ZUR THEORIE DER TOPOLOGISCHEN KÖRPER[1]

MIKAO MORIYA

In einer früher erschienenen Arbeit von mir[2] habe ich die Theorie der halb-topologischen Körper entwickelt. Ein Körper K mit einer Topologie heißt halb-topologisch, wenn nur die Addition und Multiplikation des Körpers in bezug auf die Topologie stetig sind—d.h. $x \dotplus y$ $(x, y \in K)$ sind stetige Funktionen in bezug auf die Topologie von K—. Ich habe dort gezeigt, daß ein lokalkompakter[3], halb-topologischer Körper, welcher dem Fréchetschen Trennungsaxiom genügt, stets ein Hausdorffscher topologischer Körper ist; ferner genügt dieser topologische Körper dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. Anschließend daran will ich hier die lokalkompakten, Hausdorffschen topologischen Körper behandeln. Die Struktur der lokalkompakten, Hausdorffschen topologischen Körper ist bereits—für die zusammenhängenden Körper von L. Pontrjagin[4] und für die nicht-zusammenhängenden Körper von N. Jacobson[5]—bestimmt worden. Aber die Wege, welche die beiden Autoren eingeschlagen haben, sind an manchen Stellen weitaus verschieden. Daher scheint es mir nicht ohne Interesse, die Strukturtheorie der lokalkompakten, Hausdorffschen topologischen Körper nochmals vom einheitlicheren Standpunkt aus zu behandeln. Dies Problem ist neulich von H. J. Kowalsky[6] in Angriff genommen; da aber seine Methode auch von der meinigen verschieden ist, so habe ich mich entschlossen, im folgenden meine Methode darzulegen.

§1. Vorbereitung. In diesem Paragraphen werden einige wichtige Tatsachen zusammengestellt, deren Beweise schon bekannt sind. Die

---

1) One of my works which have been done by the Scientific Research Expenditure of the Ministry of Education.

2) M. Moriya, Zur Theorie der halb-topologischen Gruppen und Körper, Math. Journ., Okayama University, Vol. 1 (1952), S. 109-124. Diese Arbeit wird im folgenden mit M zitiert.

3) „Lokalkompakt ‘ bedeutet „im Kleinen bikompakt“; ebenso bedeutet „kompakt“ „bikompakt“.

4) L. Pontrjagin, Über stetige algebraische Körper, Ann. Math., Vol. 33 (1932), S. 163-174.

5) N. Jacobson, Totally disconnected locally compact rings, Amer. Journ. Math., Vol. 58 (1936), S. 433-449.

6) H. J. Kowalsky, Math. Nachr., Bd. 9 (1953), S. 261-268.

ganze Arbeit hindurch versteht man unter einem *topologischen Körper* einen solchen, dessen Topologie *nicht diskret* ist.

Für einen lokalkompakten, Hausdorffschen topologischen (l. H. t.) Körper K gelten folgende Sätze:

Satz 1. *Eine kompakte Teilmenge aus K ist stets beschränkt; also ist rechts- und linksbeschränkt.*

Satz 2. *K genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom.*

Satz 3. *K besitzt mindestens ein analytisch nilpotentes Element; d.h. es existiert ein Element $t \neq 0$ aus K mit $\lim_{n\to\infty} t^n \to 0$.*

Satz 4. *K ist entweder zusammenhängend oder diskontinuierlich. Wenn K nicht diskontinuierlich ist, so ist K lokalzusammenhängend; d.h. jede Umgebung eines beliebigen Elementes x aus K enthält eine offene, zusammenhängende Umgebung von x.*

Satz 5.[1] *K ist vollständig; d.h. jede Cauchysche Folge aus K besitzt stets das Grenzelement aus K.*

Zum Beweis von Satz 1—Satz 4 genügen schon die Gültigkeit des Fréchetschen Trennungsaxiomes und die Stetigkeit der Addition und Multiplikation von K, also ist die Stetigkeit der Subtraktion und Division entbehrlich.[2]

§2. Nilpotente, divergente und neutrale Elemente. Ein Element t aus einem l.H.t. Körper K heißt *nilpotent*, wenn $\lim_{n\to\infty} t^n \to 0$ ist; ist insbesondere $t \neq 0$, so heißt t *analytisch nilpotent*.

Hilfssatz 1. *Ein Element t aus K ist dann und nur dann nilpotent, wenn für irgendeine nicht-leere kompakte Menge B aus K*

$$tB \subsetneqq B$$

gilt.

Beweis. Zunächst sei $tB \subsetneqq B$ für eine nicht-leere kompakte Menge B aus K und für ein Element t aus K. Dann ist t sicher nilpotent, wenn $t = 0$ ist. Wir nehmen also an, daß $t \neq 0$ ist. Nach Voraussetzung erhält man dann

$$\cdots\cdots \subsetneqq t^i B \subsetneqq t^{i-1} B \subsetneqq \cdots\cdots \subsetneqq tB \subsetneqq B.$$

1) Vgl. etwa Pontrjagin, a.a.O., Hilfssatz 30.
2) Vgl. Hilfssatz 10, Satz 5, Zusatz zu Satz 5 und Satz 6 in M.

Die Folge $\{t^n;\ n=1,2,\cdots\cdots\}$ besitzt aber einen Häufungspunkt t_0, und es gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} t^n B = t_0 B = t_0 t B^{1)}.$$

Wäre dann $t_0 \neq 0$, so würde entgegen der Voraussetzung

$$tB = B$$

sein; also muß $t_0 = 0$ sein. Da B als kompakte Menge beschränkt ist, so existiert zu einer beliebigen Umgebung U von 0 eine Umbung V von 0, so daß $VB \subseteqq U$ ist. Weil $t_0 = 0$ ein Häufungspunkt von $\{t^n;\ n=1,2,\cdots\cdots\}$ ist, so gibt es ein t^m mit $t^m \in V$; hieraus folgt, daß für alle natürlichen Zahlen n mit $n > m$

$$t^n B = t^{m+(n-m)} B \subsetneqq t^m B \subseteqq U$$

gelten. Wegen $tB \subsetneqq B$ besitzt B ein von Null verschiedenes Element b, und es gilt:

$$t^n b \in U \qquad (n = m, m+1, \cdots\cdots);$$

d.h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} t^n \to 0.$$

Umgekehrt sei t ein nilpotentes Element aus K und W eine kompakte Umgebung von 0 (es ist also $\{0\} \subsetneqq W$, weil die Körpertopologie nicht diskret ist). Da W beschränkt und $\lim_{n\to\infty} t^n \to 0$ ist, so existiert eine natürliche Zahl m mit der Eigenschaft, daß für jedes $n \geqq m$ stets

$$t^n W \subseteqq W$$

gilt. Setzt man dann

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} t^i W\right) \cup W,$$

so ist B sicher eine nicht-leere kompakte Umgebung von 0, und es gilt:

$$tB \subseteqq B.$$

Wäre dann $tB = B$, so gälte einerseits

1) Vgl. Satz 5 in M.

$$\cdots\cdots = t^i B = t^{i-1} B = \cdots\cdots = tB = B$$

und anderseits für eine hinreichend große natürliche Zahl ν

$$t^\nu B \subsetneqq W \subseteqq B,$$

weil B als kompakte Menge beschränkt ist; dies ist aber ein Widerspruch. Es muß daher

$$tB \subsetneqq B$$

sein.

In der letzteren Hälfte des Beweises von Hilfssatz 1 ist gezeigt, daß zu einem beliebigen nilpotenten Element t aus K stets eine kompakte (also beschränkte) Umgebung B von 0 mit $t^i B \subsetneqq B$ $(i \geqq 1)$ existiert. Da B beschränkt ist, so gibt es eine offene Umgebung U von 0 mit $UB \subsetneqq B$; wegen $\lim\limits_{n\to\infty} t^n \to 0$ gilt für eine Potenz t^m von t:

$$t^m \in U.$$

Es gibt also eine Umgebung $V(t)$ von t, für die

$$V(t)^m \subseteqq U$$

gilt. Ist also v ein beliebiges Element aus $V(t)$, so besteht die Ungleichung:

$$v^m B \subsetneqq B;$$

nach Hilfssatz 1 ist also v^m ein nilpotentes Element. Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß v selber nilpotent ist; d.h. die Umgebung $V(t)$ besteht aus lauter nilpotenten Elementen.

Somit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 6. *Die Gesamtheit N aller nilpotenten Elemente aus K bildet eine offene Teilmenge von K.*

Eine Folge $\{x_n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ aus K heißt *divergent*, wenn sie keinen Häufungspunkt besitzt. Nach N. Jacobson gilt dann[1]:

Hilfssatz 2. *Ist $\{x_n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ eine divergente Folge aus K, so existiert eine natürliche Zahl n_0 von der Art, daß $\{x_n^{-1};\ n = n_0, n_0 + 1, \cdots\cdots\}$ eine Nullfolge ist.*

Ein Element u aus K heißt *divergent*, wenn die Folge $\{u^n;\ n = 1,$

1) N. Jacobson, a.a.O., Lemma 6.1.

$2, \cdots\cdots\}$ divergent ist. Ein Element e aus K, welches weder nilpotent noch divergent ist, heißt *neutral*.

Hilfssatz 3. *Ein Element u aus K ist dann und nur dann divergent, wenn u^{-1} existiert und analytisch nilpotent ist.*

Beweis. Ist u divergent, so ist es definitionsgemäß von 0 verschieden. Es existiert also u^{-1}, und $\{u^{-n};\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ ist nach Hilfssatz 2 eine Nullfolge; d.h. u^{-1} ist ein analytisch nilpotentes Element.

Umgekehrt sei für ein Element u aus K u^{-1} analytisch nilpotent. Besäße dann die Folge $\{u^n;\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ einen Häufungspunkt u_0, so würde $0\cdot u_0 = 0$ ein Häufungspunkt der Folge $\{u^{-n}\cdot u^n = 1;\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ sein; dies ist aber ein Widerspruch. Es muß also u divergent sein.

Hilfssatz 4. *Eine unendliche Folge $\{x_n;\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$, deren Glieder x_n $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ alle nicht divergent sind, ist nicht divergent.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an. Da $\{x_n;\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ divergent ist, so existiert nach Hilfssatz 2 eine natürliche Zahl n_0, so daß

$$\{x_n^{-1};\ n = n_0,\ n_0+1,\ \cdots\cdots\}$$

eine Nullfolge ist. Ferner existiert nach Satz 6 eine Umgebung V von 0, die aus lauter nilpotenten Elementen besteht. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n^{-1} \to 0$ gehört ein x_m^{-1} zu V; nach Hilfssatz 3 ist also x_m divergent, was aber mit der Voraussetzung im Widerspruch steht.

Im folgenden bezeichnet G durchweg die Gesamtheit aller neutralen und nilpotenten Elemente aus K. Offenbar ist G nicht leer, und G ist eine Umgebung von 0, weil es die offene Menge N enthält (nach Satz 6).

Satz 7. *G ist eine abgeschlossene, kompakte Teilmenge von K.*

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, daß G eine abgeschlossene Teilmenge von K ist. Dazu nehmen wir das Gegenteil an. Dann besitzt das Komplement von G mit der abgeschlossenen Hülle $\overline{G}$ von G ein Element p gemeinsam, und p ist sicher divergent. Ist also U eine offene Umgebung von 0, welche aus lauter nilpotenten Elementen besteht, so gilt für eine geeignete natürliche Zahl n:

$$p^{-n} \in U,$$

weil nach Hilfssatz 3 p^{-1} nilpotent ist. Da U eine offene Menge von

K ist, so existiert eine Umgebung $V(p)$ von p mit $V(p)^{-n} \subseteqq U$. Ferner ist die Menge $V(p) \cap G$ nicht leer. Für ein Element x aus $V(p) \cap G$ gilt dann:

$$x^{-n} \in V(p)^{-n} \subseteqq U;$$

hieraus folgt, daß x^{-1} ein nilpotentes Element ist, was aber ein Widerspruch ist. Folglich ist $G = \bar{G}$; d.h. G ist in K abgeschlossen.

Nun zeigen wir, daß G kompakt ist. Dazu ziehen wir eine offene Umgebung U von 0 heran, deren abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ kompakt ist. Ferner sei t ein analytisch nilpotentes Element (ein solches existiert nach Satz 3). Gilt dann für eine Potenz t^i $(i \geqq 0)$ von t

$$Gt^i \subseteqq U,$$

so ist

$$G \subseteqq \bar{U}t^{-i};$$

da $\bar{U}t^{-i}$ kompakt und G abgeschlossen ist, so ist G kompakt. Es genügt also zu zeigen, daß die Annahme $Gt^i \not\subseteqq U$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ zum Widerspruch führt. Ist nun für jedes i $(i \geqq 1)$ $Gt^i \not\subseteqq U$, so gibt es ein Element g_i aus G mit $g_i t^i \in C(U)$, wo $C(U)$ das Komplement von U in K bezeichnet. Die Folge $\{g_i;\ i = 1, 2, \cdots\cdots\}$ besitzt nach Hilfssatz 4 einen Häufungspunkt g; also ist $g \cdot 0 = 0$ ein Häufungspunkt der Folge $\{g_i t^i;\ i = 1, 2, \cdots\cdots\}$ und infolgedessen ist $0 \in C(U)$, weil $C(U)$ in K abgeschlossen ist. Dies ergibt einen Widerspruch.

§3. Kompakte multiplikative Halbgruppen. Für die in §2 eingeführte Menge G definieren wir die Menge G^* als die Gesamtheit aller Elemente g^* mit $g^*G \subseteqq G$. Dann gilt offenbar:

$$G^*G \subseteqq G;$$

weil G 1-Element enthält, so ist $G^* \subseteqq G$. Ein Element aus G^* ist also entweder neutral oder nilpotent. Nun gilt folgender

Hilfssatz 5.

i) *G^* ist eine multiplikative Halbgruppe mit* 1 *und* 0.

ii) *G^* ist eine abgeschlossene, kompakte Teilmenge von K.*

iii) *G^* ist in K invariant; d.h. für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element x aus K gilt stets*

$$xG^*x^{-1} = G^*.$$

iv) *Ein Element* g^* *aus* G^* *ist dann und nur dann neutral, wenn* $g^*G = G$ *ist. Die Gesamtheit aller neutralen Elemente aus* G^* *bildet eine multiplikative Gruppe.*

v) *Für ein beliebiges nilpotentes Element* t^* *aus* G^* *und für ein beliebiges Element* g *aus* G *sind* t^*g *und* gt^* *nilpotent.*

vi) *Die Gesamtheit* N^* *aller nilpotenten Elemente aus* G^* *bildet eine offene Teilmenge von* K.

Beweis. i) Da $1\cdot G = G$ und $0\cdot G = 0 \in G$ sind, so sind $1, 0$ in G^* enthalten. Nun seien g_1^*, g_2^* beliebige Elemente aus G^*. Dann ist

$$(g_1^* g_2^*)G = g_1^*(g_2^* G) \leqq g_1^* G \leqq G;$$

also ist G^* eine multiplikative Halbgruppe mit 1 und 0.

ii) p^* sei ein Häufungspunkt von G^* und g ein beliebiges Element aus G. Dann ist p^*g offenbar ein Häufungspunkt von G^*g $(\leqq G)$; da G nach Satz 7 in K abgeschlossen ist, so ist $p^*g \in G$. Weil g ein beliebiges Element aus G sein kann, so ist nach Definition

$$p^* \in G^*;$$

d.h. G^* ist in K abgeschlossen. Da G^* eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge G ist, so ist G^* auch kompakt.

iii) Offenbar gilt für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element x aus K:

$$xGx^{-1} = G.$$

Für ein beliebiges Element g^* aus G^* besteht also:

$$xg^*x^{-1}G = (xg^*x^{-1})(xGx^{-1}) = x(g^*G)x^{-1} \leqq xGx^{-1} = G;$$

d.h. es ist $xG^*x^{-1} \leqq G^*$. Da aber x alle von 0 verschiedenen Elemente aus K durchlaufen kann, so ist

$$x^{-1}G^*x \leqq G^*;$$

hieraus folgt:

$$G^* \leqq xG^*x^{-1} \leqq G^*,$$

w.z.b.w.

iv) Ist e^* ein neutrales Element aus G^*, so muß $e^*G = G$ sein. Denn sonst gälte wegen $e^*G \leqq G$ die Ungleichung

$$e^*G \lneqq G;$$

da G kompakt ist, so müßte dann nach Hilfssatz 1 e^* ein nilpotentes Element sein. Gilt umgekehrt für ein Element g^* aus G^*

$$g^*G = G,$$

so sind

$$\cdots\cdots = g^{*i}G = g^{*i-1}G = \cdots\cdots = g^*G = G.$$

Wäre dann g^* nilpotent, so würde für eine hinreichend große natürliche Zahl n

$$g^{*n}G \subsetneqq G$$

sein, weil G kompakt ist und überdies eine Umgebung von 0 ist. Folglich muß g^* neutral sein.

Sind nun e_1^*, e_2^* neutrale Elemente aus G^*, so gilt offenbar:

$$(e_1^* e_2^*)G = e_1^*(e_2^*G) = e_1^*G = G,$$

also ist $e_1^*e_2^*$ auch neutrales Element aus G^*. Ferner folgt aus $e^*G = G$ die Gleichung

$$G = e^{*-1}G;$$

nach dem oben Bewiesenen ist e^{*-1} ein neutrales Element aus G^*. Somit ist gezeigt, daß die Gesamtheit aller neutralen Elemente aus G^* eine multiplikative Gruppe bildet.

v) Ist $g = 0$, so sind $t^*g = gt^* = 0$, also sind t^*g und gt^* nilpotent. Wir nehmen also $g \neq 0$ an.

a) g ist ein analytisch nilpotentes Element. In diesem Fall gilt für jede natürliche Zahl n:

$$(t^*g)^n = t^*(gt^*g^{-1})(g^2t^*g^{-2}) \cdots\cdots (g^{n-1}t^*g^{-n+1})g^n.$$

Nach iii) sind $g^it^*g^{-i} \in G^*$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$; da G^* eine multiplikative Halbgruppe ist, so sind

$$(t^*g)^n \in G^*g^n \qquad (n = 1, 2, \cdots\cdots).$$

Weil nach ii) G^* kompakt und g nilpotent ist, so existiert zu einer beliebigen Umgebung U von 0 eine natürliche Zahl m, so daß für alle n mit $n \geqq m$

$$G^*g^n \subseteqq U$$

und infolgedessen

$$(t^*g)^n \in U$$

sind; dies besagt aber, daß $\lim_{n\to\infty}(t^*g)^n \to 0$ ist. Ebenso beweist man leicht, daß

$$\lim_{n\to\infty}(gt^*)^n \to 0$$

ist. Also sind t^*g und gt^* nilpotent.

b) g ist ein neutrales Element. In diesem Fall besitzt die Folge $\{g^n;\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ einen von 0 verschiedenen Häufungspunkt h aus G. Da das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt ist, so kann man aus der obigen Folge eine zu h konvergierende Teilfolge $\{g^{\nu_n};\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ herausgreifen. Offenbar konvergiert dann die Folge $\{g^{\nu_n}h^{-1};\ n=1, 2, \cdots\cdots\}$ zu 1. Setzt man nun $h^{-1}t^*h = t_1^*$, so ist t_1^* auch ein nilpotentes Element aus G^*. Ferner gilt:

$$\begin{aligned}(t_1^*g)^n &= t_1^*(gt_1^*g^{-1})\cdots\cdots(g^{n-1}t_1^*g^{-n+1})g^n\\ &= (h^{-1}t^*h)(gh^{-1}t^*(gh^{-1})^{-1})\cdots\cdots(g^{n-1}h^{-1}t^*(g^{n-1}h^{-1})^{-1})g^n\end{aligned}$$

Nun kann man für eine beliebige Umgebung W_0 von 0 eine offene Umgebung W von 0 so bestimmen, daß

$$WG \subseteqq W_0$$

ist. Dann existiert eine natürliche Zahl m mit $t^{*m} \in W$. Da W offen ist, so gibt es eine Umgebung U von t^*, für die $U^m \subseteqq W$ ist, Wegen $1\cdot t^*\cdot 1^{-1} = t^*$ existiert eine Umgebung V von 1 von der Art, daß $Vt^*V^{-1} \subseteqq U$ ist. Wegen $\lim_{n\to\infty} g^{\nu_n}h^{-1} \to 1$ existieren m Elemente $g^{\mu_1}h^{-1}$, $g^{\mu_2}h^{-1}, \cdots\cdots, g^{\mu_m}h^{-1}$ $(\mu_1 < \mu_2 < \cdots\cdots < \mu_m)$ aus V, und es gilt:

$$\begin{aligned}&[g^{\mu_1}h^{-1}t^*(g^{\mu_1}h^{-1})^{-1}]\cdots\cdots\\ &\qquad\cdots[g^{\mu_m}h^{-1}t^*(g^{\mu_m}h^{-1})^{-1}] \in (Vt^*V^{-1})^m \subseteqq U^m \subseteqq W.\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun die Relation $xG^* = G^*x$ $(x \neq 0)$, so erhält man für jedes n mit $n \geqq \mu_m$:

$$\begin{aligned}(t_1^*g)^n &= [g^{\mu_1}h^{-1}t^*(g^{\mu_1}h^{-1})^{-1}][g^{\mu_2}h^{-1}t^*(g^{\mu_2}h^{-1})^{-1}]\cdots\cdots\\ &\qquad\cdots[g^{\mu_m}h^{-1}t^*(g^{\mu_m}h^{-1})^{-1}]g_n^*g^n,\end{aligned}$$

wo g_n^* ein Element aus G^* bezeichnet. Wegen $g_n^*g^n \in G$ gelten für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geqq \mu_m$:

$$(t_1^*g)^n \in WG \subseteqq W_0;$$

d.h. t_1^*g ist ein nilpotentes Element. Da ht^*h^{-1} ein nilpotentes Element aus G^* ist, so folgt aus dem eben Bewiesenen, daß $h^{-1}(ht^*h^{-1})hg = t^*g$ auch nilpotent ist. Ebenso beweist man leicht, daß gt^* auch ein nilpotentes Element ist.

vi) Für ein beliebiges nilpotentes Element t^* aus G^* gilt nach v):

$$t^*G \subseteqq N,$$

wo N die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus K bezeichnet. Da N nach Satz 6 in K offen und G kompakt ist, so gibt es zu einem beliebigen Element g_λ aus G eine offe Umgebung $U(g_\lambda)$ von g_λ und eine Umgebung $V_\lambda(t^*)$ von t^* derart, daß

$$V_\lambda(t^*)U(g_\lambda) \subseteqq N$$

ist. Dann gilt

$$t^*G \subseteqq \bigcup_{g_\lambda \in G} V_\lambda(t^*)U(g_\lambda) \subseteqq N.$$

Da G kompakt und $\mathfrak{U} = \{U(g_\lambda)\,;\, g_\lambda \in G\}$ eine offene Überdeckung von G ist, so kann man aus $\mathfrak{U}$ endlich viele Elemente $U(g_1), U(g_2), \cdots\cdots,$ $U(g_s)$ so herausgreifen, daß $\bigcup_{i=1}^{s} U(g_i) \geqq G$ ist. Setzt man nun $V(t^*) = \bigcap_{i=1}^{s} V_i(t^*)$, so gilt:

$$V(t^*)G \subseteqq V(t^*)(\bigcup_{i=1} U(g_i)) \subseteqq N \supsetneqq G.$$

Hieraus schließt man ohne weiteres, daß $V(t^*) \subseteqq G^*$ ist, und daß $V(t^*)$ nach iv) aus lauter nilpotenten Elementen besteht. Somit ist bewiesen, daß N^* eine offene Teilmenge von K ist.

Ist g^* ein beliebiges Element aus G^* und t ein nilpotentes Element, so kann man ebenso wie beim Beweis von Hilfssatz 5, v) beweisen, daß g^*t und tg^* nilpotent sind.

Zusatz. Es gelten:

$$G^*N \subseteqq N \quad \text{und} \quad NG^* \subseteqq N.$$

Hilfssatz 6. *Es sei M eine nicht-leere Menge aus K mit folgenden Eigenschaften:*

i) *M ist eine multiplikative Halbgruppe.*

ii) *M ist invariant in K.*

iii) *M ist kompakt.*

Dann ist M in G^* enthalten.

Beweis. Um die Relation $M \subseteqq G^*$ zu beweisen, genügt zu zeigen, daß für ein beliebiges Element m aus M und für ein beliebiges Element g ($\neq 0$) aus G stets $mg \in G$ gilt. Nun gilt für eine beliebige natürliche Zahl n:

$$(mg)^n = m(gmg^{-1})(g^2mg^{-2}) \cdots\cdots (g^{n-1}mg^{-n+1})g^n;$$

da die g^img^{-i} ($i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$) nach ii) alle zu M gehören, und da M nach i) eine multiplikative Halbgruppe ist, so gehört das Element

$$m_n = \prod_{i=1}^{n-1} g^i m g^{-i}$$

zu M. Nun besitzt die Folge $\{g^n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ einen Häufungspunkt g_0, weil $g \in G$ ist. Da die Folge $\{m_n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ zu einer kompakten Menge M gehört, so kann man einen Häufungspunkt m_0 von $\{m_n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ so bestimmen, daß m_0g_0 ein Häufungspunkt der Folge $\{(mg)^n = m_ng^n;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ wird; d.h. das Element mg ist nicht divergent, also ist

$$mg \in G, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Wie in Hilfssatz 5 bewiesen worden ist, besitzt G^* die Eigenschaften i), ii), iii) aus Hilfssatz 6. Daher ist G^* die *größte Teilmenge aus K mit den Eigenschaften* i), ii), iii) aus Hilfssatz 6.

§ 4. Lokalkompakte, zusammenhängende Hausdorffsche topologische Körper. In diesem Paragraphen betrachten wir durchweg einen *zusammenhängenden l.H.t. Körper K.* G^* und N^* bedeuten die Mengen wie die in § 3 definierten. Zunächst beweisen wir folgenden

Hilfssatz 7.

i) *G^* ist zusammenhängend.*

ii) *Das Komplement F^* von N^* in G^* ist nicht leer.*

iii) *Die abgeschlossene Hülle $\bar{N}^*$ von N^* stimmt mit G^* überein.*

Beweis. i) Da K zusammenhängend ist, so ist K nach Satz 4 lokalzusammenhängend. Nun sei C_0^* die Komponente von 0 in G^*. Setzt man dann voraus, daß C_0^* in N^* enthalten ist, so ist C_0^* eine offene Teilmenge von K; denn da N^* offen und K lokalzusammenhängend ist, so besitzt jedes Element aus C_0^* eine in N^* enthaltene, offene zusammenhängende Umgebung. Weil aber C_0^* als eine Komponente einer abgeschlossenen Menge G^* auch abgeschlossen ist, so ist C_0^* in K gleichzeitig offen und abgeschlossen; dies ist aber ein Widerspruch, weil K zusammenhängend ist. Daher muß C_0^* mindestens ein neutrales Element e^* enthalten. Da aber nach Hilfssatz 5, iv) $e^{*-1} \in G^*$ ist, so ist

$$1 \in e^{*-1}C_0^*,$$

und $e^{*-1}C_0^*$ ist eine 0 enthaltende, zusammenhängende Teilmenge von G^*, also ist nach Definition

$$1 \in e^{*-1}C_0^* \subseteqq C_0^*.$$

Ist nun $g^* \neq 0$ ein beliebiges Element aus G^*, so ist

$$g^* \in g^*C_0^*;$$

da $g^*C_0^*$ zusammenhängend ist und 0 enthält, so ist

$$g^* \in g^*C_0^* \subseteqq C_0^*.$$

Hieraus folgt:

$$G^* = C_0^*, \qquad \text{w.z.b.w.}$$

ii) Da K zusammenhängend ist, so ist die offene Menge N^* sicher von der abgeschlossenen Menge G^* verschieden. Also ist F^* nicht leer.

iii) Da G^* abgeschlossen ist, so ist $\bar{N}^* \subseteqq G^*$, und $\bar{N}^*$ enthält mindestens ein neutrales Element e^* aus G^*, weil $\bar{N}^* \supsetneqq N^*$ ist. Nach Hilfssatz 5, v) und i) ist $e^{*-1}N^*$ eine Teilmenge von N^*; hieraus folgt sofort

$$\bar{N}^* \supseteqq \overline{e^{*-1}N^*} = e^{*-1}\bar{N}^* \ni 1.$$

Ist nun g^* ein beliebiges Element aus G^*, so ist

$$g^* \in g^*\bar{N}^* = \overline{g^*N^*} \subseteqq \bar{N}^*;$$

d.h. es ist $G^* \subseteqq \bar{N}^*$, w.z.b.w.

Satz 8. *G^* stimmt mit G überein.*

Beweis. Wir bezeichnen wieder mit N die Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus K. Dann ist offenbar $N \cap G^*$ nicht leer. Wir wollen zunächst zeigen, daß $G^*N \subseteqq G^*$ ist. Ist nämlich $G^*N \not\subseteqq G^*$, so existiert ein Element t aus N von der Art, daß die Differenzmenge

$G^*t - G^*$ nicht leer ist. Bezeichnet man nun mit F^* das Komplement von N^* in G^* und nimmt $F^* \cap G^*t$ als die leere Menge an, so ist

$$G^*t \neq G^* \cap G^*t = (F^* \cup N^*) \cap G^*t = N^* \cap G^*t \;(\ni 0);$$

dies ist aber ein Widerspruch, weil sonst die zusammenhängende Menge G^*t eine gleichzeitig offene und abgeschlossene, nicht-leere Menge enthalten müßte. Also ist $F \cap G^*t$ eine nicht-leere Menge. Ein Element aus $F^* \cap G^*t$ ist aber einerseits nach Definition ein neutrales Element und anderseits nach Zusatz zu Hilfssatz 5, ein nilpotentes Element; dies ist aber ein Widerspruch. Es muß daher $G^*N \subseteqq G^*$ sein; d.h. G^* enthält die Menge N und folglich ist $N^* = N$.

Da nach Hilfssatz 5, v)

$$NG = N^*G \subseteqq N$$

gilt, so folgt ohne weiteres;

$$\overline{NG} = \overline{N^*G} \subseteqq \bar{N} = \bar{N}^* = G^*;$$

weil $\bar{N}^*G \subseteqq \overline{N^*G}$ und $\bar{N}^* = G^*$ sind, so gilt

$$G^*G \subseteqq G^*,$$

woraus $G \subseteqq G^*$ folgt, w.z.b.w.

§5. Lokalkompakte, diskontinuierliche Hausdorffsche topologische Körper. In diesem Paragraphen bezeichnet K durchweg einen *diskontinuierlichen l.H.t. Körper.* G^* und N^* bezeichnen die Mengen wie in §3.

Hilfssatz 8. *N^* ist abgeschlossen, also ist nach Hilfssatz* 5, vi) *gleichzeitig offen und abgeschlossen.*

Beweis. Da G^* abgeschlossen ist, so gehört ein beliebiger Häufungspunkt p von N^* zu G^*. Nimmt man nun p als nicht nilpotent an, so ist p ein neutrales Element, und es ist $p^{-1} \in G^*$ (nach Hilfssatz 5, iv)). Da K diskontinuierlich ist, so enthält K eine gleichzeitig offene und abgeschlossene, multiplikative Gruppe V[1]. Weil pV eine Umgebung von p ist, so enthält pV ein Element t^* aus N^*. Das Element $p^{-1}t^*$ aus V ist also nach Hilfssatz 5, v) nilpotent. Da V eine abgeschlossene multiplikative Gruppe ist, so gehört das Grenz-

1) Vgl. etwa M, Satz 2.

element 0 von $\{(p^{-1}t^*)^n ;\ n = 1, 2, \cdots\cdots\}$ zu V; dies ist aber ein Widerspruch. Es muß also $\bar{N}^* = N^*$ sein.

Aus Hilfssatz 8 folgt ohne weiteres, daß N^* als eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge G^* auch kompakt ist.

Zusatz. *N^* ist kompakt.*

Hilfssatz 9. *Es gilt*

$$\cdots\cdots \subsetneqq N^{*i} \subsetneqq N^{*i-1} \subsetneqq \cdots\cdots \subsetneqq N^*,$$

und es ist

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} N^{*i} = \{0\}$$

Beweis. Da nach Hilfssatz 5, v) und i) $N^*G^* \subseteqq N^*$ ist, so gilt für jede natürliche Zahl ν:

$$N^{*\nu+1} \subseteqq N^{*\nu}.$$

Wir bezeichnen mit S^* die Menge aller von Null verschiedenen Elemente aus $N^{*\nu}$. Dann gilt:

$$N^{*\nu+1} = \bigcup_{a_i \in S^*} a_i N^* .$$

Da $N^{*\nu+1}$ als Produkt aus $\nu+1$ kompakten Mengen auch kompakt ist, und da $\{a_iN^* ;\ n_i \in S^*\}$ eine offene Überdeckung von $N^{*\nu+1}$ ist, so kann man endlich viele Überdeckungen a_iN^* $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ so auswählen, daß

$$\bigcup_{i=1}^{s} a_iN^* = N^{*\nu+1}$$

ist. Weil N^* offen ist, so ist $N^{*\nu}$ auch offen; es existiert also eine Umgebung U von 0 mit $U \subsetneqq N^{*\nu}$ und eine Umgebung V von 0 derart, daß

$$VN^* \subseteqq U \subsetneqq N^{*\nu}$$

ist, weil N^* als kompakte Menge beschränkt ist. Ferner existiert eine solche natürliche Zahl m, daß die a_i^m $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$ alle zu V gehören. Bildet man dann die Menge $(N^{*\nu+1})^{ms}$, so ist jedes Element a aus $(N^{*\nu+1})^{ms}$ von der Form

$$a = \prod_{\rho=1}^{ms} a'_\rho t_\rho ,$$

wo die a'_ρ ($\rho = 1, 2, \cdots\cdots, ms$) Elemente aus der Menge $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_s\}$ und die t_ρ ($\rho = 1, 2, \cdots\cdots, ms$) Elemente aus N^* sind. Berücksichtigt man nun die Relation

$$xN^*x^{-1} = N^* \qquad (K \ni x \neq 0),$$

so ist

$$a \in (\prod_{\rho=1}^{ms} a'_\rho) N^{*\,ms}.$$

Da mindestens ein Element aus $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_s\}$, etwa a_1, im Produkt $\prod_{\rho=1}^{ms} a'_\rho$ mehr als $(m-1)$-mals auftreten muß, so ist

$$\prod_{\rho=1}^{ms} a'_\rho \in a_1^m N^*;$$

also ist

$$a \in a_1^m N^{*\,ms+1} \subseteqq a_1^m N^* \subseteqq VN^* \subseteqq U.$$

Da a alle Elemente aus $N^{*\,\nu+1}$ durchlaufen kann, so ist

$$(N^{*\,\nu+1})^{ms} \subseteqq U \subsetneqq N^{*\,\nu}$$

Setzt man also als $N^{*\,\nu+1} = N^{*\,\nu}$ ($\nu \geqq 1$) voraus, so folgt entgegen dem oben Bewiesenen:

$$\cdots\cdots = (N^{*\,\nu+1})^{ms} = \cdots\cdots = N^{*\,\nu+1} = N^{*\,\nu} \supsetneqq U.$$

Also muß

$$\cdots\cdots \subsetneqq N^{*\,i} \subsetneqq N^{*\,i-1} \subsetneqq \cdots\cdots \subsetneqq N^*$$

sein.

Da beim obigen Beweis die Umgebung U beliebig sein kann, so folgt aus der Ungleichung $(N^{*\,\nu+1})^{ms} \subsetneqq U$, daß

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} N^{*\,i} = \{0\}$$

ist.

Hilfssatz 10. *Die Gesamtheit G_0^* aller Elemente x aus K mit der Eigenschaft $xN^* \subseteqq N^*$ ist eine Teilmenge von G^*.*

Beweis. i) Nach Definition bildet G_0^* sicher eine multiplikative Halbgruppe. ii) Da für jedes $z \neq 0$ aus K stets $zN^*z^{-1} = N^*$ ist, so folgt ohne weiteres: $zG_0^*z^{-1} = G_0^*$. iii) Nach Definition gilt für ein analytisch nilpotentes Element t^* aus N^* (ein solches t^* existiert sicher, weil N^* in K offen ist):

$$G_0^* t^* \subseteqq N^*;$$

da N^* kompakt ist, so ist G_0^* auch kompakt. Da die Eigenschaften i), ii), iii) aus Hilfssatz 6 erfüllt sind, so ist

$$G_0^* \subseteqq G^*.$$

Nun sei y ein Element aus K, welches nicht zu G^* gehört. Dann ist nach Hilfssatz 10

$$yN^* \not\subseteqq N^*.$$

Da $y \cdot 0 = 0 \in N^*$ und N^* in K offen ist, so existiert eine Umgebung U von 0 mit $yU \subseteqq N^*$. Nach Hilfssatz 9 existiert ein in U enthaltenes $N^{*\nu}$, weil die N^{*i} $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ kompakt sind und $\bigcap_{i=1}^{\infty} N^{*i} = \{0\}$ ist. Es gibt also eine natürliche Zahl i, für die

$$yN^{*i} \not\subseteqq N^* \quad \text{und} \quad yN^{*i+1} \subseteqq N^*$$

gelten. Wegen $yN^{*i} \not\subseteqq N^*$ existiert ein π_i aus N^{*i} mit $y\pi_i \notin N^*$; da

$$y\pi_i N^* \subseteqq yN^{*i+1} \subseteqq N^*$$

ist, so muß $y\pi_i$ ein Element aus G^* sein. Wegen $y\pi_i \notin N^*$ ist also $y\pi_i$ ein neutrales Element e^* aus G^*. Hieraus folgt ohne weiteres, daß $y^{-1} = \pi_i e^{*-1}$ ein analytisch nilpotentes Element ist; d.h. y ist nach Hilfssatz 3 ein divergentes Element.

Nach dem eben Bewiesenen ist gezeigt, daß das Komplement von G^* in K aus lauter divergenten Elementen besteht; es ist also

$$G^* = G.$$

Da nach Hilfssatz 9 $N^{*2} \subsetneqq N^*$ ist, so existiert ein Element π aus N^* mit $\pi \notin N^{*2}$. Bildet man dann für ein beliebiges Element t^* aus N^* den Quotienten $t^*\pi^{-1} = \eta$, so ist η ein Element aus G^*. Denn sonst wäre η nach dem eben Gezeigten divergent, und folglich würde η^{-1} nach Hilfssatz 3 nilpotent sein; daraus folgte entgegen der Voraussetzung

$$\pi = \eta^{-1} t^* \in N^{*2};$$

es muß also $N^* \subseteqq G^*\pi$ sein. Wegen $G^*\pi \subseteqq N^*$ gilt daher

$$G^*\pi = N^*.$$

Ebenso ist

$$\pi G^* = N^*.$$

Satz 9. *In einem lokalkompakten, diskontinuierlichen Hausdorffschen Körper K gilt stets:*

$$G = G^*.$$

Ferner gibt es ein analytisch nilpotentes Element π von der Art, daß die Menge $\pi G = G\pi$ mit der Gesamtheit aller nilpotenten Elemente aus K übereinstimmt.

§6. Bewertungen und Topologien der lokalkompakten, Hausdorffschen topologischen Körper. Es sei K ein l.H.t. Körper. Dann ist in §§4 und 5 bewiesen worden, daß die Gesamtheit G aller neutralen und nilpotenten Elemente aus K eine multiplikative Halbgruppe bildet. Ferner besitzt die Gesamtheit N aller nilpotenten Elemente aus K beide folgenden Eigenschaften:

1) *N ist eine offene, beschränkte Teilmenge von K.*[1]

2) *Für ein beliebiges nilpotentes Element t aus K ist stets*

$$Gt \subseteqq N.$$

Daher kann man nach I. Kaplansky[2] eine nicht-negative reellwertige multiplikative Bewertung[3] φ von K einführen, welche in K eine mit der ursprünglichen Topologie von K äquivalente Topologie induziert. Im folgenden nennen wir φ eine *zur Topologie von K gehörige Bewertung.* Wie man leicht bestätigen kann, ist ein Element u aus K dann und nur dann divergent, wenn $\varphi(u) > 1$ ist. Daher besteht G aus allen und nur allen Elementen x aus K mit $\varphi(x) \leqq 1$. Ferner verifiziert man leicht, daß ein Element e aus K dann und nur dann neutral ist, wenn $\varphi(e) = 1$ ist. Da nach Satz 5 K stets vollständig ist, so ist K ein perfekter Körper in bezug auf φ. Bekanntlich ist φ entweder *archimedisch* oder *nicht-archimedisch.* Wenn φ nicht-archimedisch ist, so bestimmt für eine positive Zahl ε die Menge $U(\varepsilon)$ aller Elemente x aus K mit $\varphi(x) \leqq \varepsilon$ eine gleichzeitig

1) Da N eine Teilmenge der kompakten Menge G ist, so ist N offenbar beschränkt.

2) I. Kaplansky, Topological methods in valuation theory, Duke Math. Journ. Vol. **14** (1947), S. 527-541.

3) Eine Bewertung φ von K heißt multiplikativ, wenn stets $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ $(x, y \in K)$ gilt.

offene und abgeschlossene Umgebung von 0, also kann K nie zusammenhängend sein. Ist aber φ archimedisch, so enthält K bekanntlich einen zum Körper R aller reellen Zahlen, topologisch isomorphen Körper. Da in R das abgeschlossene Intervall [1,0] zusammenhängend ist, so muß K zusammenhängend sein. Nun gilt:

Satz 10. *Ein lokalkompakter, zusammenhängender Hausdorffscher topologischer Körper K ist isomorph*[1] *zu einem der drei folgenden Körper:*

i) *zum Körper aller reellen Zahlen,*
ii) *zum Körper aller komplexen Zahlen,*
iii) *zum Schiefkörper aller Quaternionen.*

Beweis. Die zur Topologie von K gehörige Bewertung φ ist nach dem oben Gezeigten archimedisch, weil K zusammenhängend ist. Da K in bezug auf φ perfekt ist, so enthält K einen zu R (Körper aller reellen Zahlen) topologisch isomorphen Körper. Der Einfachheit halber wollen wir wie üblich annehmen, daß R selber ein Unterkörper von K ist. Dann ist R als die perfekte Hülle des rationalen Zahlkörpers in bezug auf φ im Zentrum von K enthalten. Ferner ist jedes Element aus K stets über R algebraisch. Ist nämlich ein Element w aus K über R transzendent, so adjungieren wir zum Körper $R(w)$ eine Nullstelle θ des Polynomes X^2+1. Bekanntlich ist $R(\theta)$ isomorph zum Körper aller komplexen Zahlen. Dabei ist w über $R(\theta)$ transzendent, weil sonst w über R algebraisch sein müßte. Daher ist die perfekte Hülle des Körpers $R(\theta, w)$ in bezug auf φ ein echter Oberkörper von $R(\theta)$, was aber nach A. Ostrowski unmöglich ist[2]. Da jedes Element aus K über R algebraisch ist, so ist K nach dem Satz von Frobenius isomorph zu einem der im Satz genannten Körper.

Im folgenden bedeutet K durchweg einen *diskontinuierlichen l.H.t.* Körper. Dann ist eine zur Topologie von K gehörige Bewertung φ nicht-archimedisch. Für beliebige Elemente x, y aus G gilt:

$$\varphi(x+y) \leq \mathrm{Max}(\varphi(x), \varphi(y)) \leq 1;$$

d.h. $x+y$ gehört auch zu G. Weil G eine multiplikative Halbgruppe

1) Das Wort „isomorph" bedeutet im folgenden stets „algebraisch und topologisch isomorph".

2) A. Ostrowski, Über einige Lösung der Funktionalgleichung $\varphi(x)\cdot\varphi(y)=\varphi(xy)$, Acta Math., Bd. **41** (1918), S. 271–284. Man vergl. auch A. A. Albert, Modern Higher Algebra, Chicago (1936).

ist, so bildet G einen Unterring von K. Da nach Satz 9

$$N = \pi G = G\pi. \qquad (\pi \in G)$$

ist, so ist N ein zweiseitiges Hauptideal aus G; ferner stimmt N mit der Gesamtheit aller Elemente x aus K mit $\varphi(x) < 1$ überein. Der Restklassenring G/N ist daher der Restklassenkörper von K in bezug auf die Bewertung φ. Nun ist das Mengensystem $\{N + g_\kappa;\ g_\kappa \in G\}$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge G; es existieren also endlich viele $N + g_i$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, s)$, deren Vereinigung schon G überdeckt. Hieraus schließt man, daß G/N ein endlicher Körper und folglich nach dem Satz von Wedderburn kommutativ ist. Offenbar ist die Charakteristik von G/N eine Primzahl p, und die Anzahl der Elemente von G/N ist eine Potenz q von p. Also genügt jedes neutrale Element x aus K der Kongruenz

$$x^{q-1} - 1 \equiv 0 \qquad \text{mod } N.$$

Wir bezeichnen nun mit K_0 das Zentrum von K (K_0 kann eventuell mit K übereinstimmen). Dann beweist man ohne Schwierigkeit, daß K_0 in bezug auf die durch φ induzierte Bewertung von K_0 perfekt ist. Da die Gesamtheit aller von der Nullklasse verschiedenen Klassen aus G/N eine zyklische Gruppe bildet, so existiert ein neutrales Element e, dessen $(q-1)$-te Potenz nach N erst zu 1 kongruent ist. Adjungiert man nun zum Körper K_0 das Element e, so beweist man nach dem Henselschen Lemma, daß die Gleichung $x^{q-1} - 1 = 0$ in der perfekten Hülle von $K_0(e)$ eine Wurzel e_0 mit $e_0 \equiv e$ mod N besitzt; d.h. e_0 ist eine primitive $(q-1)$-te Einheitswurzel aus K. Bezeichnet man dann die Menge $\{0, e_0, e_0^2, \cdots\cdots, e_0^{q-1}\}$ mit S, so läßt sich jedes Element aus K eindeutig in der Form

$$\sum_{-\infty < n}^{\infty} \varepsilon_n \pi^n$$

darstellen, wo die ε_n alle aus der Menge S herausgegriffen sind. Wenn dabei $K_0(e_0) \subseteqq K_0$ ist, so ist K sicher kommutativ (also ist $K_0 = K$), weil $K = K_0(e_0, \pi)$ ist. Wir unterscheiden dann zwei Unterfälle:

a) Charakteristikgleicher Fall. Bezeichnet man in diesem Fall den Primkörper von K mit P, so muß π über $P(e_0)$ transzendent sein ($P(e_0)$ ist ein endlicher Körper mit q Elementen), weil sonst $\varphi(\pi) = 1$ sein würde. Also ist K der *Potenzreihenkörper* von π über $P(e_0)$.

b) Charakteristikungleicher Fall. In diesem Fall muß die Charakteristik von K gleich Null sein, und der Primkörper P von K kann als der rationale Zahlkörper angenommen werden. Wir bezeichnen dann mit $\overline{P(e_0)}$ die perfekte Hülle von $P(e_0)$ in bezug auf die durch φ induzierte Bewertung von $P(e_0)$. Dann ist für ein geeignetes neutrales Element ε aus K

$$p = \varepsilon\pi^n \qquad (n \geqq 1).$$

Hieraus schließt man ohne Schwierigkeit, daß π ein algebraisches Element vom Grade n über $\overline{P(e_0)}$ ist. Also ist $\overline{P(e_0)}(\pi) = K$ und infolgedessen ist K ein $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper[1].

Jetzt wenden wir uns dem Schiefkörper K zu. Dann ist $K_0(e_0)$ offenbar über K_0 zyklisch von einem Grad m. Ferner kann man ein Element π_0 aus K mit $\varphi(\pi_0) = \varphi(\pi)$ so bestimmen, daß die Transformation von $K_0(e_0)$ durch π_0 einen erzeugenden Automorphismus von $K_0(e_0)/K_0$ ergibt. Ferner ist π_0^m unter den Potenzen π_0^i $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$ die früheste, welche zu K_0 gehört. Also ist K wie bekannt eine *zentrale zyklische Algebra* vom Grade m über K_0[2]. Somit ist bewiesen:

Satz 11. *Ist K ein lokalkompakter, diskontinuierlicher Hausdorffscher topologischer Körper, so ist K zu einem der drei folgenden Körpertypen isomorph:*

i) *zu einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper.*

ii) *zu einem Potenzreihenkörper einer Unbestimmten mit endlichem Körper als Koeffizientenkörper.*

iii) *zu einer zyklischen Algebra über einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper als Zentrum.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received December 3, 1954*)

1) Genauer gesagt ist K zu einem $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörper topologisch isomorph.

2) H. Hasse, Über $\mathfrak{P}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme, Math. Ann., Bd. **104** (1931), S. 495–534.