

THEORIE DER 2-KOHOMOLOGIEGRUPPEN IN DISKRET BEWERTETEN PERFEKTEN KÖRPERN¹⁾

MIKAO MORIYA

Einleitung.

Anschließend an eine vor kurzem erschienene Arbeit von mir²⁾ will ich hier die Strukturtheorie der 2-Kohomologiegruppen entwickeln, welche die Hauptordnung eines diskret bewerteten perfekten Körpers als Definitionsbereich besitzen.

Es sei k ein diskret bewerteter perfekter (kommutativer) Körper mit $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung und K eine endlich-separable Erweiterung über k , deren Hauptordnung mit $\mathfrak{O}$ bezeichnet wird. Ferner betrachten wir über K eine beliebige endlich-separable Erweiterung $\bar{K}$ mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Hauptordnung. Bekanntlich besitzt dann $\bar{\mathfrak{O}}$ nur ein einziges nicht-triviales Primideal $\bar{\mathfrak{P}}$ (d. h. $\bar{\mathfrak{P}}$ ist das von (0) und $\bar{\mathfrak{O}}$ verschiedene Primideal aus $\bar{\mathfrak{O}}$). Zu einem Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}_m$ von $\bar{\mathfrak{O}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$ ($m \geq 0$) kann man 2-Kozyklen und 2-Koränder von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ definieren. (Zur Definition siehe § 1. 1) Die Gesamtheit $Z_m^{(2)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ bildet einen Modul mit $\bar{\mathfrak{O}}$ als Multiplikatorenbereich und die Gesamtheit $B_m^{(2)}$ aller 2-Koränder von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ einen $\bar{\mathfrak{O}}$ -Untermodule. Der Faktormodul $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m) = Z_m^{(2)}/B_m^{(2)}$ ist die 2-Kohomologiegruppe von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ genannt; jedes Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ heißt eine 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$.

Jede 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ besitzt stets endliche Kompositionsreihe, welche aus lauter $\bar{\mathfrak{O}}$ -Untermodule besteht; die Länge dieser Kompositionsreihe nenne ich die $\bar{\mathfrak{O}}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$. Dabei ist die $\bar{\mathfrak{O}}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ gleich dem Exponenten $\bar{d}(K/k)$ der Differenten von K/k in bezug auf $\bar{\mathfrak{P}}$, wenn m hinreichend groß ist. Ferner besitzt $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ endliche $\bar{\mathfrak{O}}$ -Basis, wenn es kein Nullmodul ist; d. h. es gibt endlich viele, von der Nullkohomologiekategorie 0 ver-

1) Die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit habe ich schon mitgeteilt. Vgl. M. Moriya, Theorie der 2-Cohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern, Proc. Japan Acad., Vol. 30 (1954), S. 787—790.

2) M. Moriya, Zur Fortsetzung der 2-Cozyklen in einem kommutativen Ring, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 4 (1954), S. 1—19. Ich zitiere diese Arbeit mit M II.

schiedene 2-Kohomologieklassen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ derart, daß sich jede 2-Kohomologieklass aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ als Linearform in $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ mit Koeffizienten aus $\bar{\mathfrak{D}}$ darstellen läßt, und daß aus der Gleichung $\bar{A}_1\bar{C}_1 + \bar{A}_2\bar{C}_2 + \dots + \bar{A}_r\bar{C}_r = 0$ ($\bar{A}_i \in \bar{\mathfrak{D}}, i=1, 2, \dots, r$) stets $\bar{A}_1\bar{C}_1 = \bar{A}_2\bar{C}_2 = \dots = \bar{A}_r\bar{C}_r = 0$ folgen.

In § 1 gebe ich einige Definitionen und einfache Resultate, welche unmittelbar aus diesen Definitionen folgen. In § 2 betrachte ich eine Zwischenhauptordnung $\mathfrak{D}^{(1)}$ zwischen $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{D}$. Ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ 2-Korand von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ wird, heißt „zerfällt in $\mathfrak{D}^{(1)}$ “. Die Gesamtheit $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ aller derjenigen 2-Kohomologieklassen aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$, die irgendeinen in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallenden 2-Kozyklus enthält, bildet einen $\bar{\mathfrak{D}}$ -Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$. Es zeigt sich dabei, daß für ein hinreichend großes m $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ stets zu $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ $\bar{\mathfrak{D}}$ -isomorph ist. Es handelt sich in § 3 um die Erweiterung des Multiplikatorenbereiches $\bar{\mathfrak{D}}$ von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ zu einer Oberhauptordnung von $\bar{\mathfrak{D}}$. In § 4 bestimme ich die Struktur von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ im Falle, wo $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{o}$ durch Ringadjunktion eines einzigen Elementes entsteht. Dabei heiße $\mathfrak{D}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$. In diesem Fall ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ stets zyklischer $\bar{\mathfrak{D}}$ -Modul, und die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ ist gleich $\text{Min}(\bar{d}(K/k), m)$. Eine Hauptordnung $\mathfrak{D}$, welche als ein Turm der einfach normalen Hauptordnungen definiert ist, heißt über $\mathfrak{o}$ normal. In § 5 wird die Struktur von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ bestimmt, wenn $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$ normal ist. Im letzten Paragraphen behandle ich den Fall, wo $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$ nicht normal ist. Dazu betrachte ich eine $\bar{K}$ enthaltende, über k galoissche Erweiterung K^* . Dann ist die Hauptordnung $\mathfrak{D}^*$ von K^* normal über $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{D}$. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}^*$ und mit $\mathfrak{R}_n^*$ den Restklassenring von $\mathfrak{D}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*n}$, so gilt folgende $\mathfrak{D}^*$ -Isomorphierelation:

$$H^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_n^*)/H^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}; \mathfrak{R}_n^*) \cong H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_n^*).$$

Aus der obigen Relation folgen zunächst, daß die $\mathfrak{D}^*$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_n^*)$ endlich ist, und daß $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_n^*)$ stets endliche $\mathfrak{D}^*$ -Basis besitzt, wenn es kein Nullmodul ist. Ist dabei n durch m teilbar, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_n^*)$ gleich der Multiplikatorenbereichserweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ zu $\mathfrak{D}^*$. Nach der in § 3 entwickelten Theorie besitzt dann $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge und sogar endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Basis, wenn es kein Nullmodul ist. Ferner sind für hinreichend große natürliche Zahlen m die 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ alle einander $\bar{\mathfrak{D}}$ -isomorph, und sie haben die gleiche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge $\bar{d}(K/k)$.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Kapitel I. Fundamentealeigenschaften der 2-Kohomologiegruppen.

§ 1. Vorbereitungen.

§ 2. Zerfällung der 2-Kohomologieklassen.

§ 3. Erweiterung des Multiplikatorenbereiches einer 2-Kohomologiegruppe.

Kapitel II. Struktur der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern.

§ 4. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit einfach normaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

§ 5. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit normaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

§ 6. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit allgemeiner Hauptordnung als Definitionsbereich.

Kapitel I. Fundamentealeigenschaften der 2-Kohomologiegruppen.

In diesem Kapitel bezeichnet $\mathfrak{o}$ durchweg die Hauptordnung eines diskret bewerteten perfekten Körpers k und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung K über k . Ferner bezeichnet $\overline{\mathfrak{O}}$ die Hauptordnung einer beliebigen endlich-separablen Erweiterung $\overline{K}$ über K ($\overline{K}$ kann eventuell mit K übereinstimmen) und $\overline{\mathfrak{P}}$ das nicht-triviale Primideal aus $\overline{\mathfrak{O}}$.

§ 1. Vorbereitungen

1. 2-Kozyklen und 2-Koränder. Für eine nicht-negative ganze rationale Zahl m betrachten wir den Restklassenring $\overline{\mathfrak{R}}_m$ von $\overline{\mathfrak{O}}$ nach $\overline{\mathfrak{P}}^m$. Hierbei lassen wir auch $m = \infty$ zu, indem wir unter $\overline{\mathfrak{P}}^\infty$ das Nullideal aus $\overline{\mathfrak{O}}$ und infolgedessen unter $\overline{\mathfrak{R}}_\infty$ die Hauptordnung $\overline{\mathfrak{O}}$ selbst versteht.

Nun sei f eine eindeutige Abbildung des Produktraumes $\mathfrak{O} \times \mathfrak{O}$ in $\overline{\mathfrak{O}}$ mit folgenden Eigenschaften:

1) Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X, Y) \equiv f(Y, X) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}.$$

2) Für beliebige Elemente $X_i, Y_i (i = 1, 2)$ aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$f(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) \equiv \sum_{i,j=1}^2 f(X_i, Y_j) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}.$$

3) Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{O}$ gilt

$$Xf(Y, Z) + f(X, YZ) \equiv f(XY, Z) + Zf(X, Y) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}.$$

4) Für beliebige Elemente x, y aus $\mathfrak{o}$ gilt

$$f(x, y) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}.$$

Dabei soll man für $\text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ die Kongruenz durch die Gleichheit ersetzen. Dann heißt f ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Zwei 2-Kozyklen f_1 und f_2 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ heißen einander *gleich*, wenn $f_1 \equiv f_2 \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ gilt¹⁾.

Bemerkung. Ist f ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, so kann man für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$ dem $f(X, Y)$ eindeutig die $f(X, Y)$ enthaltende Restklasse $\overline{f}(X, Y)$ aus dem Restklassenring $\overline{\mathfrak{R}}_m$ zuordnen. Wegen der Eigenschaften 1)–4) wird dann $\overline{f}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ im eigentlichen Sinne, es ist aber in unserer Theorie vorteilhafter, daß man nicht $\overline{f}$ sondern f heranzieht.

Eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ heißt eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, wenn für jedes Element x aus $\mathfrak{o}$ stets $g(x) \equiv 0 \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ und für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$ stets $g(X+Y) \equiv g(X) + g(Y) \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ gilt²⁾. Aus einer 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ kann man stets einen 2-Kozyklus δg von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ bilden, indem man für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$

$$\delta g(X, Y) = Yg(X) + Xg(Y) - g(XY)$$

setzt. Dabei nennt man δg den 2-Korand von g .

Sind nun f_1, f_2 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, so definiert man die Summe $f_1 + f_2$ von f_1 und f_2 durch die Gleichung

$$(f_1 + f_2)(X, Y) = f_1(X, Y) + f_2(X, Y),$$

wo X, Y unabhängig alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ durchlaufen. Offenbar ist $f_1 + f_2$ auch ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Man verifiziert ohne Schwierigkeit, daß die Gesamtheit $Z_m^{(2)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ bei der oben definierten Summenbildung einen $\overline{\mathfrak{D}}$ -Modul bildet. Ein 2-Kozyklus f' von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ heißt zu f *kohomolog*, wenn es eine 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ gibt, so daß

$$f' \equiv f + \delta g \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

ist, in Zeichen: $f \sim f' (\overline{\mathfrak{P}}^m)$. Ist insbesondere

$$f' \equiv \delta g \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m,$$

so heiße f' zur Null kohomolog: $0 \sim f' (\overline{\mathfrak{P}}^m)$. Nach Definition gilt offenbar folgende Äquivalenzrelation:

1) Dies bedeutet, daß für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$ stets

$$f_1(X, Y) \equiv f_2(X, Y) \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

gilt.

2) g heiße eine lineare Abbildung $\text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ von $\mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{D}}$.

- i) $f \sim f (\overline{\mathfrak{P}}^m)$.
- ii) Aus $f \sim f' (\overline{\mathfrak{P}}^m)$ folgt $f' \sim f (\overline{\mathfrak{P}}^m)$.
- iii) Sind $f \sim f'$, $f' \sim f'' (\overline{\mathfrak{P}}^m)$, so ist

$$f \sim f'' (\overline{\mathfrak{P}}^m).$$

Wegen der obigen Äquivalenzrelation kann man von einander kohomologen 2-Kozyklen sprechen.

Nun bildet die Gesamtheit $B_m^{(2)}$ aller zur Null kohomologen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ offenbar einen $\mathfrak{D}$ -Untermodul von $Z_m^{(2)}$; der Faktormodul $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $Z_m^{(2)}$ nach $B_m^{(2)}$ besitzt $\mathfrak{D}$ als Linksmultiplikatorenbereich, er heiße die *2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Jedes Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ist eine *2-Kohomologieklass*e von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ genannt.

2. Normale 2-Kozyklen und normale 2-Kohomologieklassen. Ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ heißt *normal*, wenn für ein beliebiges Element x bzw. X aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{D}$ stets

$$f(x, X) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

gilt. Eine 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ heißt *normal*, wenn stets die Kongruenz

$$g(xX) \equiv xg(X) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

erfüllt ist, wo x bzw. X alle Elemente aus $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{D}$ durchläuft.

Es sei $W_1 = 1, W_2, \dots, W_n$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$ und $X = \sum_{i=1}^n x_i W_i$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{D}$, wo die $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ Elemente aus $\mathfrak{o}$ bezeichnen. Dann setze man für einen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$:

$$g(x_i W_i) = f(x_i, W_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{und} \quad g(X) = \sum_{i=1}^n g(x_i W_i).$$

Nach Definition ist g sicher eine lineare Abbildung mod $\overline{\mathfrak{P}}^m$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ in $\mathfrak{D}$, und außerdem gilt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$:

$$g(x) = g(xW_1) = f(x, W_1) = f(x, 1) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m;$$

d. h. g ist eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Ferner besteht wegen der Relation $xf(x_i, W_i) + f(x, x_i W_i) \equiv f(xx_i, W_i) + W_i f(x, x_i) \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ folgende Kongruenz:

$$\begin{aligned} f(x, x_i W_i) &\equiv -xf(x_i, W_i) + f(xx_i, W_i) \\ &\equiv -xg(x_i W_i) - x_i W_i g(x) + g(xx_i W_i) \\ &\equiv -\delta g(x, x_i W_i) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m. \end{aligned}$$

Setzt man also $f_0 = f + \delta g$, so gilt offenbar :

$$\begin{aligned} f_0(x, X) &= f(x, X) + \delta g(x, X) \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \{ f(x, x_i W_i) + \delta g(x, x_i W_i) \} \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m; \end{aligned}$$

d. h. der zu f kohomologe 2-Kozyklus f_0 ist ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$. Mithin ist gezeigt, daß jede 2-Kohomologieklassse von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ mindestens einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ enthält.

Nun sei der 2-Korand einer 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ normal. Dann ist

$$\delta g(x, X) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m;$$

wegen $g(x) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m$ folgt sofort :

$$\begin{aligned} \delta g(x, X) &= xg(X) + Xg(x) - g(xX) \\ &\equiv xg(X) - g(xX) \equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^m, \end{aligned}$$

also muß g notwendig eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ sein. Somit ist bewiesen :

Ist ein normaler 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ der 2-Korand einer 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$, so ist g normal.

Offenbar bildet die Gesamtheit $Z_{\sigma, m}^{(2)}$ aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ einen $\mathfrak{D}$ -Untermodule von $Z_m^{(2)}$, und ferner stimmt die Gesamtheit $B_{\sigma, m}^{(2)}$ der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ mit $Z_{\sigma, m}^{(2)} \cap B_m^{(2)}$ überein. Der Faktormodul $H_{\sigma}^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \mathfrak{R}_m)$ von $Z_{\sigma, m}^{(2)}$ nach $B_{\sigma, m}^{(2)}$ heißt die *normale 2-Kohomologiegruppe* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ und ein Element aus $H_{\sigma}^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \mathfrak{R}_m)$ eine *normale 2-Kohomologieklassse* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$.

Da jede 2-Kohomologieklassse $\bar{C}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ einen normalen 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ enthält, so ordnen wir $\bar{C}$ die f_0 enthaltende, normale 2-Kohomologieklassse $\bar{C}_0(f_0)$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$ zu. Nach dem oben Bewiesenen ist diese Zuordnung von der Wahl der normalen 2-Kozyklen aus $\bar{C}$ unabhängig, also ist $\bar{C}_0(f_0)$ durch $\bar{C}$ eindeutig bestimmt. Hiernach beweist man ohne Schwierigkeit folgenden

Hilfssatz 1. *Jede 2-Kohomologieklassse $\bar{C}$ aus $H_{\sigma}^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \mathfrak{R}_m)$ enthält mindestens einen normalen 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m$. Ordnet man dabei $\bar{C}$ die f_0 enthaltende, normale 2-Kohomologieklassse $\bar{C}_0$ zu, so stellt diese Zuordnung einen $\mathfrak{D}$ -Isomorphismus von $H_{\sigma}^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \mathfrak{R}_m)$ auf $H_{\sigma}^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \mathfrak{R}_m)$ her.*

3. $\mathfrak{D}$ -Längen und $\mathfrak{D}$ -Basen. Eine endliche absteigende Folge von

den $\mathfrak{D}$ -Untermoduln aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$

$$U_0 = H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m) \supseteq U_1 \supseteq \dots \supseteq U_s = B_m^{(2)}$$

heißt eine $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$, wenn die Faktormoduln U_{i-1}/U_i ($i = 1, 2, \dots, s$) einfacher $\mathfrak{D}$ -Modul sind. Wenn $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ überhaupt eine $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihe besitzt, so sind die Längen aller $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihen von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ nach dem Satz von Jordan-Hölder einander gleich; d. h. die Länge irgendeiner $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihe von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ ist eine Invariante von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$, sie heiße im folgenden die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$. Ebenso kann man die $\mathfrak{D}$ -Länge der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ definieren.

Es seien $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ 2-Kohomologieklassen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}_m$, welche alle von der Nullklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ verschieden sind. Dann heißen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig, wenn aus einer beliebigen Gleichung

$$\bar{A}_1 \bar{C}_1 + \bar{A}_2 \bar{C}_2 + \dots + \bar{A}_r \bar{C}_r = 0 \quad (\text{Nullklasse aus } H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m))$$

stets $\bar{A}_1 \bar{C}_1 = \bar{A}_2 \bar{C}_2 = \dots = \bar{A}_r \bar{C}_r = 0$ folgen, wo die $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Ein System der $\mathfrak{D}$ -unabhängigen 2-Kohomologieklassen $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}_m$ heißt eine $\mathfrak{D}$ -Basis, wenn jede 2-Kohomologieklass $\bar{C}$ aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ von der Form

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^r \bar{A}_i \bar{C}_i$$

ist, wo die $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) Elemente aus $\mathfrak{D}$ bezeichnen. Ebenso kann man von einer $\mathfrak{D}$ -Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ sprechen.

Nun sei $\{\bar{C}\}$ der durch eine 2-Kohomologieklass $\bar{C}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}_m$ erzeugte $\mathfrak{D}$ -Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$. Besitzt dann $\{\bar{C}\}$ eine $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihe, so heiße die Länge dieser $\mathfrak{D}$ -Kompositionsreihe die $\mathfrak{D}$ -Länge von $\bar{C}$. Ordnet man nun einem beliebigen Element $\bar{X}$ aus $\mathfrak{D}$ $\bar{X}\bar{C}$ zu, so ist dadurch $\mathfrak{D}$ als Modul auf $\{\bar{C}\}$ $\mathfrak{D}$ -homomorph abgebildet. Dabei bildet der Kern dieses $\mathfrak{D}$ -Homomorphismus ein Ideal $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{D}$, welches das annullierende Ideal von $\bar{C}$ genannt ist; also ist $\{\bar{C}\}$ $\mathfrak{D}$ -isomorph zum Restklassenring $\mathfrak{D}/\mathfrak{U}$. Da $\mathfrak{U}$ eine Potenz $\mathfrak{P}^l$ von $\mathfrak{P}$ ist, so ist die $\mathfrak{D}$ -Länge von $\bar{C}$ offenbar gleich dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten l von $\mathfrak{U}$.

Es besitze $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ eine endliche $\mathfrak{D}$ -Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ und jedes $\bar{C}_i$ ($1 \leq i \leq r$) sei von der $\mathfrak{D}$ -Länge l_i . Dann bestätigt man leicht, daß die Summe $\sum_{i=1}^r l_i$ die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ ist.

§ 2. Zerfällung der 2-Kohomologieklassen.

In diesem Paragraphen bezeichnet $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ die normale 2-Koho-

mologiegruppe, welche schon in § 1.2 definiert ist.

Nun sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen K und k ; ferner sei $\mathfrak{D}^{(1)}$ die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ heißt dann „zerfällt in $\mathfrak{D}^{(1)}$ “, wenn es eine 1-Kokette $g^{(1)}$ von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ gibt, so daß die Einschränkung von f auf $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o} \bmod \overline{\mathfrak{P}}^m$ gleich $\delta g^{(1)}$ ist. Für beliebige Elemente $x^{(1)}, y^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$ gilt also

$$f(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv \delta g^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) \bmod \overline{\mathfrak{P}}^m.$$

Nun legen wir eine Minimalbasis $W_1 = 1, W_2, \dots, W_n$ von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{D}^{(1)}$ fest, und für ein Element $X = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} W_i$ ($x_i^{(1)} \in \mathfrak{D}^{(1)}, i = 1, 2, \dots, n$) aus $\mathfrak{D}$ definieren wir eine 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ durch die Gleichung

$$g(X) = g^{(1)}(x_i^{(1)}).$$

Ersichtlich ist g eine Fortsetzung von $g^{(1)}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$. Nach Definition ist $g(X)$ offenbar durch die Angabe der Minimalbasis $W_1, W_2, \dots, W_n$ und durch X eindeutig bestimmt. Bildet man nun den 2-Kozyklus

$$f' = f - \delta g,$$

so gilt für beliebige Elemente $x^{(1)}, y^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} f'(x^{(1)}, y^{(1)}) &= f(x^{(1)}, y^{(1)}) - \delta g(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ &= f(x^{(1)}, y^{(1)}) - \delta g^{(1)}(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv 0 \bmod \overline{\mathfrak{P}}^m. \end{aligned}$$

Ferner definieren wir eine 1-Kokette g' von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ durch folgende Vorschrift:

$$g'(x_i^{(1)} W_i) = f'(x_i^{(1)}, W_i), \quad g'(X) = \sum_{i=1}^n g'(x_i^{(1)} W_i),$$

wo wieder $X = \sum_{i=1}^n x_i^{(1)} W_i$ ($x_i^{(1)} \in \mathfrak{D}^{(1)}, i = 1, 2, \dots, n$) gesetzt ist. Wie in § 1.2 kann man leicht verifizieren, daß für ein beliebiges Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$ stets

$$(f' + \delta g')(x^{(1)}, X) \equiv 0 \bmod \overline{\mathfrak{P}}^m$$

gilt; d. h. $f' + \delta g' = f - \delta(g - g')$ ist ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$. Es ist klar, daß alle 2-Kozyklen aus einer normalen 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallen, wenn diese 2-Kohomologiekategorie irgendeinen in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kozyklus enthält. Wir können also von einer in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ sprechen. Aus dem oben Bewiesenen schließt man also folgenden

Hilfssatz 2. Jede in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallende, normale 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ enthält sicher einen normalen 2-Kozyklus von

$\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$.

Nun sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ und g eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f \equiv \delta g \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$. Dann gilt für beliebige Elemente $x^{(1)}, y^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} y^{(1)}g(x^{(1)}) + x^{(1)}g(y^{(1)}) - g(x^{(1)}y^{(1)}) &= \delta g(x^{(1)}, y^{(1)}) \\ &\equiv f(x^{(1)}, y^{(1)}) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}; \end{aligned}$$

d. h. $g(x^{(1)}y^{(1)}) \equiv y^{(1)}g(x^{(1)}) + x^{(1)}g(y^{(1)}) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$. Dies bedeutet aber, daß g eine *Derivation* $D^{(1)}$ von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ ist¹⁾. Wenn dabei der Exponent m hinreichend groß ist, so existiert eine Derivation D von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, welche eine Fortsetzung von $D^{(1)}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ ist²⁾; es gilt also für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$:

$$\delta D(X, Y) \equiv YD(X) + XD(Y) - D(XY) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}.$$

Also ist $f \equiv \delta(g - D) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$. Da aber für beliebige Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$ stets

$$g(x^{(1)}) = D^{(1)}(x^{(1)}) = D(x^{(1)})$$

gilt, so ist $g - D$ eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Nach dem in § 1.2 Gezeigten ist $g - D$ eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Somit ist gezeigt:

Hilfssatz 3. Für jedes hinreichend große m wird ein normaler 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ dann und nur dann der 2-Korand einer normalen 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, wenn f der 2-Korand einer 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ ist.

Bemerkung 1. Hilfssatz 3 gilt auch für $m = \infty$. Ist nämlich für eine 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{D}}/\overline{\mathfrak{P}}^\infty = \overline{\mathfrak{R}}_\infty$ $f = \delta g$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_\infty$, so gelten für ein beliebiges Element $x^{(1)}$ aus $\mathfrak{D}^{(1)}$:

$$g(x^{(1)\nu}) = \nu x^{(1)\nu-1} g(x^{(1)}) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Ist also $\varphi(\Xi)$ das Minimalpolynom von $x^{(1)}$ in $\mathfrak{o}$, so gilt:

$$g(\varphi(x^{(1)})) = \varphi'(x^{(1)})g(x^{(1)}) = 0,$$

wo $\varphi'(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet. Da $K^{(1)}$ über k

1) M II, S. 18.

2) Man soll etwa m so groß nehmen, daß m größer ist als der $\overline{\mathfrak{P}}$ -Exponent der Quasidifferenten von K/k . Vgl. M. Moriya, Theorie der Derivationen und Körperdifferenzen, Math. Journ., Okayama Univ., Vol. 2 (1953), S. 135, Satz 6. Diese Arbeit ist mit M I zitiert.

separabel ist, so ist $\varphi'(x^{(1)})$ sicher von Null verschieden; es muß also $g(x^{(1)}) = 0$ sein. Hieraus schließt man sofort, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_\infty$ ist.

Wir bezeichnen nun mit $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ die Gesamtheit aller in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallenden, normalen 2-Kohomologieklassen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Offenbar bildet $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ einen $\mathfrak{D}$ -Untermodul von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, welche ich im folgenden die in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ nennen will. Nach Hilfssatz 2 enthält jede 2-Kohomologiekategorie $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ mindestens einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Wenn außerdem m hinreichend groß ist, so gehören nach Hilfssatz 3 alle normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ aus $\bar{C}$ zu ein und derselben normalen 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Wenn man also aus einer beliebigen 2-Kohomologiekategorie $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ einen normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ herausgreift und dann $\bar{C}$ die f enthaltende 2-Kohomologiekategorie aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ zuordnet, so entsteht dadurch ein $\mathfrak{D}$ -Isomorphismus von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, falls m hinreichend groß ist. Daher ist folgender Satz bewiesen:

Satz 1. *Es existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m (einschließlich $m = \infty$) mit $m \geq N$ die in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}, \mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ stets auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}^{(1)}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ $\mathfrak{D}$ -isomorph abgebildet wird.*

Bemerkung 2. Durch geringe Modifikationen kann man Satz 1 auch für die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ beweisen.

§ 3. Erweiterung des Multiplikatorenbereiches einer 2-Kohomologiegruppe.

Wir betrachten über $\overline{K}$ eine endlich-separable Erweiterung K^* mit $\mathfrak{D}^*$ als Hauptordnung und bezeichnen mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{D}^*$. Ferner sei $W_1^* = 1, W_2^*, \dots, W_n^*$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}^*$ über $\mathfrak{D}$ und e die Verzweigungsordnung von K^* über $\overline{K}$. Für ein Vielfaches m von e betrachten wir dann einen 2-Kozyklus f^* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{v}$ über $\mathfrak{R}_m^*$, wo $\mathfrak{R}_m^*$ den Restklassenring von $\mathfrak{D}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$ bezeichnet. Dabei versteht man unter $m = \infty$ auch ein Vielfaches von e . Da für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$ der Wert $f^*(X, Y)$ stets zu $\mathfrak{D}^*$ gehört, so kann man

$$(3.1) \quad f^*(X, Y) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i(X, Y) W_i^*$$

setzen, wo die $\bar{A}_i(X, Y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) die durch X, Y eindeutig be-

stimmten Elemente aus $\bar{\mathfrak{D}}$ sind. Für beliebige Elemente X, Y, Z aus $\mathfrak{D}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} & Xf^*(Y, Z) + f^*(X, YZ) - f^*(XY, Z) - Zf^*(X, Y) \\ &= \sum_{i=1}^n \{ X\bar{A}_i(Y, Z) + \bar{A}_i(X, YZ) - \bar{A}_i(XY, Z) - Z\bar{A}_i(X, Y) \} W_i^* \\ &\equiv 0 \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{*m}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man hierbei, daß $W_1^*, W_2^*, \dots, W_n^*$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}^*$ über $\mathfrak{D}$ ist, so schließt man ohne weiteres:

$$X\bar{A}_i(Y, Z) + \bar{A}_i(X, YZ) \equiv \bar{A}_i(XY, Z) + Z\bar{A}_i(X, Y) \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}^{*m_0},$$

wo $m_0 = m/e$ gesetzt ist. Bezeichnet man nun den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{D}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^{*m_0}$ mit $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$, so verifiziert man ohne Schwierigkeit, daß die Koeffizienten $\bar{A}_i(X, Y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ definieren, wenn X, Y unabhängig alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ durchlaufen. Wenn man also die durch $\bar{A}_i(X, Y)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) definierten 2-Kozyklen bzw. mit den $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bezeichnet, so erhält man:

$$(3.2) \quad f^* = \sum_{i=1}^n W_i^* \bar{A}_i.$$

Dies besagt aber, daß der $\mathfrak{D}^*$ -Modul $Z_m^{(*)}$ aller 2-Kozyklen $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ aus dem $\bar{\mathfrak{D}}$ -Modul $\bar{Z}_{m_0}^{(*)}$ aller 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ durch Erweiterung des Multiplikatorengebietes $\bar{\mathfrak{D}}$ zu $\mathfrak{D}^*$ entsteht. Man nennt also $Z_m^{(*)}$ die *Multiplikatorenbereicherweiterung* von $\bar{Z}_{m_0}^{(*)}$ zu $\mathfrak{D}^*$.

Ist insbesondere f^* normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$, so sind die 2-Kozyklen $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) auch normal. Also ist der $\mathfrak{D}^*$ -Modul $Z_{o,m}^{*(2)}$ aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\bar{Z}_{o,m_0}^{(*)}$ zu $\mathfrak{D}^*$, wo $\bar{Z}_{o,m_0}^{(*)}$ den $\bar{\mathfrak{D}}$ -Modul aller normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$ bezeichnet.

Nun sei in (3.2) f^* der 2-Korand einer 1-Kokette g^* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$. Dann gilt für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{D}$:

$$(3.3) \quad g^*(X) = \sum_{i=1}^n \bar{B}_i(X) W_i^* \quad \bar{B}_i(X) \in \mathfrak{D} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

wo die Koeffizienten $\bar{B}_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) durch X eindeutig bestimmt sind. Wenn X alle Elemente aus $\mathfrak{D}$ durchläuft, so definieren die $\bar{B}_i(X)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) bzw. die 1-Koketten $\bar{B}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_{m_0}$. Da nach Voraussetzung

$$f^* \equiv \partial g^* \quad \text{mod } \mathfrak{P}^{*m}$$

ist, so erhält man aus (3.1):

$$\begin{aligned} f^*(X, Y) &= \sum_{i=1}^n \bar{A}_i(X, Y) W_i^* \\ &\equiv \sum_{i=1}^n \{Y\bar{B}_i(X) + X\bar{B}_i(Y) - \bar{B}_i(XY)\} W_i^* \pmod{\mathfrak{B}^{**}}; \end{aligned}$$

hieraus folgen sofort die Kongruenzen:

$$\bar{A}_i(X, Y) \equiv \partial \bar{B}_i(X, Y) \pmod{\bar{\mathfrak{N}}^{**}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Also gilt nach (3. 1):

$$(3. 4) \quad f^* = \sum_{i=1}^n W_i^* \partial \bar{B}_i \pmod{\mathfrak{B}^{**}}.$$

Ferner ist $g^* = \sum_{i=1}^n W_i^* \bar{B}_i$.

Der $\mathfrak{D}^*$ -Modul $B_{m_o}^{*(2)}$ der 2-Koränder aller 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ ist also gleich der Multiplikatorenbereicherweiterung des $\mathfrak{D}$ -Moduls $\bar{B}_{m_o}^{(2)}$ zu $\mathfrak{D}^*$, wo $\bar{B}_{m_o}^{(2)}$ die Gesamtheit der 2-Koränder aller 1-Koketten von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{N}}_{m_o}$ bezeichnet. Ebenso sieht man sofort ein, daß der $\mathfrak{D}^*$ -Modul $B_{o, m_o}^{*(2)}$ der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ die Multiplikatorenbereicherweiterung von $\bar{B}_{o, m_o}^{(2)}$ zu $\mathfrak{D}^*$ ist, wo $\bar{B}_{o, m_o}^{(2)}$ die Gesamtheit der 2-Koränder aller normalen 1-Koketten von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{N}}_{m_o}$ bezeichnet.

Nun seien $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$ beliebig endlich viele 2-Kohomologieklassen aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_o}) = \bar{Z}_{m_o}^{(2)}/\bar{B}_{m_o}^{(2)}$. Dann greifen wir aus jedem $\bar{C}_i$ ($1 \leq i \leq r$) irgendeinen 2-Kozyklus $\bar{f}_i$ heraus. Für ein beliebiges Elementensystem $A_1^*, A_2^*, \dots, A_r^*$ aus $\mathfrak{D}^*$ gehört $\sum_{i=1}^r A_i^* \bar{f}_i$ irgendeiner 2-Kohomologiekategorie C^* aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ an. Dabei ist C^* durch die $\bar{C}_i$ und A_i^* ($i = 1, 2, \dots, r$) eindeutig bestimmt, aber unabhängig von der Wahl der 2-Kozyklen $\bar{f}_i$ aus den $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Wir wollen daher einfach

$$C^* = \sum_{i=1}^r A_i^* \bar{C}_i$$

setzen und C^* die durch die A_i^* und $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) erzeugte 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ nennen. Offenbar bildet die Gesamtheit aller durch die Elemente aus $\mathfrak{D}^*$ und durch die 2-Kohomologiekategorien aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_o})$ erzeugten 2-Kohomologiekategorien von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_m^*$ einen $\mathfrak{D}^*$ -Untermodul von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$; dieser $\mathfrak{D}^*$ -Untermodul heiße die *Multiplikatorenbereicherweiterung* von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_o})$ zu $\mathfrak{D}^*$. Mit Rücksicht von (3. 2) und (3. 4) überzeugt man sich leicht, daß $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ mit der Multiplikatorenbereicherweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_o})$ zu $\mathfrak{D}^*$ übereinstimmt. Ebenso kann man auch bestätigen, daß die normale 2-Kohomologiegruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ mit der Multiplikatorenbereicherweiterung der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_o})$ zu $\mathfrak{D}^*$ übereinstimmt.

Hilfssatz 4. Die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ bzw. die

normale 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ ist die Multiplikatorenbereicherweiterung der 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$ bzw. der normalen 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$. Dabei ist $m = m_0 e$ gesetzt.

Nun setzen wir voraus, daß die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ eine endliche $\mathfrak{D}^*$ -Basis $C_1^*, C_2^*, \dots, C_r^*$ besitzt, wo wieder $m_0 e = m$ gesetzt ist, und wir greifen aus jedem C_i^* ($1 \leq i \leq r$) einen 2-Kozyklus f_i^* heraus. Nach (3.2) existieren dann endlich viele 2-Kozyklen $\bar{f}_{i,1}, \bar{f}_{i,2}, \dots, \bar{f}_{i,n}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$, für welche die Gleichung

$$f_i^* = \sum_{\nu=1}^n W_\nu^* \bar{f}_{i,\nu}$$

gilt. Ist nun $\bar{f}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$, so ist die $\bar{f}$ enthaltende 2-Kohomologieklassse $C^*(\bar{f})$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ sicher von der Form:

$$(3.5) \quad C^*(\bar{f}) = \sum_{i=1}^r A_i^* C_i^*,$$

wo die A_i^* ($i=1, 2, \dots, r$) Elemente aus $\mathfrak{D}^*$ bezeichnen. Setzt man dabei

$$A_i^* = \sum_{\nu=1}^n \bar{B}_{i,\nu} W_\nu^* \quad (\bar{B}_{i,\nu} \in \mathfrak{D}, i=1, 2, \dots, r),$$

so folgt aus (3.5):

$$\bar{f} - \sum_{i=1}^r (\sum_{\nu=1}^n \bar{B}_{i,\nu} W_\nu^*) f_i^* \sim 0 \quad (\mathfrak{R}_m^*);$$

d. h. es gilt:

$$\bar{f} - \sum_{i=1}^r (\sum_{\nu=1}^n \bar{B}_{i,\nu} W_\nu^*) (\sum_{\mu=1}^n W_\mu^* \bar{f}_{i,\mu}) \sim 0 \quad (\mathfrak{R}_m^*).$$

Setzt man dabei $W_\mu^* W_\nu^* = \sum_{\tau=1}^n \bar{C}_{\mu\nu\tau} W_\tau^*$, so erhält man ohne weiteres:

$$\bar{f} - \sum_{i=1}^r \sum_{\mu,\nu=1}^n \bar{B}_{i,\nu} \bar{C}_{\mu\nu\tau} f_{i,\mu} \sim 0 \quad (\mathfrak{R}_{m_0}),$$

weil $\bar{f}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$ und $W_1^* = 1$ ist. Wenn man also mit $\bar{C}(\bar{f}_{i,\nu})$ die $\bar{f}_{i,\nu}$ enthaltende 2-Kohomologieklassse von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$ bezeichnet, so ist die $\bar{f}$ enthaltende 2-Kohomologieklassse $\bar{C}(\bar{f})$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_{m_0}$ von der Form:

$$\bar{C}(\bar{f}) = \sum_{i=1}^r \sum_{\nu=1}^n \bar{A}_{i,\nu} \bar{C}(\bar{f}_{i,\nu}) \quad (\bar{A}_{i,\nu} \in \mathfrak{D});$$

d. h. die 2-Kohomologieklassen $\bar{C}(\bar{f}_{i,\nu})$ ($i=1, 2, \dots, r; \nu=1, 2, \dots, n$) sind ein Erzeugendensystem von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$. Da $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ kein Nullmodul und die Multiplikatorenbereicherweiterung von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$ zu $\mathfrak{D}^*$ ist, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$ auch kein Nullmodul. Also besitzt $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_{m_0})$ eine endliche $\mathfrak{D}$ -Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_s$, weil $\mathfrak{D}$ euklidischer

Ring ist¹⁾. Es ist klar, das die $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) ein Erzeugendensystem von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ bilden.

Nun bestehe für Elemente $A_1^*, A_2^*, \dots, A_s^*$ aus $\mathfrak{D}^*$ die Gleichung

$$(3.6) \quad A_1^* \bar{C}_1 + A_2^* \bar{C}_2 + \dots + A_s^* \bar{C}_s = 0$$

in $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$. Greift man dann aus jedem $\bar{C}_i$ ($1 \leq i \leq s$) einen beliebigen 2-Kozyklus $\bar{f}_i$ heraus, so gilt nach (3.6)

$$\sum_{\nu=1}^n W_\nu^* (\sum_{i=1}^s \bar{A}_{i\nu} \bar{f}_i) \sim 0 \quad (\mathfrak{N}_m^{**}),$$

wo $A_i^* = \sum_{\nu=1}^n \bar{A}_{i\nu} W_\nu^*$ ($i = 1, 2, \dots, s; \bar{A}_{i\nu} \in \bar{\mathfrak{D}}$) gesetzt sind. Hieraus schließt man ohne weiteres, daß für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq n$

$$\sum_{i=1}^s \bar{A}_{i\nu} \bar{f}_i \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{N}}_{m_0}^{**});$$

d. h. es gilt in $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^s \bar{A}_{i\nu} \bar{C}_i = 0.$$

Da aber $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_s$ eine $\mathfrak{D}$ -Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ bilden, so müssen $\bar{A}_{i\nu} \bar{C}_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, s; \nu = 1, 2, \dots, n$) sein; d. h. aus der Gleichung (3.6) ergeben sich

$$A_1^* \bar{C}_1 = A_2^* \bar{C}_2 = \dots = A_s^* \bar{C}_s = 0.$$

Daher bilden $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_s$ auch eine $\mathfrak{D}^*$ -Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$. Den bisher durchgeführten Beweis kann man auch auf die normalen 2-Kohomologiegruppen $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ anwenden. Somit ist bewiesen:

Satz 2. Wenn die (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$) endliche $\mathfrak{D}^*$ -Basis besitzt, so besitzt $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$) auch endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Basis. Ferner bildet eine endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$) stets eine $\mathfrak{D}^*$ -Basis von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$).

Bemerkung. Es sei $\bar{C}$ eine 2-Kohomologiekategorie aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{N}}_{m_0})$ mit $\bar{l}$ als $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge. Gilt dann für ein Element A^* aus $\mathfrak{D}^*$ die Gleichung

$$A^* \bar{C} = 0$$

in $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{N}_m^*)$, so besteht für einen beliebigen 2-Kozyklus $\bar{f}$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{N}_{m_0}$ aus $\bar{C}$:

$$A^* \bar{f} \sim 0 \quad (\mathfrak{N}_m^{**}).$$

1) Vgl. etwa Van der Waerden, Moderne Algebra, II. Teil, Berlin (1940), § 109, S. 112–117.

Setzt man dabei $A^* = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i W_i^*$, so erhält man aus der obigen Kohomologierelation:

$$\bar{A}_1 \bar{f} \sim \bar{A}_2 \bar{f} \sim \dots \sim \bar{A}_n \bar{f} \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{B}}^{m_0}).$$

Bezeichnet also $\bar{\mathfrak{C}}$ das annullierende Ideal von $\bar{C}$ aus $\bar{\mathfrak{D}}$, so sind

$$\bar{A}_i \in \bar{\mathfrak{C}} \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

hieraus folgt sofort: $A^* \in \bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}^*$. Dies besagt aber, daß das annullierende Ideal von $\bar{C}$ aus $\mathfrak{D}^*$ eine Teilmenge von $\bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}^*$ ist. Da das Ideal $\bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}^*$ offenbar $\bar{C}$ annulliert, so ist $\bar{\mathfrak{C}}\mathfrak{D}^*$ mit dem annullierenden Ideal von $\bar{C}$ identisch, wenn man $\bar{C}$ als 2-Kohomologieklass aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auffaßt. Also ist die $\mathfrak{D}^*$ -Länge von $\bar{C}$ gleich $\bar{l}e$.

Kapitel II. Struktur der 2-Kohomologiegruppen in diskret bewerteten perfekten Körpern.

Es sei k wieder ein diskret bewerteter perfekter Körper mit $\mathfrak{o}$ als Hauptordnung; ferner sei $k = K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_s = K$ eine Körperfolge, in der jedes K_i ($1 \leq i \leq s$) über k endlich-separabel ist. Wir bezeichnen dann mit $\mathfrak{D}_i$ die Hauptordnung von K_i ; insbesondere sind $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{o}$ und $\mathfrak{D}_s = \mathfrak{D}$ gesetzt. Dabei heißt die Folge der Hauptordnungen

$$\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{D}_s$$

normal, wenn für jedes i ($1 \leq i \leq s$) $\mathfrak{D}_i$ aus $\mathfrak{D}_{i-1}$ durch Ringadjunktion eines Elementes θ_i entsteht— $\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D}_{i-1}[\theta_i]$ —. Ist nun $\varphi_{i-1}(\mathfrak{E})$ das Minimalpolynom von θ_i in K_{i-1} , so gehören die Koeffizienten von $\varphi_{i-1}(\mathfrak{E})$ alle zu $\mathfrak{D}_{i-1}$, weil θ_i in bezug auf $\mathfrak{D}_{i-1}$ ganz ist; der Grad n_i von $\varphi_{i-1}(\mathfrak{E})$ in bezug auf $\mathfrak{E}$ ist offenbar der Rang von $\mathfrak{D}_i$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$, und das Elementsystem $1, \theta_i, \dots, \theta_i^{n_i-1}$ bildet eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}_i$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$. Weil K_i über k separabel ist, so ist $\varphi_{i-1}(\mathfrak{E})$ ein separables Polynom aus $\mathfrak{D}_{i-1}[\mathfrak{E}]$. Wenn man also die Ableitung von $\varphi_{i-1}(\mathfrak{E})$ nach $\mathfrak{E}$ mit $\varphi'_{i-1}(\mathfrak{E})$ bezeichnet, so ist das Hauptideal $(\varphi'_{i-1}(\theta_i))$ aus $\mathfrak{D}_i$ gleich der *Differente* von K_i über K_{i-1} ¹⁾.

Die Hauptordnung $\mathfrak{D}$ einer endlich-separablen Erweiterung K über k heiße *normal über* $\mathfrak{o}$, wenn es eine normale Folge der Hauptordnungen mit $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{D}$ als dem Anfangs- bzw. Endglied gibt. Wenn insbesondere $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}[\theta]$ ist, so heiße $\mathfrak{D}$ *einfach normal über* $\mathfrak{o}$.

Wie im Kap. I bezeichnen wir in diesem Kapitel mit $\bar{\mathfrak{B}}$ durchweg das

1) Vgl. etwa E. Artin, Algebraic numbers and algebraic functions (1950), S. 92.

nicht-triviale Primideal aus dem Oberring $\bar{\mathfrak{D}}^{(1)}$ von $\mathfrak{D}$, welcher die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung $\bar{K}$ über K bildet. In diesem Kapitel wollen wir die Struktur der 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{D}}/\bar{\mathfrak{P}}^m)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{D}}/\bar{\mathfrak{P}}^m)$ bestimmen.

§ 4. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit einfach normaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

$\mathfrak{D}$ sei eine einfach normale Hauptordnung über $\mathfrak{o}$ und θ ein primitives Element von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$: $\mathfrak{D} = \mathfrak{o}[\theta]$. Ferner sei $\varphi(\Xi)$ das Minimalpolynom von θ in $\mathfrak{o}$ und n der Rang von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$. Dann betrachten wir die 2-Kohomologiegruppen $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$, wo $\bar{\mathfrak{R}}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{D}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$ bezeichnet. Wie ich schon anderswo bewiesen habe, enthält jede 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ sicher einen θ -normierten 2-Kozyklus f über $\mathfrak{o}$; d. h. f besitzt folgende Eigenschaft²⁾:

Für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ gelten

$$i) \quad f(x, \theta^i) \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{P}}_m} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

und

$$ii) \quad f(x\theta, \theta^i) \equiv 0 \pmod{\bar{\mathfrak{P}}_m} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2).$$

Man verifiziert nach i) leicht, daß f über $\mathfrak{o}$ normal ist. Ferner ist f durch den Wert $f(\theta, \theta^{n-1}) \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}$ eindeutig bestimmt³⁾.

Nun sei außerdem vorausgesetzt, daß der obige θ -normierte 2-Kozyklus f zur Null kohomolog ist. Dann existiert nach dem in § 1.2 Gezeigten eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{R}}_m$ mit $f \equiv \partial g \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}$; es folgen also aus ii) ohne weiteres:

$$g(x\theta^i) \equiv ix\theta^{i-1}g(\theta) \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m} \quad (x \in \mathfrak{o}, i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Setzt man dabei $f(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$, so gilt offenbar folgende Kongruenz:

$$\varphi'(\theta)g(\theta) \equiv \partial g(\theta, \theta^{n-1}) \equiv f(\theta, \theta^{n-1}) = \mu \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m},$$

wo $\varphi'(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet.

Umgekehrt sei für ein Element μ aus $\bar{\mathfrak{D}}$ die Kongruenz

$$\varphi'(\theta)\Xi \equiv \mu \pmod{\bar{\mathfrak{P}}^m}$$

in $\bar{\mathfrak{D}}$ lösbar. Ist dann λ eine Lösung der obigen Kongruenz aus $\bar{\mathfrak{D}}$, so setze man für ein beliebiges Element $\sum_{i=0}^{n-1} x_i \theta^i$ ($x_i \in \mathfrak{o}, i = 0, 1, \dots, n-1$):

$$g(\sum_{i=0}^{n-1} x_i \theta^i) = \sum_{i=1}^{n-1} i x_i \theta^{i-1} \lambda.$$

1) $\bar{\mathfrak{D}}$ kann eventuell mit $\mathfrak{D}$ übereinstimmen.

2), 3) Vgl. M II, Satz 3.

Dann definiert g offenbar eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $g(\theta) = \lambda$. Wegen der Gleichung $\varphi(\theta) = 0$ beweist man ohne Schwierigkeit, daß δg ein θ -normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $g(\theta, \theta^{n-1}) \equiv \mu \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$ ist. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 5. *Ein θ -normierter 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ ist dann und nur dann mod $\overline{\mathfrak{P}}^m$ zur Null kohomolog, wenn die Kongruenz*

$$\varphi'(\theta)\varepsilon \equiv f(\theta, \theta^{n-1}) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$$

in $\overline{\mathfrak{D}}$ lösbar ist. Ist ferner λ eine Lösung der obigen Kongruenz aus $\overline{\mathfrak{D}}$, so existiert eine normale 1-Kokette g von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $g(\theta) = \lambda$, so daß

$$f \equiv \delta g \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$$

ist.

Es ist bereits bewiesen worden, daß es einen θ -normierten 2-Kozyklus f_0 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f_0(\theta, \theta^{n-1}) = 1$ gibt¹⁾. Dann läßt sich ein beliebiger θ -normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mod $\overline{\mathfrak{P}}^m$ als das Produkt aus f_0 und einem geeigneten Element aus $\overline{\mathfrak{D}}$ darstellen. Da jede 2-Kohomologiekategorie aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ mindestens einen θ -normierten 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ enthält, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ sicher ein zyklischer $\overline{\mathfrak{D}}$ -Modul, welcher die f_0 enthaltende 2-Kohomologiekategorie $\overline{\mathfrak{C}}_0$ als eine erzeugende Klasse besitzt. Dabei bestätigt man leicht, daß das annullierende Ideal von $\overline{\mathfrak{C}}_0$ nach Hilfssatz 5 gleich $(\overline{\mathfrak{P}}^m, (\varphi'(\theta)))$ ist. Es gilt also folgende $\overline{\mathfrak{D}}$ -Isomorphierelation:

$$\overline{\mathfrak{D}}/(\overline{\mathfrak{P}}^m, (\varphi'(\theta))) \cong H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m).$$

Bezeichnet nun u den $\mathfrak{P}$ -Exponenten von $(\overline{\mathfrak{P}}^m, (\varphi'(\theta)))$, so ist die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge von $\overline{\mathfrak{D}}/(\overline{\mathfrak{P}}^m, (\varphi'(\theta)))$, also auch von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ gleich u . Somit ist bewiesen:

Satz 3. *$\mathfrak{D}$ sei die Hauptordnung einer endlich-separablen Erweiterung K über k . Ferner sei $\mathfrak{D}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$. Dann ist die 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bzw. die normale 2-Kohomologiegruppe $H_0^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ ein zyklischer $\overline{\mathfrak{D}}$ -Modul. Ferner ist die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bzw. $H_0^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ gleich dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten von $(\overline{\mathfrak{P}}^m, (\varphi'(\theta)))$. Ist insbesondere $\overline{\mathfrak{P}}^m$ durch $(\varphi'(\theta))$ teilbar, so ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bzw. $H_0^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ein zyklischer $\overline{\mathfrak{D}}$ -Modul mit dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differenten von K/k als $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge.*

Wir betrachten nun einen Spezialfall, daß $\overline{\mathfrak{D}}$ mit $\mathfrak{D}$ übereinstimmt:

1) Vgl. M II, Satz 3

Bezeichnet man dann mit $\mathfrak{P}$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}$, so gilt folgender

Zusatz zu Satz 3. $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ bzw. $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ ist zyklischer $\mathfrak{O}$ -Modul. Ist dabei $\mathfrak{P}^m$ durch $(\varphi'(\theta))$ teilbar, so ist die $\mathfrak{O}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ bzw. $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O}/\mathfrak{P}^m)$ stets gleich dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differente von K/k^1 .

§ 5. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit nomaler Hauptordnung als Definitionsbereich.

In diesem Paragraphen sei die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer endlich-separablen Erweiterung über k durchweg *normal* über $\mathfrak{o}$, und $\mathfrak{o} = \mathfrak{O}_0 \subset \mathfrak{O}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{O}_s = \mathfrak{O}$ sei eine normale Folge der Hauptordnungen, wo $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{O}_{i-1}[\theta_i]$ ($i = 1, 2, \dots, s$) gesetzt sind. Ferner bezeichne $\overline{\mathfrak{R}}_m$ den Restklassenring von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}^m$. Zu einem beliebigen 2-Kozyklus $f^{(i-1)}$ von $\mathfrak{O}_{i-1}/\mathfrak{o}$ ($i \geq 1$) über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ existiert dann ein über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i -normierter 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, welcher eine Fortsetzung von $f^{(i-1)}$ auf $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{o}$ ist²). Mit Hilfe der vollständigen Induktion beweist man ohne Schwierigkeit die Existenz einer Fortsetzung f von $f^{(i-1)}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ mit folgender Eigenschaft:

Für jedes j mit $i \leq j \leq s$ gelten

$$\text{i) } f(x^{(j-1)}\theta_j^\nu, \theta_j^\nu) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 1)$$

und

$$\text{ii) } f(x^{(j-1)}\theta_j, \theta_j^\nu) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 2)^3),$$

wo $x^{(j-1)}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}_{j-1}$ und n_j den Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$ bezeichnet. Wie in §4 bemerkt ist, gibt es einen über $\mathfrak{O}_{i-1}$ θ_i -normierten 2-Kozyklus $h_{i,i-1}$ von $\mathfrak{O}_i/\mathfrak{O}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $h_{i,i-1}(\theta_i, \theta_i^{n_i-1}) = 1$. Daher existiert eine Fortsetzung h_{i-1} von $h_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{i-1}$ mit folgender Eigenschaft:

Für jedes j mit $i \leq j \leq s$ gelten

$$\text{i) } h_{i-1}(x^{(j-1)}\theta_j^\nu, \theta_j^\nu) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 1),$$

$$\text{ii) } h_{i-1}(x^{(j-1)}\theta_j, \theta_j^\nu) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} \quad (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 2)$$

und

$$\text{iii) } h_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{n_i-1}) = 1, \quad h_{i-1}(\theta_j, \theta_j^{n_j-1}) = 0 \quad (j > i).$$

Dabei bezeichnet $x^{(j-1)}$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{O}_{j-1}$ und n_j den Rang von $\mathfrak{O}_j$ über $\mathfrak{O}_{j-1}$.

1) Y. Kawada, On the derivations in number fields, Ann. Math., Vol. 54 (1952), S. 310–314.

2) M II, Satz 3.

3) Für jedes j mit $s \geq j \geq i$ kann man dem $f(\theta_j, \theta_j^{n_j-1})$ einen beliebigen Wert aus $\overline{\mathfrak{O}}$ angeben.

Ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$, welcher die folgende Eigenschaft (5.1) besitzt, heiße *ausgezeichnet über $\mathfrak{D}_{i-1}$* :

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f(x^{(j-1)}, \theta_j^\nu) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} & (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 1), \\ f(x^{(j-1)}\theta_j, \theta_j^\nu) &\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m} & (\nu = 0, 1, \dots, n_j - 2), \end{aligned}$$

wo $i \leq j \leq s$, $x^{(j-1)} \in \mathfrak{D}_{j-1}$ und n_j der Rang von $\mathfrak{D}_j$ über $\mathfrak{D}_{j-1}$ ist.

Nach dem oben Gezeigten ist bewiesen:

Hilfssatz 6. *Es existiert zu jedem Index i mit $1 \leq i \leq s$ ein über $\mathfrak{D}_{i-1}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus h_{i-1} von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$ mit $h_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{\nu_i-1}) = 1$ und $h_{i-1}(\theta_j, \theta_j^{\nu_j-1}) = 0$ ($i < j \leq s$). Dabei bezeichnet n_q den Rang von $\mathfrak{D}_q$ über $\mathfrak{D}_{q-1}$ ($i \leq q \leq s$).*

Ferner gilt folgender

Hilfssatz 7. *Ist ein 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ ($1 \leq i \leq s$) ber $\overline{\mathfrak{M}}_m$ ausgezeichnet über $\mathfrak{D}_{i-1}$, so ist f normal über $\mathfrak{D}_{i-1}$; d. h. für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ bzw. X aus $\mathfrak{D}_{i-1}$ bzw. $\mathfrak{D}$ gilt stets:*

$$f(x^{(i-1)}, X) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}.$$

Beweis. Es ist klar, daß die Elemente

$$\theta_i^{\nu_i} \theta_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots \theta_s^{\nu_s} \quad (\nu_j = 0, 1, \dots, n_j - 1; j = i, i+1, \dots, s)$$

eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$ bilden, wo für jedes j n_j den Rang von $\mathfrak{D}_j$ über $\mathfrak{D}_{j-1}$ bezeichnet. Dann ist ein Element X aus $\mathfrak{D}$ von der Form

$$X = \sum c(\nu_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_s) \theta_i^{\nu_i} \theta_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots \theta_s^{\nu_s}$$

mit den Koeffizienten $c(\nu_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_s)$ aus $\mathfrak{D}_{i-1}$. Um also die Kongruenz $f(x^{(i-1)}, X) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}$ zu beweisen, genügt zu zeigen, daß für jedes Zahlensystem $(\nu_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_s)$ stets

$$f(x^{(i-1)}, c(\nu_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_s) \theta_i^{\nu_i} \theta_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots \theta_s^{\nu_s}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}$$

erfüllt ist.

Weil die Einschränkung von f auf $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$ θ_i -normiert ist, so ist die Einschränkung von f auf $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ ein *normaler* 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$. Wir nehmen also an, daß die Einschränkung von f auf $\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{D}_{i-1}$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$ ist; also gilt für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ bzw. $x^{(s-1)}$ aus $\mathfrak{D}_{i-1}$ bzw. $\mathfrak{D}_{s-1}$ stets:

$$f(x^{(i-1)}, x^{(s-1)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}.$$

Da das Element $c(\nu_i, \nu_{i+1}, \dots, \nu_s) \theta_i^{\nu_i} \theta_{i+1}^{\nu_{i+1}} \dots \theta_{s-1}^{\nu_{s-1}}$ ersichtlich zu $\mathfrak{D}_{s-1}$ gehört,

so bezeichnen wir der Einfachheit halber dieses Element mit $x^{(s-1)}$. Dann gilt offenbar :

$$\begin{aligned} & x^{(t-1)} f(x^{(s-1)}, \theta_s^{y_s}) + f(x^{(t-1)}, c(\nu_t, \nu_{t+1}, \dots, \nu_s) \theta_t^{y_t} \theta_{t+1}^{y_{t+1}} \dots \theta_s^{y_s}) \\ & \equiv f(x^{(t-1)} x^{(s-1)}, \theta_s^{y_s}) + \theta_s^{y_s} f(x^{(t-1)}, x^{(s-1)}) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m. \end{aligned}$$

Da f über $\mathfrak{D}_{s-1}$ θ_s -normiert ist, so sind

$$f(x^{(s-1)}, \theta_s^{y_s}) \equiv 0 \quad \text{und} \quad f(x^{(t-1)} x^{(s-1)}, \theta_s^{y_s}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m;$$

ferner gilt nach Annahme :

$$f(x^{(t-1)}, x^{(s-1)}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m.$$

Daher muß $f(x^{(t-1)}, c(\nu_t, \nu_{t+1}, \dots, \nu_s) \theta_t^{y_t} \theta_{t+1}^{y_{t+1}} \dots \theta_s^{y_s}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ sein, w. z. b. w.

Wir betrachten fortdauernd die Minimalbasis

$$\theta_t^{y_t} \theta_{t+1}^{y_{t+1}} \dots \theta_s^{y_s} \quad (\nu_j = 0, 1, \dots, n_j - 1; \quad j = i, i+1, \dots, s)$$

von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$. Dann bezeichnen wir unter den Basiselementen dieser Minimalbasis die $\theta_t^{y_t}$ ($\nu_t = 0, 1, \dots, n_t - 1$) bzw. mit $\varrho_{\nu_t}^{(t)}$ und die übrigen Elemente, irgendwie numeriert, mit $\varrho_{N_t+1}^{(t)}, \dots, \varrho_{N_t}^{(t)}$, wo $N_t = n_t n_{t+1} \dots n_s$ gesetzt ist. Ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{D}$ ist also von der Form :

$$X = \sum_{\nu=1}^{N_t} x_{\nu}^{(t-1)} \varrho_{\nu}^{(t)} \quad x_{\nu}^{(t-1)} \in \mathfrak{D}_{i-1} \quad (\nu = 1, 2, \dots, N_t).$$

Nun definiere man für einen beliebigen normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{H}}_m$ eine eindeutige Abbildung g von $\mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ auf folgende Weise :

$$g(X) = \sum_{\nu=1}^{N_t} g(x_{\nu}^{(t-1)} \varrho_{\nu}^{(t)}) \quad \text{und} \quad g(x_{\nu}^{(t-1)} \varrho_{\nu}^{(t)}) = f(x_{\nu}^{(t-1)}, \varrho_{\nu}^{(t)}).$$

Dann sieht man sofort ein, daß g eine lineare Abbildung mod $\overline{\mathfrak{P}}^m$ von $\mathfrak{D}$ in $\overline{\mathfrak{D}}$ ist. Da f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{H}}_m$ ist, so folgt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{o}$ aus der Relation

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{N_t} \{ x f(x_{\nu}^{(t-1)}, \varrho_{\nu}^{(t)}) + f(x, x_{\nu}^{(t-1)} \varrho_{\nu}^{(t)}) \} & \equiv \sum_{\nu=1}^{N_t} \{ f(x x_{\nu}^{(t-1)}, \varrho_{\nu}^{(t)}) \\ & \quad + \varrho_{\nu}^{(t)} f(x, x_{\nu}^{(t-1)}) \} \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m : \\ x g(X) = x \sum_{\nu=1}^{N_t} f(x_{\nu}^{(t-1)}, \varrho_{\nu}^{(t)}) & \equiv \sum_{\nu=1}^{N_t} f(x x_{\nu}^{(t-1)}, \varrho_{\nu}^{(t)}) \\ & \equiv g(xX) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m, \end{aligned}$$

d. h. g ist eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{H}}_m$. Ferner ist g wegen $g(x^{(t-1)}) = g(x^{(t-1)} \varrho_1^{(t)}) = f(x^{(t-1)}, 1) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ ($x^{(t-1)} \in \mathfrak{D}_{i-1}$) eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{H}}_m$; daher induziert der 2-Korand δg von g in $\mathfrak{D}_{i-1}$ offenbar einen ausgezeichneten 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{H}}_m$.

Wir setzen nun

$$f' = f + \delta g.$$

Dann gelten für ein beliebiges Element $x^{(i-1)}$ aus $\mathfrak{D}_{i-1}$:

$$\begin{aligned} f'(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) &= f(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) + \delta g(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) \\ &= f(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) + \varrho_v^{(i)} g(x^{(i-1)}) + x^{(i-1)} g(\varrho_v^{(i)}) - g(x^{(i-1)} \varrho_v^{(i)}) \\ &\equiv f(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) - f(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m \\ &\quad (\nu = 1, 2, \dots, N_i), \end{aligned}$$

weil $g(x^{(i-1)}) \equiv 0$ und $g(\varrho_v^{(i)}) = f(1, \varrho_v^{(i)}) \equiv 0 \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ sind. Hier soll bemerkt werden, daß die Einschränkung von f' auf $\mathfrak{D}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit die Einschränkung von f von $\mathfrak{D}_{i-1}/\mathfrak{o}$ auch so ist.

Nun sei vorausgesetzt, daß für ein q mit $1 \leq q < n_i - 1$ die Kongruenzen

$$f'(x^{(i-1)} \theta_i, \theta_i^j) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m \quad (j = 0, 1, \dots, q-1)$$

erfüllt sind, wo $x^{(i-1)}$ alle Elemente aus $\mathfrak{D}_{i-1}$ durchläuft. Dann definiere man eine 1-Kokette g' von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$ durch folgende Festsetzungen:

- i) $g'(x^{(i-1)} \varrho_i^{(i)}) = g'(x^{(i-1)}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m.$
- ii) Für jedes ν mit $2 \leq \nu \leq n_i$ ist
 $g'(x^{(i-1)} \varrho_v^{(i)}) = g'(x^{(i-1)} \theta_i^{\nu-1}) = f'(x^{(i-1)} \theta_i, \theta_i^{\nu-2}).$
- iii) Für jedes ν mit $n_i + 1 \leq \nu \leq N_i$ ist
 $g'(x^{(i-1)} \varrho_v^{(i)}) = f'(x^{(i-1)}, \varrho_v^{(i)}).$

Nach Definition gelten offenbar für alle ν mit $\nu > n_i$ stets:

$$g'(x^{(i-1)} \varrho_v^{(i)}) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m;$$

für jedes ν mit $2 \leq \nu < n_i$ erhält man aus der Relation

$$\begin{aligned} x^{(i-1)} f'(\theta_i, \theta_i^{\nu-2}) + f'(x^{(i-1)}, \theta_i^{\nu-1}) &\equiv f'(x^{(i-1)} \theta_i, \theta_i^{\nu-2}) + \theta_i^{\nu-2} f'(x^{(i-1)}, \theta_i) \\ &\quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m: \\ x^{(i-1)} g'(\varrho_v^{(i)}) &\equiv g'(x^{(i-1)} \varrho_v^{(i)}) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m. \end{aligned}$$

Ferner verifiziert man wie bei g , daß g' auch eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$ und sogar eine 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{M}}_m$ ist.

Setzt man nun

$$f'' = f' + \delta g',$$

so verifiziert man für jedes ν mit $1 \leq \nu \leq N_i$ ohne Schwierigkeit folgende Kongruenz:

$$\begin{aligned}
f''(\mathbf{x}^{(t-1)}, \Omega_v^{(t)}) &= f'(\mathbf{x}^{(t-1)}, \Omega_v^{(t)}) + \partial g'(\mathbf{x}^{(t-1)}, \Omega_v^{(t)}) \\
&\equiv f'(\mathbf{x}^{(t-1)}, \Omega_v^{(t)}) + \mathbf{x}^{(t-1)} g'(\Omega_v^{(t)}) - g'(\mathbf{x}^{(t-1)} \Omega_v^{(t)}) \\
&\equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m.
\end{aligned}$$

Aus der Relation $f''(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) = f'(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) + \partial g'(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) = f'(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) + \theta_i^j f'(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, 1) + \mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i f'(\theta_i, \theta_i^{j-1}) - f'(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) \equiv \mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i f'(\theta_i, \theta_i^{j-1}) \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ schließt man sofort, daß für alle j zwischen 0 und q stets

$$f''(\mathbf{x}^{(t-1)}\theta_i, \theta_i^j) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

gelten. Ferner ist klar, daß die Einschränkung von f'' auf $\mathfrak{D}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit f' auch so ist. Man kann daher durch vollständige Induktion einen zu f kohomologen, normalen 2-Kozyklus f^* so konstruieren, daß die Einschränkung von f^* auf $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{D}_{i-1}$ θ_i -normiert ist und infolgedessen diese Einschränkung von f^* auf $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist, soweit die Einschränkung von f auf $\mathfrak{D}_{i-1}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist.

Nach dem eben Bewiesenen existiert zunächst ein normaler 2-Kozyklus f_1 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f_1 \sim f(\overline{\mathfrak{P}}^m)$ von der Art, daß die Einschränkung von f_1 auf $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ θ_1 -normiert ist. Nun existiert nach dem oben Bewiesenen ein normaler 2-Kozyklus f_2 von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f_2 \sim f_1(\overline{\mathfrak{P}}^m)$ von der Art, daß die Einschränkung von f_2 auf $\mathfrak{D}_2/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist. Mit Hilfe der vollständigen Induktion kann man also folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 8. *Jede normale 2-Kohomologiekategorie von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ enthält mindestens einen über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus.*

Hilfssatz 9. *Es seien h_{i-1} ($i=1, 2, \dots, s$) ausgezeichnete 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, welche in Hilfssatz 6 angegeben sind. Ferner sei f ein beliebiger, über $\mathfrak{o}$ auszeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $f(\theta_i, \theta_i^{n_i-1}) = \mu_i$ ($i=1, 2, \dots, s$). Dann gilt:*

$$f \equiv \sum_{i=1}^s \mu_i h_{i-1} \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m.$$

Die normale 2-Kohomologiegruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ besitzt also endlich viele Erzeugende.

Beweis. Wenn $s=1$, also $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$ einfach normal ist, so ist sicher:

$$f \equiv \mu_1 h_0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^{m-1}.$$

1) Vgl. M II, Satz 3.

Ist nun $f^{(1)}$ ein über $\mathfrak{D}_1$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_1$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit den $f^{(1)}(\theta_i, \theta_i^{v_{i-1}}) = \mu_i$ ($i = 2, 3, \dots, s$) so nehmen wir an, daß

$$f^{(1)} \equiv \sum_{i=2}^s \mu_i h_{i-1} \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$$

ist. Nun ist $f - \mu_1 h_0$ ein über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{o} \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$ zu 0 kongruent ist; d. h. $f - \mu_1 h_0$ ist ein über $\mathfrak{D}_1$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_1$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ mit $(f - \mu_1 h_0)(\theta_i, \theta_i^{v_{i-1}}) = \mu_i$ ($i = 2, 3, \dots, s$). Nach Annahme gilt also:

$$f - \mu_1 h_0 \equiv \sum_{i=2}^s \mu_i h_{i-1} \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m},$$

woraus

$$f \equiv \sum_{i=1}^s \mu_i h_{i-1} \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$$

folgt.

Es sei $\bar{C}$ eine 2-Kohomologieklassse aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$. Dann besitzt $\bar{C}$ einen über $\mathfrak{o}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus f . Da nach dem oben Bewiesenen

$$f \equiv \sum_{i=1}^s \mu_i h_{i-1} \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m} \quad (\mu_i \in \overline{\mathfrak{D}}, i = 1, 2, \dots, s)$$

gilt, so erhält man:

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^s \mu_i \bar{C}(h_{i-1}),$$

wo $\bar{C}(h_{i-1})$ ($i = 1, 2, \dots, s$) die h_{i-1} enthaltenden 2-Kohomologieklassen aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bezeichnen. Daher bilden $\bar{C}(h_0), \bar{C}(h_1), \dots, \bar{C}(h_{s-1})$ ein Erzeugendensystem von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$.

Wir bezeichnen nun mit K_j ($1 \leq j \leq s$) den Quotientenkörper von $\mathfrak{D}_j$. Da das Hauptideal $(\varphi'_{j-1}(\vartheta_j))$ aus $\mathfrak{D}$ gleich ist der Differente von K_j/K_{j-1} , so ist das Ideal $\mathfrak{D}_{i-1} = (\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\vartheta_j))$ ($1 \leq i \leq s$) nach dem Schachtelungsatz über Differenten gleich der Differente von K/K_{i-1} ¹⁾. Dann gilt folgender

Hilfssatz 10. f_{i-1} sei ein über $\mathfrak{D}_{i-1}$ ausgezeichneter 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ und $\mathfrak{D}_{i-1} = (\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\vartheta_j))$ die Differente von K/K_{i-1} . Dann gilt:

1) Vgl. etwa H. Hasse, Zahlentheorie, Berlin (1950), S. 316.

$$\left[\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] f_{i-1} \sim 0 \quad (\overline{\mathfrak{P}}^m);$$

folglich annulliert die Differente von K/K_{i-1} jede normale 2-Kohomologiekategorie aus $H^{(2)}_o(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$

Beweis. Ist $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_i$, so gilt nach Hilfssatz 5:

$$\varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1} \sim 0 \quad (\overline{\mathfrak{P}}^m).$$

Wir wollen also annehmen, daß für jeden über $\mathfrak{D}_i$ ausgezeichneten 2-Kozyklus f_i von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_i$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ stets

$$\left[\prod_{j=i+1}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] f_i \sim 0 \quad (\overline{\mathfrak{P}}^m)$$

gilt. Offenbar besitzt die Kongruenz

$$\varphi'_{i-1}(\theta_i) \Xi \equiv \varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{i-1}) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

$\Xi = f_{i-1}(\theta_i, \theta_i^{i-1})$ als eine Lösung. Also existiert nach Hilfssatz 5 eine normale 1-Kokette $g_{i,i-1}$ von $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ von der Art, daß für die Einschränkung $f_{i,i-1}$ von f_{i-1} auf $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ $\varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i,i-1} \equiv \partial g_{i,i-1} \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ gilt. Nun sei $g_{j,i-1}$ ($j \geq i$) eine solche Fortsetzung von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{D}_j/\mathfrak{D}_{i-1}$, daß $\partial g_{j,i-1}$ über $\mathfrak{o}$ ausgezeichnet ist. Ist dann $\varphi_j(\Xi) = \Xi^{j+1} + \sum_{v=1}^{j+1} c_v^{(j)} \Xi^v$ das Minimalpolynom von θ_{j+1} in $\mathfrak{D}_j$, so setze man:

$$\varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) = \sum_{v=1}^{j+1} \theta_{j+1}^v g_{j,i-1}(c_v^{(j)}).$$

Da $\Xi = 0$ eine Lösung der Kongruenz

$$\varphi'_j(\theta_{j+1}) \Xi + \varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) \equiv \varphi_j^{(j,i-1)}(\theta_{j+1}) \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$$

ist, so existiert eine normale 1-Kokette $g_{j+1,i-1}$ von $\mathfrak{D}_{j+1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ derart, daß $g_{j+1,i-1}$ eine Fortsetzung von $g_{j,i-1}$ auf $\mathfrak{D}_{j+1}/\mathfrak{o}$ mit $g_{j+1,i-1}(\theta_{j+1}) = 0$ und $\partial g_{j+1,i-1}$ über $\mathfrak{D}_j$ θ_{i+1} -normiert ist¹⁾. Durch vollständige Induktion beweist man die Existenz einer solchen Fortsetzung g_{i-1} von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$, daß $g_{i-1}(\theta_j) \equiv 0 \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$ ($i < j \leq s$) sind und ∂g_{i-1} über $\mathfrak{D}_{i-1}$ ausgezeichnet ist. Offenbar ist $f_i = \varphi'_{i-1}(\theta_i) f_{i-1} - \partial g_{i-1} \sim 0$ ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_i$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ und sogar nach Konstruktion über $\mathfrak{D}_i$ ausgezeichnet. Nach Induktionsannahme gilt also:

$$\left[\prod_{j=i+1}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] f_i = \left[\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] f_{i-1} - \left[\prod_{j=i+1}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] \partial g_{i-1} \sim 0 \quad (\overline{\mathfrak{P}}^m);$$

1) Vgl. M II, Satz 4.

d. h. es ist $\left[\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] f_{i-1} \sim 0 \quad (\overline{\mathfrak{P}}^m).$

Da jede 2-Kohomologiekasse $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ nach Hilfssatz 8 einen über $\mathfrak{D}_{i-1}$ ausgezeichneten 2-Kozyklus enthält, so gilt nach dem eben Bewiesenen stets:

$$\left[\prod_{j=i}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j) \right] \bar{C} = 0;$$

also ist die Klasse $\bar{C}$ durch die Differente $\mathfrak{D}_{i-1}$ von K/K_{i-1} annulliert, weil $\mathfrak{D}_{i-1}$ das durch $\prod_{j=1}^s \varphi'_{j-1}(\theta_j)$ erzeugte Hauptideal ist.

Zusatz 1 zu Hilfssatz 10. Die Differente $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k annulliert jede 2-Kohomologiekasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bzw. $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$.

Aus dem Beweis von Hilfssatz 10 erhält man folgenden

Zusatz 2 zu Hilfssatz 10. Zu einer normalen 1-Kokette $g_{i,i-1}$ von $\mathfrak{D}_i/\mathfrak{D}_{i-1}$ über $\mathfrak{R}_m$ existiert stets eine Fortsetzung g_{i-1} von $g_{i,i-1}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_{i-1}$ derart, daß $g_{i-1}(\theta_j) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$ ($j = i+1, \dots, s$) sind und δg_{i-1} über $\mathfrak{D}_{i-1}$ ausgezeichnet ist.

Nun nehmen wir an, daß $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ kein Nullmodul ist. Da $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ nach Hilfssatz 9 endlich viele Erzeugende besitzt, so besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ eine endliche $\mathfrak{D}$ -Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$, weil $\mathfrak{D}$ ein euklidischer Ring ist. Dabei ist jedes $\bar{C}_i$ ($1 \leq i \leq r$) nach Zusatz 1 zu Hilfssatz 10 durch die Differente von K/k annulliert; also ist die $\mathfrak{D}$ -Länge von $\bar{C}_i$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ endlich. Hieraus schließt man, daß für jede natürliche Zahl m $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ stets endliche $\mathfrak{D}$ -Länge besitzt.

Nun wollen wir für ein hinreichend großes m die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ bestimmen. Da nach Satz 3 für $(\varphi'_0(\theta_1)) \mid \overline{\mathfrak{P}}^m$ die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}_1/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ gleich ist dem $\overline{\mathfrak{P}}$ -Exponenten der Differente von K_1/k , so wollen wir annehmen, daß für jedes hinreichend große m die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ gleich ist dem $\overline{\mathfrak{P}}$ -Exponenten $\bar{d}(K_{s-1}/k)$ der Differente von K_{s-1}/k . Wir ordnen jetzt einem normalen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ die Einschränkung $f^{(s-1)}$ von f auf $\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{o}$ zu. Dadurch gehen offenbar alle zu f kohomologen, normalen 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ in ein und dieselbe normale 2-Kohomologiekasse von $\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$ über. Die so definierte Zuordnung stellt also einen $\mathfrak{D}$ -Homomorphismus Φ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ her. Ist aber $f^{(s-1)}$ ein beliebiger normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}_{s-1}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, so besitzt $f^{(s-1)}$ eine solche

Fortsetzung f auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{v}$, daß f über $\mathfrak{O}_{s-1}$ θ_s -normiert ist¹⁾. Für ein beliebiges Element $\sum_{i=0}^{n_{s-1}-1} x_i^{(s-1)} \theta_s^i (x_i^{(s-1)} \in \mathfrak{O}_{s-1})$ aus $\mathfrak{O}$ und ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{v}$ gilt also:

$$\sum_{i=0}^{n_{s-1}-1} [x f(x_i^{(s-1)}, \theta_s^i) + f(x, x_i^{(s-1)} \theta_s^i)] \equiv \sum_{i=0}^{n_{s-1}-1} [f(x x_i^{(s-1)}, \theta_s^i) + \theta_s^i f(x, x_i^{(s-1)})] \pmod{\mathfrak{P}^m};$$

weil f über $\mathfrak{O}_{s-1}$ θ_s -normiert und $f(x, x_i^{(s-1)}) = f^{(s-1)}(x, x_i^{(s-1)}) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}$ ist, so erhält man aus der obigen Kongruenz:

$$f(x, \sum_{i=0}^{n_{s-1}-1} x_i^{(s-1)} \theta_s^i) \equiv \sum_{i=0}^{n_{s-1}-1} f(x, x_i^{(s-1)} \theta_s^i) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^m}.$$

Daher ist f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{v}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$. Somit ist gezeigt, daß jeder normale 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{v}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ stets einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{v}$ über $\overline{\mathfrak{K}}_m$ als eine Fortsetzung besitzt. Der oben definierte $\mathfrak{O}$ -Homomorphismus Φ bildet also $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m)$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m)$ ab. Dabei ist der Kern von Φ mit der in $\mathfrak{O}_{s-1}$ zerfallenden Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}_m)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m)$ identisch. Daher gilt folgende $\mathfrak{O}$ -Isomorphierelation:

$$(5.2) \quad H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m) / H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}_m) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m).$$

Für jedes hinreichend große m gilt aber nach Satz 1 folgende $\mathfrak{O}$ -Isomorphierelation:

$$(5.3) \quad H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}, \mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}^m) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}_m).$$

Aus (5.2) und (5.3) schließt man ohne weiteres:

$$\begin{aligned} \mathfrak{O}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m) &= \mathfrak{O}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}_m) \\ &\quad + \mathfrak{O}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}_{s-1}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m). \end{aligned}$$

Da $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{O}_{s-1}$ einfach normal ist, so gilt für jedes hinreichend große m :

$$\mathfrak{O}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}_{s-1}; \overline{\mathfrak{K}}_m) = \bar{d}(K/K_{s-1}) \quad (\mathfrak{P}\text{-Exponent der Differente von } K/K_{s-1});$$

daher ist

$$\mathfrak{O}\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{v}; \overline{\mathfrak{K}}_m) = \bar{d}(K/K_{s-1}) + \bar{d}(K_{s-1}/k).$$

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten ist dabei $\bar{d}(K/K_{s-1}) + \bar{d}(K_{s-1}/k)$ gleich dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differente von K/k . Da nach

1) Vgl. M II, Satz 3.

Hilfssatz 1 $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ zu $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ $\mathfrak{S}$ -isomorph ist, so schließen wir aus dem bisher Gezeigten folgenden

Satz 4. *Es sei K endlich-separabel über k und $\mathfrak{O}$ die Hauptordnung von K . Ist dann $\mathfrak{O}$ über $\mathfrak{o}$ normal, so besitzt jede (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$) endliche $\mathfrak{S}$ -Länge, und sogar endliche $\mathfrak{S}$ -Basis, wenn sie kein Nullmodul ist. Ferner existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geq N$ die $\mathfrak{S}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$) gleich ist dem $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differente von K/k .*

§ 6. Struktur der 2-Kohomologiegruppen mit allgemeiner Hauptordnung als Definitionsbereich

Wenn die Hauptordnung $\mathfrak{O}$ einer endlich-separablen Erweiterung K über k nicht notwendig normal über $\mathfrak{o}$ ist, dann betrachten wir eine $\overline{K}$ enthaltende, endlich-separable galoissche Erweiterung K^* über k ; die Hauptordnung von K^* bezeichnen wir mit $\mathfrak{O}^*$. Da K^* über k bzw. K galoissch ist, so ist $\mathfrak{O}^*$ über $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{O}$ normal¹⁾. Ferner bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}^*$ das nicht-triviale Primideal aus $\mathfrak{O}^*$ und mit $d^*(K^*/k)$ bzw. $d^*(K^*/K)$ den $\mathfrak{P}^*$ -Exponenten der Differente von K^*/k bzw. K^*/K . Nach Satz 4 existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geq N$ $d^*(K^*/k)$ bzw. $d^*(K^*/K)$ gleich ist der $\mathfrak{S}^*$ -Länge der normalen 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ bzw. $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{O}; \mathfrak{R}_m^*)$, wo $\mathfrak{R}_m^*$ den Restklassenring von $\mathfrak{O}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$ bezeichnet.

Nach dem am Anfang von § 5 Bemerkten beweist man leicht, daß jeder normale 2-Kozyklus von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ stets als normaler 2-Kozyklus auf $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}$ fortgesetzt werden kann. Wir ordnen nun einem normalen 2-Kozyklus f^* von $\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m^*$ die Einschränkung f von f^* auf $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ zu; durch diese Zuordnung entsteht offenbar ein $\mathfrak{O}^*$ -Homomorphismus Φ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$. Dabei ist der Kern von Φ die in $\mathfrak{O}$ zerfallende Untergruppe $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}; \mathfrak{R}_m^*)$ von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$. Für eine beliebige natürliche Zahl m gilt also folgende $\mathfrak{O}^*$ -Isomorphierelation:

$$(6.1) \quad H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)/H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}; \mathfrak{R}_m^*) \cong H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*).$$

Da nach Satz 4 $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ endliche $\mathfrak{O}^*$ -Länge besitzt, so ist die $\mathfrak{O}^*$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auch endlich. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 11. *Die $\mathfrak{O}^*$ -Länge einer beliebigen (normalen) 2-Koho-*

1) M I, S. 128–129, Hilfssatz 4.

mologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$) *ist endlich.*

Nun wollen wir annehmen, daß die oben bestimmte natürlich Zahl N von vornherein so groß gewählt ist, daß $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}; \mathfrak{R}_m^*)$ nach Satz 1 zu $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{D}; \mathfrak{R}_m^*)$ $\mathfrak{D}^*$ -isomorph ist; also ist für $m \geq N$ die $\mathfrak{D}^*$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}; \mathfrak{R}_m^*)$ gleich $d^*(K^*/K)$. Für jedes m mit $m \geq N$ schließt man also aus (6.1):

$$(6.2) \quad \mathfrak{D}^*\text{-Länge von } H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*) = d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K).$$

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten ist $d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K)$ offenbar gleich dem $\mathfrak{P}^*$ -Exponenten der Differenten von K/k .

Im folgenden bezeichnen wir mit $\bar{e}$ die Verzweigungsordnung von K^* über $\bar{K}$, und wir betrachten den Restklassenring $\bar{\mathfrak{R}}_{m_o}$ bzw. $\mathfrak{R}_m^*$ von $\bar{\mathfrak{D}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^{m_o}$ bzw. $\mathfrak{D}^*$ nach $\mathfrak{P}^{*m}$, wo $m = m_o e$ gesetzt ist. Ist dann $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ kein Nullmodul, so ist nach (6.1) $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auch kein Nullmodul, also besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}^*/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ nach Satz 4 eine $\mathfrak{D}^*$ -Basis. Wegen der Relation (6.1) besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$ auch endliche $\mathfrak{D}^*$ -Basis. Nach Satz 2 besitzt dann $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_o})$ eine $\bar{\mathfrak{D}}$ -Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$; ferner bilden die $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) auch eine $\mathfrak{D}^*$ -Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$. Bezeichnet nun $\bar{l}_i$ die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $\bar{C}_i$, so ist $\bar{l}_i \bar{e}$ nach der Bemerkung von § 3 gleich der $\mathfrak{D}^*$ -Länge von $\bar{C}_i$. Also ist $\sum_{i=1}^r \bar{l}_i \bar{e}$ gleich der $\mathfrak{D}^*$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m^*)$.

Wenn insbesondere $m_o e \geq N$ ist, so gilt nach (6.2):

$$(6.3) \quad \sum_{i=1}^r \bar{l}_i \bar{e} = d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K);$$

also ist $(d^*(K^*/k) - d^*(K^*/K))/\bar{e}$ offenbar gleich dem $\bar{\mathfrak{P}}$ -Exponenten $\bar{d}(K/k)$ der Differenten von K/k . Daher folgt aus (6.3):

$$\sum_{i=1}^r \bar{l}_i = \bar{d}(K/k).$$

Da $\sum_{i=1}^r \bar{l}_i$ die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_o})$ ist, so ist gezeigt, daß die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_{m_o})$ gleich $\bar{d}(K/k)$ ist.

Alles zusammenfassend haben wir bewiesen:

Satz 5. *Es sei $\bar{\mathfrak{R}}_m$ der Restklassenring von $\bar{\mathfrak{D}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}^m$. Dann besitzt die (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$) endliche $\bar{\mathfrak{D}}$ -Basis, wenn sie kein Nullmodul ist. Ferner existiert eine solche natürliche Zahl N , daß für jedes $m \geq N$ (einschließlich $m = \infty$) die $\bar{\mathfrak{D}}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$) gleich ist dem $\bar{\mathfrak{P}}$ -Exponenten der Differenten $\mathfrak{D}(K/k)$ von K/k ; also ist jede normale 2-Kohomologiekategorie aus $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{R}}_m)$) durch $\mathfrak{D}(K/k)$ an-*

nulliert.

Nach Satz 5 besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{D}}/\overline{\mathfrak{P}}^\infty)$ offenbar die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge $\overline{d}(K/k)$. Da nach Verabredung $\overline{\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{D}}/\overline{\mathfrak{P}}^\infty$ gesetzt ist, so bezeichnen wir im folgenden $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{D}}/\overline{\mathfrak{P}}^\infty)$ mit $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{D}})$. Es sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{D}}$. Dann heiße die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge der f enthaltenden, normalen 2-Kohomologieklassse von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{D}}$ die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{D}})$. Für jede natürliche Zahl m induziert f offenbar einen normalen 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$, wo $\overline{\mathfrak{D}}/\overline{\mathfrak{P}}^m = \overline{\mathfrak{R}}_m$ gesetzt ist. Ist nun a_m die $\overline{\mathfrak{D}}$ -Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{R}}_m)$, so ist nach Satz 5

$$a_m \leq \overline{d}(K/k).$$

Ferner gilt für $m_1 < m_2$:

$$a_{m_1} \leq a_{m_2}.$$

Denn für ein Primelement $\overline{\pi}$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ aus $\overline{\mathfrak{D}}$ gilt offenbar

$$\overline{\pi}^{a_{m_2}} f \equiv \partial g_{m_2} \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^{m_2},$$

wo g_{m_2} eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_2}$ bezeichnet; weil g_{m_2} offenbar eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_{m_1}$ ist, so gilt

$$\overline{\pi}^{a_{m_2}} f \equiv \partial g_{m_2} \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^{m_1},$$

also ist $a_{m_1} \leq a_{m_2}$. Daher existieren eine natürliche Zahl N und eine nicht-negative ganze rationale Zahl a von der Art, daß für jedes m mit $m \geq N$ stets $a_m = a$ ist. Offenbar gilt dabei die Ungleichung:

$$(6.4) \quad a \leq \overline{\mathfrak{D}}\text{-Länge von } f \text{ in } H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \overline{\mathfrak{D}}).$$

Ferner existiert eine normale 1-Kokette g_m mit $\overline{\pi}^a f \equiv \partial g_m \text{ mod } \overline{\mathfrak{P}}^m$, wenn $m \geq N$ ist. Für beliebige Elemente X, Y aus $\mathfrak{D}$ gilt dann:

$$\partial(g_{m+1} - g_m)(X, Y) = \overline{\pi}^a f(X, Y) - \overline{\pi}^a f(X, Y) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m;$$

d. h. $D_m = g_{m+1} - g_m$ ist eine *Derivation* von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\overline{\mathfrak{R}}_m$. Nun bezeichnen wir mit $W_1, W_2, \dots, W_n$ eine Minimalbasis von $\mathfrak{D}$ über $\mathfrak{o}$ und mit $\varphi_i(\Xi)$ ($1 \leq i \leq n$) das Minimalpolynom von W_i in $\mathfrak{o}$. Wegen $\varphi_i(W_i) = 0$ gilt dann:

$$\varphi'_i(W_i) D_m(W_i) \equiv 0 \quad \text{mod } \overline{\mathfrak{P}}^m,$$

wo $\varphi'_i(\Xi)$ die Ableitung von $\varphi_i(\Xi)$ nach Ξ bezeichnet. Weil offenbar

$\varphi'_i(W_i) \neq 0$ ist, so besitzt $\varphi'_i(W_i)$ den $\overline{\mathfrak{P}}$ -Exponenten $w_i (w_i < \infty)$; daher ist $D_m(W_i) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^{m-w_i}}$. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m(W_i) = 0$ ist. Da ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ von der Form

$$X = \sum_{i=1}^n x_i W_i \quad (x_i \in \mathfrak{O})$$

ist, so gilt:

$$D_m(X) = \sum_{i=1}^n x_i D_m(W_i) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m};$$

hieraus schließt man:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_m(X) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_i D_m(W_i) = 0.$$

Dies besagt aber, daß die Folge $\{D_m(X), m = N, N+1, \dots\}$ gleichmäßig zur Null konvergiert; d. h. zu einer beliebigen natürlichen Zahl ν existiert eine solche natürliche Zahl $N(\nu) \geq \nu$, daß für ein beliebiges Element X aus $\mathfrak{O}$ und für jedes m mit $m \geq N(\nu)$ stets

$$D_m(X) \equiv 0 \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^\nu}$$

gilt.

Betrachtet man also $g_m(X)$ als eine Funktion von X , so konvergiert die Funktionenfolge $\{g_m(X); m = N, N+1, \dots\}$ gleichmäßig zu einem Element $g(X)$ aus $\overline{\mathfrak{O}}$. Nach Definition gilt für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{O}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(xX) = g(xX);$$

weil aber $g_m(xX) \equiv x g_m(X) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$ ist, so ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(xX) = \lim_{m \rightarrow \infty} x g_m(X) = x g(X),$$

also ist:

$$g(xX) = x g(X).$$

Ferner gelten für ein beliebiges Element Y aus $\mathfrak{O}$:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(X) = g(X), \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(Y) = g(Y) \text{ und } \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(X+Y) = g(X+Y);$$

da $g_m(X+Y) \equiv g_m(X) + g_m(Y) \pmod{\overline{\mathfrak{P}}^m}$ ist, so schließt man ohne Schwierigkeit:

$$g(X + Y) = g(X) + g(Y).$$

Somit ist gezeigt, daß g eine normale 1-Kokette von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{D}$ ist. Wegen der Kongruenz $\overline{\Pi}^a f(X, Y) \equiv \delta g_m(X, Y) \equiv Yg_m(X) + Xg_m(Y) - g_m(XY) \pmod{\mathfrak{P}^m}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}^a f(X, Y) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (Yg_m(X) + Xg_m(Y) - g_m(XY)) \\ &= Yg(X) + Xg(Y) - g(XY) = \delta g(X, Y); \end{aligned}$$

die $\mathfrak{D}$ -Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ ist also nicht größer als a . Hieraus schließt man nach (6.4):

$$a = \mathfrak{D}\text{-Länge von } f \text{ in } H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D}).$$

Mithin ist bewiesen:

Hilfssatz 12. *Es sei f ein normaler 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{D}$ mit der $\mathfrak{D}$ -Länge a in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$. Dann existiert eine natürliche Zahl N , so daß für jedes m mit $m \geq N$ die $\mathfrak{D}$ -Länge von f in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{P}_m)$ gleich a ist. Insbesondere ist dann und nur dann $f \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$), wenn für jedes hinreichend große m stets $f \sim 0$ ($\mathfrak{P}^m$) ist.*

Nun seien $f_1, f_2, \dots, f_r$ $\mathfrak{D}$ -unabhängige, normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{D}$; d. h. aus $\bar{A}_1 f_1 + \bar{A}_2 f_2 + \dots + \bar{A}_r f_r \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$) mit den Koeffizienten $\bar{A}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) aus $\mathfrak{D}$ folgen $\bar{A}_1 f_1 \sim \bar{A}_2 f_2 \sim \dots \sim \bar{A}_r f_r \sim 0$ ($\mathfrak{P}^\infty$). Ferner seien $a_1, a_2, \dots, a_r$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Längen von $f_1, f_2, \dots, f_r$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})^{(1)}$. Dann existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geq N$ $f_1, f_2, \dots, f_r$ als normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{P}_m$ auch $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind. Da nämlich die Behauptung nach Hilfssatz 12 für $r = 1$ richtig ist, so wollen wir annehmen, daß die Behauptung für $f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$ richtig ist. Existiert aber zu $f_1, f_2, \dots, f_r$ keine solche Zahl N , so gibt es eine aufsteigende unendliche Folge der natürlichen Zahlen $m_1 < m_2 < \dots < m_j < \dots$ derart, daß für jedes m_ν ($1 \leq \nu < \infty$) $f_1, f_2, \dots, f_r$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{P}_{m_\nu}$ nicht $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind. Dabei kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß nach Hilfssatz 12 die $\mathfrak{D}$ -Längen von den f_i ($i = 1, \dots, r$) in den $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{P}_{m_\nu})$ ($\nu = 1, 2, \dots$) bzw. gleich a_i sind, und daß $f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{P}_{m_\nu}$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind. Nach Voraussetzung gilt also zu jedem m_ν folgende Kohomologierelation:

1) Weil $f_1, f_2, \dots, f_r$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind, so sind die a_i ($i = 1, 2, \dots, r$) alle größer als 0.

$$(6.5) \quad \bar{A}_{v,1}f_1 + \bar{A}_{v,2}f_2 + \cdots + \bar{A}_{v,r}f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v}),$$

wo mindestens ein $\bar{A}_{v,i}f_i \bmod \bar{\mathfrak{P}}^{m_v}$ zur Null nicht kohomolog ist. Ist dabei $\bar{A}_{v,r}f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v})$, so müssen wegen $\bar{A}_{v,1}f_1 + \cdots + \bar{A}_{v,r-1}f_{r-1} \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v})$ und folglich nach Voraussetzung

$$\bar{A}_{v,1}f_1 \sim \bar{A}_{v,2}f_2 \sim \cdots \sim \bar{A}_{v,r-1}f_{r-1} \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v})$$

sein, was aber ein Widerspruch ist. Es ist also für jedes m ,

$$\bar{A}_{v,r}f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v}).$$

Bezeichnet man nun mit b_v den $\bar{\mathfrak{P}}$ -Exponenten von $\bar{A}_{v,r}$ und mit $\bar{\Pi}$ ein Primelement von $\bar{\mathfrak{P}}$, so ist $\bar{\Pi}^{b_v}\bar{A}_{v,r}^{-1}$ eine Einheit aus $\bar{\mathfrak{O}}$. Durch Multiplikation mit $\bar{\Pi}^{b_v}\bar{A}_{v,r}^{-1}$ erhält man aus (6.5):

$$(6.6) \quad \bar{B}_{v,1}f_1 + \bar{B}_{v,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{v,r-1}f_{r-1} + \bar{\Pi}^{b_v}f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v}),$$

wo $\bar{B}_{v,i} = \bar{A}_{v,i}\bar{A}_{v,r}^{-1}\bar{\Pi}^{b_v}$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) gesetzt sind. Offenbar ist dabei $0 < b_v < a_r$. Es existiert also eine unendliche Teilfolge von $\{b_v; v = 1, 2, \dots\}$, deren Glieder alle gleich sind. Daher kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß von vornherein

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_v = \cdots = b$$

sind. Da aus (6.6) stets

$$\bar{B}_{v,1}f_1 + \bar{B}_{v,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{v,r-1}f_{r-1} + \bar{\Pi}^b f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^{m_v-1})$$

folgt, so kann man annehmen, daß für jedes m mit $m \geq m_1$ stets

$$(6.7) \quad \bar{B}_{m,1}f_1 + \bar{B}_{m,2}f_2 + \cdots + \bar{B}_{m,r-1}f_{r-1} + \bar{\Pi}^b f_r \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^m)$$

gilt, wo die $\bar{B}_{m,i}$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$) Elemente aus $\bar{\mathfrak{O}}$ bezeichnen. Dann schließt man aus (6.7):

$$(\bar{B}_{m+1,1} - \bar{B}_{m,1})f_1 + \cdots + (\bar{B}_{m+1,r-1} - \bar{B}_{m,r-1})f_{r-1} \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^m).$$

Weil nach Voraussetzung $f_1, f_2, \dots, f_{r-1}$ als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ $\bar{\mathfrak{O}}$ -unabhängig sind, so müssen

$$(\bar{B}_{m+1,1} - \bar{B}_{m,1})f_1 \sim \cdots \sim (\bar{B}_{m+1,r-1} - \bar{B}_{m,r-1})f_{r-1} \sim 0 \quad (\bar{\mathfrak{P}}^m)$$

sein; hieraus folgt für jedes i mit $1 \leq i \leq r-1$:

$$\bar{B}_{m+1,i} \equiv \bar{B}_{m,i} \quad \bmod \bar{\mathfrak{P}}^{a_i}.$$

Da aber m beliebig sein kann, soweit $m \geq m_1$ ist, so erhält man:

$$\bar{B}_{m_1, i} \equiv \bar{B}_{m_1+1, i} \equiv \dots \equiv \bar{B}_{m, i} \equiv \dots \pmod{\mathfrak{P}^{a_i}}.$$

Setzt man dabei $\bar{B}_{m_1, i} = \bar{B}_i$, so ist

$$\bar{B}_{m, i} - \bar{B}_i \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^{a_i}};$$

also gilt $(\bar{B}_{m, i} - \bar{B}_i)f_i \sim 0 \pmod{\mathfrak{P}^\infty}$ und infolgedessen ist

$$\bar{B}_{m, i}f_i = \bar{B}_if_i + (\bar{B}_{m, i} - \bar{B}_i)f_i \sim \bar{B}_if_i \pmod{\mathfrak{P}^\infty}.$$

Man erhält also aus (6.7);

$$(6.8) \quad \bar{B}_1f_1 + \bar{B}_2f_2 + \dots + \bar{B}_{r-1}f_{r-1} + \bar{B}_rf_r \sim 0 \pmod{\mathfrak{P}^m},$$

woraus nach Hilfssatz 12

$$\bar{B}_1f_1 + \bar{B}_2f_2 + \dots + \bar{B}_{r-1}f_{r-1} + \bar{B}_rf_r \sim 0 \pmod{\mathfrak{P}^\infty}$$

folgt, was aber ein Widerspruch ist. Somit ist bewiesen:

Hilfssatz 13. *Es seien $f_1, f_2, \dots, f_r$ $\mathfrak{D}$ -unabhängige, normale 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{D}$ und $a_1, a_2, \dots, a_r$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Längen von $f_1, f_2, \dots, f_r$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$. Dann existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geq N$ $f_1, f_2, \dots, f_r$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ bzw. die $\mathfrak{D}$ -Längen $a_1, a_2, \dots, a_r$ besitzen und sogar als 2-Kozyklen von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{R}_m$ $\mathfrak{D}$ -unabhängig sind.*

Nun kann man folgenden Satz beweisen:

Satz 6. *Es existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geq N$ die (normale) 2-Kohomologiegruppe $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$) zu $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ ($H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$) $\mathfrak{D}$ -isomorph ist.*

Beweis. Nach Hilfssatz 1 braucht man den Satz nur für die normalen 2-Kohomologiegruppen zu beweisen. Nach Satz 5 existiert eine natürliche Zahl N_1 von der Art, daß für jedes m mit $m \geq N_1$ die $\mathfrak{D}$ -Länge von $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ gleich $\bar{d}(K/k)$ ist, wo $\bar{d}(K/k)$ den $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differenten von K/k bezeichnet. Wenn also $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ der Nullmodul ist, so ist $\bar{d}(K/k) = 0$ und infolgedessen ist $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{R}_m)$ auch Nullmodul. Ist aber $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ kein Nullmodul, so besitzt $H_o^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \mathfrak{D})$ nach Satz 5 eine endlich $\mathfrak{D}$ -Basis $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_r$. Wir bezeichnen mit den $\bar{l}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) bzw. die $\mathfrak{D}$ -Längen von den $\bar{C}_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$) und mit den f_i ($i = 1, 2, \dots, r$) bzw. die Vertreterkozyklen aus den $\bar{C}_i$. Nach Hilfssatz 13 existiert dann eine natürliche Zahl N_2 von der Art, daß für jedes m

mit $m \geq N_2$ $f_1, f_2, \dots, f_r$ als 2-Kozyklen aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ $\mathfrak{O}$ -unabhängig sind und bzw. die $\mathfrak{O}$ -Längen $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_r$ besitzen. Für jedes m mit $m \geq \text{Max}(N_1, N_2)$ bezeichnen wir mit $\bar{C}_m(f_i)$ ($1 \leq i \leq r$) die f_i enthaltende 2-Kohomologiekategorie aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$; offenbar ist die $\mathfrak{O}$ -Länge von $\bar{C}_m(f_i)$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ gleich $\bar{l}_i$. Ferner sind $\bar{C}_m(f_1), \bar{C}_m(f_2), \dots, \bar{C}_m(f_r)$ in $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ $\mathfrak{O}$ -unabhängig. Daher besitzt der durch die $\bar{C}_m(f_i)$ ($i=1, 2, \dots, r$) erzeugte $\mathfrak{O}$ -Untermodule von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ die $\mathfrak{O}$ -Länge $\sum_{i=1}^r \bar{l}_i = \bar{d}(K/k)$ ($= \mathfrak{O}$ -Länge von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$); d. h. die $\bar{C}_m(f_i)$ ($i=1, 2, \dots, r$) bilden eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$.

Eine beliebige 2-Kohomologiekategorie $\bar{C}$ aus $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ ist von Form $\bar{C} = \sum_{i=1}^r \bar{A}_i \bar{C}_i$ mit den Koeffizienten $\bar{A}_i$ ($i=1, 2, \dots, r$) aus $\mathfrak{O}$. Ordnet man nun $\bar{C}$ die 2-Kohomologiekategorie $\bar{C}_m = \sum_{i=1}^r \bar{A}_i \bar{C}_m(f_i)$ zu, so ergibt sich durch diese Zuordnung ein $\mathfrak{O}$ -Homomorphismus ψ_m von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ auf $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$, weil die $\bar{C}_m(f_i)$ ($i=1, 2, \dots, r$) eine $\mathfrak{O}$ -Basis von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ bilden. Da die $\mathfrak{O}$ -Längen von $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{O})$ und $H_o^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ einander gleich sind, so muß ψ_m sicher ein Isomorphismus sein, w. z. b. w.

Es sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen k und K und $\mathfrak{O}^{(1)}$ die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ordnet man dann einem beliebigen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{O}/\mathfrak{o}$ über $\mathfrak{K}_m$ die Einschränkung $f^{(1)}$ von f auf $\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}$ zu, so induziert diese Zuordnung einen $\mathfrak{O}$ -Homomorphismus Φ von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ in $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$. Dabei bezeichnet $\mathfrak{K}_m$ wieder den Restklassenring von $\mathfrak{O}$ nach $\mathfrak{P}^m$. Nach Satz 5 existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geq N$ die $\mathfrak{O}$ -Längen von $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$, $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m)$ und $H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m)$ bzw. $\bar{d}(K/k)$, $\bar{d}(K/K^{(1)})$ und $\bar{d}(K^{(1)}/k)$ sind, wo $\bar{d}(K/k)$, $\bar{d}(K/K^{(1)})$ und $\bar{d}(K^{(1)}/k)$ bzw. die $\mathfrak{P}$ -Exponenten der Differenten von K/k , $K/K^{(1)}$ und $K^{(1)}/k$ bezeichnen. Ferner kann man nach Satz 1 ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für jedes m ($\geq N$) die in $\mathfrak{O}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m)$ zu $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m)$ $\mathfrak{O}$ -isomorph ist. Da offenbar $H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m)$ den Kern des $\mathfrak{O}$ -Homomorphismus Φ bildet, so schließt man ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned} \bar{d}(K/k) &\leq \bar{d}(K^{(1)}/k) + \mathfrak{O}\text{-Länge von } H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m) \\ &\leq \bar{d}(K^{(1)}/k) + \bar{d}(K/K^{(1)}). \end{aligned}$$

Wegen des Schachtelungssatzes über Differenten muß dabei Gleichheit $\bar{d}(K/k) = \bar{d}(K^{(1)}/k) + \bar{d}(K/K^{(1)})$ bestehen; d. h. durch Φ ergibt sich folgende $\mathfrak{O}$ -Isomorphierelation:

$$(6.9) \quad H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m) / H^{(2)}(\mathfrak{O}/\mathfrak{o}, \mathfrak{O}^{(1)}; \mathfrak{K}_m) \cong H^{(2)}(\mathfrak{O}^{(1)}/\mathfrak{o}; \mathfrak{K}_m).$$

Satz 7. Es sei $\mathfrak{O}^{(1)}$ die Hauptordnung eines beliebigen Zwischen-

körpers $K^{(1)}$ zwischen k und K . Dann existiert eine natürliche Zahl N von der Art, daß für jedes m mit $m \geq N$ stets die $\bar{\mathfrak{S}}$ -Isomorphierelation

$$H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m) / H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{K}}_m) \cong H^{(2)}(\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$$

gilt, wo $\bar{\mathfrak{K}}_m$ den Restklassenring von $\bar{\mathfrak{S}}$ nach $\bar{\mathfrak{P}}_m$ und $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ die in $\mathfrak{D}^{(1)}$ zerfallende Untergruppe von $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ bezeichnet.

Nun sei $f^{(1)}$ ein 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$. Dann besagt die Relation (6.9), daß es einen 2-Kozyklus f von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ gibt, dessen Einschränkung auf $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ mod $\bar{\mathfrak{P}}_m$ zu $f^{(1)}$ kohomolog ist; d. h. als 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ gilt:

$$f \sim f^{(1)} \quad (\bar{\mathfrak{P}}_m).$$

Es existiert also eine 1-Kokette $g^{(1)}$ von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$, für die in $H^{(2)}(\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$

$$f \equiv f^{(1)} + \delta g^{(1)} \quad \text{mod } \bar{\mathfrak{P}}_m$$

gilt. Wie schon am Anfang von §2 gezeigt ist, besitzt $g^{(1)}$ eine Fortsetzung g auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$. Der 2-Kozyklus $f - \delta g$ ist also eine Fortsetzung von $f^{(1)}$ auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$. Somit ist bewiesen:

Zusatz 1 zu Satz 7. *Es existiert eine natürliche Zahl N derart, daß für jedes m mit $m \geq N$ ein beliebiger 2-Kozyklus $f^{(1)}$ von $\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ stets auf $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ fortsetzbar ist.*

Stimmt nun $K^{(1)}$ mit seinem *Trägheitskörper* über k überein, so ist $\mathfrak{D}^{(1)}$ einfach normal über $\mathfrak{o}$, und der $\bar{\mathfrak{P}}$ -Exponent der Differenten von $K^{(1)}/k$ ist gleich 0¹⁾. Also ist $H^{(2)}(\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ nach Satz 3 stets Nullmodul. Weil aber für jedes m $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m) / H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ $\bar{\mathfrak{S}}$ -isomorph in $H^{(2)}(\mathfrak{D}^{(1)}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ abgebildet ist, so muß $H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}; \bar{\mathfrak{K}}_m) = H^{(2)}(\mathfrak{D}/\mathfrak{o}, \mathfrak{D}^{(1)}; \bar{\mathfrak{K}}_m)$ sein; d. h. jeder 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ zerfällt stets in $\mathfrak{D}^{(1)}$.

Zusatz 2 zu Satz 7. *Es sei $K^{(1)}$ ein Zwischenkörper zwischen k und K , und $\mathfrak{D}^{(1)}$ sei die Hauptordnung von $K^{(1)}$. Ist dann $K^{(1)}$ mit seinem *Trägheitskörper* über k identisch, so zerfällt jeder 2-Kozyklus von $\mathfrak{D}/\mathfrak{o}$ über $\bar{\mathfrak{K}}_m$ stets in $\mathfrak{D}^{(1)}$.*

1) Vgl. etwa E. Artin, a. a. O., S. 91–92.