tout recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{F}$ contiendrait un sous-recouvrement fini, il faut et il suffit que tout recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}$ contiendrait un sous-recouvrement fini. E est dit *$\mathfrak{F}$ -compact* si tout recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{F}$ contient un sous-recouvrement fini. En particulier, E s'appelle à *caractère compact*¹⁾ s'il est $\mathfrak{B}(x)$ -compact quel que soit $x \in E$, où $\mathfrak{B}(x)$ désigne le filtre des voisinages de x . Ainsi, tout espace discret est à caractère compact. Pour qu'un espace topologique vérifiant le premier axiome de dénombrabilité soit à caractère compact, il faut et il suffit qu'il soit dénombrablement compact ou bien soit discret. La théorie des espaces $\mathfrak{F}$ -compacts sera considérée dans autres articles.

1) Cf. T. Inagaki, *Contribution à la Topologie II*, Math. J. Okayama Univ., Vol. 2 (1953).

Pour abrégier des langages, nous dirons qu'une famille d'ensembles est *totalelement ordonnée* lorsqu'elle est totalement ordonnée en considérant la relation d'inclusion $\subset$ comme la relation d'ordre.

Pour nécessité dans la suite, nous montrerons le

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{B}$ une base totalelement ordonnée d'un filtre sur un espace topologique E et soit $\mathfrak{R} = \{G_U : U \in \mathfrak{B}\}$ un recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}$. Pour que $\mathfrak{R}$ contiendrait un sous-recouvrement fini, il faut et il suffit que :*

(*) *il existe un ensemble U_0 de $\mathfrak{B}$ tel que $\bigcup \{G_U : x \in U \in \mathfrak{B}\} = E$ pour tout $x \in U_0$.*

Démonstration. Evidemment c'est nécessaire. Nous montrerons la suffisance. Si tout $U \in \mathfrak{B}$ contient U_0 , il est clair que $G_{U_0} = E$. S'il existe $U_1 \in \mathfrak{B}$ tel que $U_0 \not\subset U_1$, U_1 doit proprement contenu dans U_0 . Alors, soit x un point de $U_0 - U_1$. D'après (*), $\bigcup \{G_U : x \in U\} = E$. En outre, $x \in U$ entraînant $U_1 \subset U$, $G_{U_1} \supset G_U$, d'où $G_{U_1} = E$. En tout cas, $E \in \mathfrak{R}$, c. q. f. d.

3. Les mêmes notations que celles dans §2 soient employées. Pour un point a de E , $\mathfrak{B}(a)$ désigne une base fixée du filtre $\mathfrak{B}(a)$ des voisinages de a . Alors,

Lemme 3. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout ensemble ouvert W dans $E \times E$ tel que $\{a\} \times E \subset W$, il existe un voisinage U de a tel que $U \times E \subset W$.*

(2) *Pour tout recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}(a)$, la proposition (*) est vraie en remplaçant $\mathfrak{B}$ par $\mathfrak{B}(a)$.*

Démonstration. (1) entraîne (2). En effet, soit $\mathfrak{R} = \{G_U : U \in \mathfrak{B}(a)\}$ un recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}(a)$. Désignons par W l'intérieur de l'ensemble $\bigcup \{U \times G_U : U \in \mathfrak{B}(a)\}$. Alors, évidemment $\{a\} \times E \subset W$. Par suite, il existe $U_0 \in \mathfrak{B}(a)$ tel que $U_0 \times E \subset W$ d'après (1). Cette dernière relation exprime que, quel que soit $x \in U_0$ et quel que soit $y \in E$, il existe $U \in \mathfrak{B}(a)$ tel que $x \in U$ et $y \in G_U$. C'est-à-dire, $\bigcup \{G_U : x \in U \in \mathfrak{B}(a)\} = E$ pour tout $x \in U_0$.

(2) entraîne (1). Soit W un ensemble ouvert contenant $\{a\} \times E$. Pour chaque ensemble $U \in \mathfrak{B}(a)$, désignons par G_U l'intérieur de l'ensemble $\{x : U \times \{x\} \subset W\}$. Alors, comme aisément vu, $\{G_U : U \in \mathfrak{B}(a)\}$ est un recouvrement ouvert suivant $\mathfrak{B}(a)$. Donc, d'après (2), il existe $U_0 \in \mathfrak{B}(a)$ tel que $\bigcup \{G_U : x \in U \in \mathfrak{B}(a)\} = E$ pour tout $x \in U_0$. Par conséquent, on a $U_0 \times E \subset W$. En effet, si $(x, y) \in U_0 \times E$, il y a

$U_1 \in \mathfrak{B}(a)$ tel que $x \in U_1$ et $y \in G_{v_1}$. Donc $(x, y) \in U_1 \times G_{v_1} \subset W$,
c. q. f. d.

Immédiatement de ce Lemme et du Lemme 2,

Lemme 4. *Si a admet une base totalement ordonnée du filtre des voisinages, les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) (I) du Lemme 3.

(2) E est $\mathfrak{B}(a)$ -compact.

Enfin, on a le

Théorème 2. *Tout espace à caractère compact possède la propriété (II). En particulier, pour qu'un espace topologique dont chaque point admet une base totalement ordonnée du filtre des voisinages possède la propriété (II), il faut et il suffit qu'il soit à caractère compact.*

En particulier,

Corollaire 1. *Pour qu'un espace topologique vérifiant le premier axiome de dénombrabilité possède la propriété (II), il faut et il suffit qu'il soit ou bien discret ou bien dénombrablement compact.*

Corollaire 2. *Pour qu'un espace métrisable possède la propriété (II) (et donc (I)), il faut et il suffit qu'il soit ou bien discret ou bien compact.*

4. En dernier lieu, nous donnerons une condition suffisante pour qu'un espace uniforme possède la propriété (II).

Théorème 3. *Soit E un espace uniforme. Si tout recouvrement ouvert binaire de l'espace produit uniforme $E \times E$ possède la propriété de Lebesgue¹⁾, alors E possède la propriété (I).*

Démonstration. En effet, soient A et B deux ensembles fermés dans E et soit W un ensemble ouvert contenant $A \times B$. D'après la propriété de Lebesgue, il existe un entourage U de la structure uniforme sur $E \times E$, tel que $U(A \times B) \subset W$. Par la définition de la structure uniforme produit, il existe un entourage V de la structure uniforme sur E tel que $V(A) \times V(B) \subset U(A \times B)$. Ce montre que E possède la propriété (I) comme l'espace topologique, c. q. f. d.

1) Voir K. Iséki, *On the Property of Lebesgue in Uniform Spaces I—V*, Proc. Japan Acad., Vol. 31 (1955).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received January 13, 1956)