CONTRIBUTION À LA TOPOLOGIE III

TAKESHI INAGAKI

En suivant le raisonnement dû à MM. Kuratowski et Montgomery[1], autrefois j'ai donné une Théorie des fonctions mesurables (B) dans un espace à structure uniforme satisfaisant au premier axiome de dénombrabilité[2].

L'objet de cet article est de rechercher la même Théorie dans un espace qui ne satisfait pas nécessairement au premier axiome de dénombrabilité.

Nous considérons un espace $\mathfrak{X}$ à structure uniforme dont le caractère $\mathfrak{A}$[3] est de puissance $\aleph_\xi$ et dirons dans cet espace que la somme de puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles fermés est un F_ξ et que le produit de puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles ouverts est un G_δ[4]. Lorsque l'espace considéré satisfait à une condition convenable, soit la condition (D) ou (B_1)[5], un ensemble fermé est un G_δ, et, par conséquent, un ensemble ouvert est un F_ξ. Comme on le voit, selon le fait on a une belle classification de la famille des ensembles boreliens et il en résulte qu'on peut adroitement établir la Théorie des fonctions mesurables (B).

Dans le premier paragraphe, nous discutons quelques propriétés

1) Voir, par example, Kuratowski, Topologie I, Warszawa (1952); Montgomery, Non-separable metric space, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 527 - 533; Kuratowski, Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 534 - 545.

2) Voir notre article: Sur les espaces à structure uniforme. Jour. of the Fac. of Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 1, Vol. X (1943), pp. 238 - 254.

3) Inagaki, Contribution à la topologie II. Ce Journal, Vol. 2 (1953), p. 152.

4) Ibid., p. 157.

5) On dit qu'un espace quantitatif jouit de la condition (D) ou (B_1), lorsqu'il y a une relation parmi les voisinages $V_\lambda(x)$ comme suite:

Etant donné un voisinage $V_\lambda(x)$, il existe deux suffixes μ et ν déterminés par x et par λ tels que, en symbole logique,

(D): $\quad x \in V_\mu(x') \;\rightarrow\; V_\mu(x') \subset V_\lambda(x)$, quel que soit x',

(B_1): $\quad V_\nu(x) \cdot V_\mu(x') \neq \emptyset \;\rightarrow\; x' \in V_\lambda(x)$, quel que soit x'.

Comme on le peut aisément vérifier, on a les propositions suivantes:

1°. Pour qu'un espace quantitatif satisfasse à la condition (D), il faut et il suffit que $\bar{E} = \prod_{\lambda \in \mathfrak{A}} S_\lambda(E)$ pour un ensemble quelconque E, où l'ensemble $S_\lambda(E)$, dit un voisinage stelliforme de E, est la somme de tous les voisinages $V_\lambda(x)$ tels que $V_\lambda(x) \cdot E \neq \emptyset$.

2°. Pour qu'un espace quantitatif satisfasse à la condition (B_1), il faut et il suffit que $\bar{E} = \prod_{\lambda \in \mathfrak{A}} \overline{O_\lambda(E)}$ pour un ensemble quelconque E, où l'ensemble $O_\lambda(E)$, dit un voisinage de E, est la somme de tous les voisinages $V_\lambda(x)$, x parcourant E.

des ensembles boreliens et dans le deuxième, des fonctions mesurables (B).

§7. Ensembles boreliens

1. Définition et quelques propriétés des ensembles boreliens. Dans un espace à structure uniforme $\mathfrak{X}$ possèdant le caractère $\mathfrak{A}$ dont la puissance est $\aleph_\xi$, nous définissons la famille $\mathfrak{F}$ des ensembles boreliens comme la plus petite famille assujettie aux conditions suivantes:

1. *chaque ensemble fermé appartient à* $\mathfrak{F}$,
2. *si un ensemble* E *appartient à* $\mathfrak{F}$, *alors le complémentaire de* E *appartient aussi à* $\mathfrak{F}$,
3. *si* $\{E_\tau\}$ *est une famille de la puissance* $\aleph_\xi$ *d'ensembles appartenant à* $\mathfrak{F}$, *alors le produit* $\prod_\tau E_\tau$ *lui appartient également*,

où la condition 3 pouvait être remplacée par la suivante:

3′. *si* $\{E_\tau\}$ *est une famille de la puissance* $\aleph_\xi$ *d'ensembles appartenant à* $\mathfrak{F}$, *alors la somme* $\sum_\tau E_\tau$ *lui appartient également.*

Dans un espace à structure uniforme satisfaisant à la condition (D) ou (B_1), chaque ensemble fermé est un G_d et, par conséquent, chaque ensemble ouvert est un F_s. En s'appuyant sur ces faits, on peut aisément prouver que la famille des ensembles boreliens est la plus petite famille satisfaisant aux conditions 1, 2 et 3′. On en conclut par simple raisonnement de la Théorie des ensembles que la famille des ensembles boreliens est la somme d'une suite transfinie du type $\omega_{\xi+1}$ des familles:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{F}_\alpha + \cdots\cdots \mid \alpha < \omega_{\xi+1}$$

telles que 1° $\mathfrak{F}_0$ est la famille des ensembles fermés, 2° les ensembles de la famille $\mathfrak{F}_\alpha$ sont des produits ou des sommes de suites de la puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}_\beta$ avec $\beta < \alpha$, suivant que α est pair ou impair (les nombres limites étant considérés comme pairs).

De même, on peut dire que la famille $\mathfrak{F}$ est classifiée comme suivante:

---

1) Voir la Note 5) au bas de la page 79.

2) Quant à la méthode de la démonstration, voir, par example, Kuratowski: Topologie I, Warszawa (1952), pp. 250 - 252.

3) Comme toujours, désignons par $\omega_{\xi+1}$ le nombre initial de la puissance $\aleph_{\xi+1}$; il est claire que $\omega_{\xi+1}$ est régulier.

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{G}_\alpha + \cdots\cdots \mid \alpha < \omega_{\xi+1},$$

où 1° $\mathfrak{G}_0$ est la famille des ensembles ouverts, 2° les ensembles de la famille $\mathfrak{G}_\alpha$ sont des sommes ou des produits de suites de la puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles appartenant à $\mathfrak{G}_\beta$ avec $\beta < \alpha$, suivant que α est pair ou impair.

Les familles $\mathfrak{F}_\alpha$ avec indice pair, ainsi que les familles $\mathfrak{G}_\alpha$ avec indice impair, sont *multiplicatives*; autremant dit, le produit de la puissance $\aleph_\xi$ des ensembles appartenant à une telle famille appartient encore à la même famille. De plus, les ensembles appartenant à une famille de ce genre seront dits de classe α multiplicative. D'une façon analogue, les familles $\mathfrak{F}_\alpha$ avec indice impair, ainsi que les familles $\mathfrak{G}_\alpha$ avec indice pair, sont *additives* et constituent la classe α additive. Un ensemble est dit ambigu de classe α lorsqu'il appartient à la fois à $\mathfrak{F}_\alpha$ et à $\mathfrak{G}_\alpha$.

Comme d'habitude, selon ces préliminaires nous pouvons déduire plusieurs résultats que nous insérons ci-dessous sans démonstration:

1. Le complémentaire d'un ensemble de classe $\mathfrak{F}_\alpha$ (ou $\mathfrak{G}_\alpha$) est de classe $\mathfrak{G}_\alpha$ (ou $\mathfrak{F}_\alpha$).

2. La somme et le produit d'un nombre fini d'ensembles appartenant à une même classe appartient à cette classe.

3. Si $\beta < \alpha$, alors il vient $\mathfrak{F}_\beta \subset \mathfrak{G}_\alpha$ et $\mathfrak{G}_\beta \subset \mathfrak{F}_\alpha$.

4. Les ensembles ambigus de classe α constituent un corps; un ensemble borelien de classe α est un ensemble ambigu de classe $\alpha + 1$.

5. Soit $E_1 \supset E_2 \supset \cdots\cdots \supset E_\beta \supset \cdots\cdots \supset E_\gamma$, $(\gamma < \omega_{\xi+1})$, une suite (transfinie) d'ensembles ambigus de classe α tels que $E_\delta = \prod_{\beta<\delta} E_\beta$, si δ est un nombre limite ou bien $\delta = \gamma$. Alors, la somme

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots + E_{\beta+1} - E_{\beta+2} + \cdots\cdots$$

est aussi un ensemble de classe α.

6. Si $E_1 \supset E_2 \supset \cdots\cdots \supset E_\beta \supset \cdots\cdots$ est une suite (transfinie) du type $< \omega_{\xi+1}$ d'ensembles de classe α multiplicative, alors la somme

$$E = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \cdots\cdots + F_{\beta+1} - E_{\beta+2} + \cdots\cdots$$

est ambigu de classe α.

7. Soient $E \subset \mathfrak{X}$ et $M \subset E$. Pour que l'ensemble M soit de classe α multiplicative (ou additive) relativement à E, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble M^* de classe α multiplicative (ou additive) dans l'espace $\mathfrak{X}$ tel que $M = M^* \cdot E$.

8. Soient $E \subset \mathfrak{X}$ et $M \subset E$. Si E est de classe $\mathfrak{F}_\alpha$ (ou $\mathfrak{G}_\alpha$) et si M est de classe $\mathfrak{F}_\alpha$ (ou $\mathfrak{G}_\alpha$) relativement à E, alors M lui-même appartient à la même classe.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces à structure uniforme tels que leurs caractères possèdent la même puissance $\aleph_\xi$. On a alors les propositions suivantes:

9. Soit $y = f(x)$ une fonction continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Si un ensemble $Y \subset \mathfrak{Y}$ est de classe α multiplicative (ou additive), alors l'image $f^{-1}(Y)$ l'est aussi dans $\mathfrak{X}$.

10. Soient $X \subset \mathfrak{X}$ et $Y \subset \mathfrak{Y}$. Si X et Y sont de classe $\mathfrak{F}_\alpha$ (ou $\mathfrak{G}_\alpha$), le produit cartésien $X \times Y$ l'est aussi dans l'espace $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

2. Application de l'opération $\mathfrak{M}$[1]. Nous supposons dans la suite, que les espaces considérés satisfassent à la condition (D) et l'axiome (T_1) de séparation.

Ceci étant posé, considérons deux ensembles M et N dans l'espace $\mathfrak{X}$. Pour un suffixe quelconque $\lambda (\in \mathfrak{A})$, les deux relations $S_\lambda(M) \cdot N = \phi$ et $S_\lambda(N) \cdot M = \phi$[2] sont évidemment équivalentes; donc nous désignons par $\rho(M, N) > \frac{1}{\lambda}$ ou par $\rho(M, N) \leq \frac{1}{\lambda}$ ce fait que $S_\lambda(M) \cdot N = \phi$ ou $S_\lambda(M) \cdot N \neq \phi$.

Puis, considérons une suite (transfinie) des ensembles ouverts croissants

$$(1) \qquad G^0 \subset G^1 \subset \cdots\cdots \subset G^\gamma \subset \cdots\cdots$$

et soit $\{E^\gamma\}$ ($\gamma \geqq 1$) une suite d'ensembles E^γ tels que, pour chaque γ,

$$(2) \qquad E^\gamma \subset G^\gamma - \sum_{\beta < \gamma} G^\beta .$$

Dans ce cas, si l'on pose

$$(3) \qquad E_\lambda^\gamma = E^\gamma \cdot \underset{x}{\mathbf{E}}\left[\rho(x, \mathfrak{X} - G^\gamma) > \frac{1}{\lambda}\right]^{3)},$$

alors l'ensemble $\underset{x}{\mathbf{E}}\left[\rho(x, \mathfrak{X} - G^\gamma) > \frac{1}{\lambda}\right]$ est fermé comme complémen-

---

1) Voir, par example, Kuratowski, Topologie I, Warszawa (1952), pp. 264 - 275; Montgomery, Non-separable metric space, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 527 - 533; Kuratowski, Quelques problèmes concernant les espaces métriques non-séparables, Fund. Math., t. 25 (1935), pp. 534 - 545.

2) Quant à la définition de $S_\lambda(M)$, voir la Note 5) au bas de la page 79.

3) $\underset{x}{\mathbf{E}}[\ ]$ désigne l'ensemble des points x qui satisfont à la condition écrite dans la parenthèse [ ].

taire de l'ensemble ouvert $S_\lambda(\mathfrak{X}-G^\gamma)$. D'autre part, on a $\mathfrak{X}-G^\gamma = \prod_{\lambda \in \mathfrak{A}} S_\lambda(\mathfrak{X}-G^\gamma)$ selon la condition (D), il vient donc

$$(4) \qquad E^\gamma = \sum_{\lambda \in \mathfrak{A}} E_\lambda^\gamma .$$

Or, si $\beta \neq \gamma$, soit $\beta < \gamma$, on a évidemment $S_\lambda(E_\lambda^\gamma) \subset S_\lambda(E^\gamma) \subset \subset S_\lambda(\mathfrak{X} - \sum_{\beta<\gamma} G^\beta) \subset S_\lambda(\mathfrak{X}-G^\beta)$ et $E_\lambda^\beta = E^\beta - S_\lambda(\mathfrak{X}-G^\beta)$; par conséquent, on a $S_\lambda(E_\lambda^\gamma)\cdot E_\lambda^\beta = \phi$ et d'où $S_\lambda(E_\lambda^\beta)\cdot E_\lambda^\gamma = \phi$. Il en résulte que

$$(5) \qquad \rho(E_\lambda^\gamma, E_\lambda^\beta) > \frac{1}{\lambda} \quad \text{pour} \quad \gamma \neq \beta .$$

En outre, si l'on pose

$$(6) \qquad E_\lambda = \sum_\gamma E_\lambda^\gamma ,$$

selon la définition de E_λ^γ, il vient

$$(7) \qquad \sum_\gamma E^\gamma = \sum_\gamma \sum_\lambda E_\lambda^\gamma = \sum_\lambda \sum_\gamma E_\lambda^\gamma = \sum_\lambda E_\lambda .$$

Dans la suite, en s'appuyant la relation (7), nous allons rechercher la propriété de l'ensemble $\sum_\lambda E_\lambda$ pour étudier celle de l'ensemble $\sum_\gamma E^\gamma$.

Théorème 1. *Si chaque ensemble E^γ (cité dans la formule* (2)) *est fermé, alors la somme $\sum_\gamma E^\gamma$ est un F_σ.*

Démonstration. Nous démontrons tout d'abord que $E_\lambda = \cdot\sum_\gamma E_\lambda^\gamma$ est fermé. En effet, si x un point de $\overline{E}_\lambda$, il existe alors un système caractéristique $\{x_\tau\}$[1] formé de points de E_λ tel qu'il converge vers le point x. Le système $\{x_\tau\}$ est donc résiduel avec lui-même dans le voisinage $V_\lambda(x)$, et en outre il existe un nombre ordinal α tel que $V_\lambda(x)\cdot E_\lambda^\alpha \neq \phi$ selon la formule (6). Il en résulte selon la formule (5) que $V_\lambda(x)\cdot E_\lambda^\beta = \phi$, si $\beta \neq \alpha$; ce qui prouve que $x \overline{\in} \overline{(\sum_{\beta\neq\alpha} E_\lambda^\beta)}$. En tenant compte de ce fait que $x \in \overline{E}_\lambda$ et $E_\lambda = E_\lambda^\alpha + \sum_{\beta\neq\alpha} E_\lambda^\beta$, il vient $x \in \overline{E}_\lambda^\alpha = E_\lambda^\alpha$, puisque E_λ^α est fermé selon la formule (3) et l'hypothèse que E^α est fermé. Par conséquent, E_λ est fermé; d'où $\sum_\gamma E^\gamma$ est un F_σ selon la formule (7), c.q.f.d.

En vertu de ce fait que l'opération $\mathfrak{M}$ est multiplicative et additive[2], on a le

1) Cf. Contribution à la topologie II, p.153.
2) Voir, par example, Kuratowski, Topologie I, (1952), p.265.

Corollaire 1. *Si chaque ensemble E^γ est de classe α $(\alpha > 0)$ multiplicative (ou additive), l'ensemble $\sum_\gamma E^\gamma$ l'est aussi.*

Démonstration. Tout d'abord, nous démontrons ce corollaire dans le cas où chaque ensemble E^γ est un F_s: Selon l'hypothèse, E^γ est une somme de la puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles fermés E^γ_λ. Donc, il est évident que $\sum_\gamma E^\gamma = \sum_\gamma \sum_\lambda E^\gamma_\lambda = \sum_\lambda \sum_\gamma E^\gamma_\lambda$ et l'ensemble $\sum_\gamma E^\gamma_\lambda$ est un F_s selon le théorème 1. Par suite, l'ensemble $\sum_\gamma E^\gamma$ est un F_s.

Ensuite, considérons le cas où chaque E^γ est un G_d. Dans le cas, en posant $M^\gamma = G^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G^\beta - E^\gamma$, l'ensemble M^γ est un F_s, et du fait que nous avons déjà démontré ci-dessus, $\sum_\gamma M^\gamma$ et un F_s. Par conséquent, il vient $\sum_\gamma E^\gamma = \sum_\gamma G^\gamma - \sum_\gamma M^\gamma$, $\sum_\gamma E^\gamma$ est donc un G_d.

Ainsi nous avons prouvé le corollaire pour $\alpha = 1$. Ensuite, en supposant que le corollaire est vrai pour tout β inférieur à α, et nous le démontrons pour α lui-même.

Dans ce cas, il y a deux cas possibles: Premier cas où α est un nombre isolé. Soit E^γ un ensemble de classe α multiplicative (ou additive), et il y a alors d'ensembles de classe $\alpha-1$ additive (ou multiplicative) E^γ_τ tels que $E^\gamma_\tau \subset G^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G^\beta$ et $E^\gamma = \prod_\tau E^\gamma_\tau$ (ou $E^\gamma = \sum_\tau E^\gamma_\tau$), τ parcourant un ensemble de puissance $\aleph_\xi$. Or, l'opération $\mathfrak{M}$ étant multiplicative et additive, on a

$$\sum_\gamma E^\gamma = \sum_\gamma (\prod_\tau E^\gamma_\tau) = \prod_\tau (\sum_\gamma E^\gamma_\tau)$$
$$\left(\text{ou } \sum_\gamma E^\gamma = \sum_\gamma \sum_\tau E^\gamma_\tau = \sum_\tau (\sum_\gamma E^\gamma_\tau)\right).$$

D'autre part, il est évident par supposition posée que $\sum_\gamma E^\gamma_\tau$ est de classe $\alpha-1$ additive (ou multiplicative); par conséquent, $\sum_\gamma E^\gamma = \prod_\tau (\sum_\gamma E^\gamma_\tau)$ (ou $\sum_\gamma E^\gamma = \sum_\tau (\sum_\gamma E^\gamma_\tau)$) est de classe α multiplicative (ou additive).

Deuxième cas où α est un nombre limite. Supposons que chaque E^γ est de classe α multiplicative (ou additive). Il y a alors d'ensembles E^γ_τ de classe inférieure à α de façon que $E^\gamma_\tau \subset G^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G^\beta$ et $E^\gamma = \prod_\tau E^\gamma_\tau$ (ou $E^\gamma = \sum_\tau E^\gamma_\tau$), τ parcourant un ensemble de puissance $\aleph_\xi$. Or, soit $\{\alpha_\nu\}$ une suite croissante des nombres transfinis tels que $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots < \alpha_\nu < \cdots\cdots$ et $\lim_\nu \alpha_\nu = \alpha$; posons $E^\gamma_{(\tau,\nu)} = E^\gamma_\tau$ si $\alpha_\nu \leqq$ classe de $E^\gamma_\tau < \alpha_{\nu+1}$. Il vient alors $E^\gamma = \prod_{(\tau,\nu)} E^\gamma_{(\tau,\nu)}$ (ou E^γ

$= \sum_{(\tau,\nu)} E^{\gamma}_{(\tau,\nu)})$. En tenant compte du fait que l'opération $\mathfrak{M}$ est multiplicative et additive, il vient $\sum_{\gamma} E^{\gamma} = \Pi_{(\tau,\nu)}(\sum_{\gamma} E^{\gamma}_{(\tau,\nu)})$ (ou $\sum_{\gamma} E^{\gamma} = \sum_{(\tau,\nu)}(\sum_{\gamma} E^{\gamma}_{(\tau,\nu)})$). Il résulte selon l'hypothèse que $\sum_{\gamma} E^{\gamma}_{(\tau,\nu)}$ est au plus de classe $\alpha_{\nu+1}$ multiplicative ou additive. D'autre part, comme on le voit, l'ensemble de toutes les paires (τ, ν) est au plus de puissance $\aleph_{\xi}$; donc l'ensemble $\sum_{\gamma} E^{\gamma}$ est de classe α multiplicative (ou additive), c.q.f.d.

Corollaire 2. *Un ensemble développable est à la fois un F_s et un G_d.*

Démonstration. Soit E un ensemble développable. Il existe alors une suite d'ensembles fermés décroissants tels que

$$(*) \qquad E = E^1 - E^2 + E^3 - E^4 + \cdots\cdots + E^{\gamma} - E^{\gamma+1} + \cdots\cdots,$$

où nous pouvons supposer sans perdre la généralité, que les indices limites soient omis dans ce développement et que le dernier terme de la formule $(*)$, s'il y existe, soit négatif, car s'il est positif, on y ajoute un ensemble vide, qui est fermé possèdant le signe négatif.

Or, soit $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots, \gamma_{\alpha}, \cdots\cdots$ une suite des indices de termes positifs dans la formule $(*)$ cités suivant l'ordre croissant. Ceci étant posé, en posant $G^{\gamma_\alpha} = \mathfrak{X} - E^{\gamma_\alpha+1}$ et $M^{\gamma_\alpha} = E^{\gamma_\alpha} \cdot G^{\gamma_\alpha} - \sum_{\beta<\alpha} G^{\gamma_\beta}$, il vient clairement

$$G^{\gamma_1} \subset G^{\gamma_2} \subset \cdots\cdots \subset G^{\gamma_\alpha} \subset \cdots\cdots \quad \text{et} \quad M^{\gamma_\alpha} \subset G^{\gamma_\alpha} - \sum_{\beta<\alpha} G^{\gamma_\beta},$$

où M^{γ_α} est un F_s. Par suite, l'ensemble $\sum_{\alpha} M^{\gamma_\alpha}$ est un F_s selon le corollaire 1. Comme on le voit, on a $E = \sum_{\alpha} M^{\gamma_\alpha}$ et E est donc un F_s.

D'autre part, comme on le sait, le complémentaire d'un ensemble développable est encore développable, donc l'ensemble $\mathfrak{X} - E$ est un F_s; il en résulte que E est à la fois un F_s et un G_d, c.q.f.d.

En rapprochant le corollaire 2 et le lemme 4 donné dans mon autre article[1], on a le

Corollaire 3. *Dans un espace satisfaisant à la condition (D) et l'axiome (T_1), exceptionel, régulier et localement-parfaitement compact en soi au sens bien ordonné, les ensembles développables coïncident avec les ensembles qui sont simultanement F_s et G_d.*

Un ensemble est dit de 1-re catégorie, lorsqu'il est une somme de la puissance $\aleph_{\xi}$ d'ensembles non-denses et un ensemble qui n'est

1) Cf. Contribution à la topologie II, Ce Journal., Vol. 2 (1953), p. 160.

pas de 1-re catégorie est dit de second catégorie. Comme d'habitude, on dit qu'un ensemble jouit de la propriété de Baire, lorsqu'il est de la forme $G-P+R$, où G est ouvert et P et R sont de 1-re catégorie. Conformément à cette définition, on peut facilement démontrer qu'un ensemble E possède la propriété de Baire dans le cas et le seul cas où E est écrit sous l'une des deux formes suivantes: $E=G_\delta+P$ et $E=F_\sigma-P$, où G_δ et F_σ désignent respectivement un ensemble G_δ et un ensemble F_σ et P désigne un ensemble de 1-re catégorie.

Ceci étant établi, on a le

Théorème 2. *Si chaque ensemble E^γ (cité dans la formule (2)) est non-dense, la somme $\sum_\gamma E^\gamma$ est de 1-re catégorie (l'espace $\mathfrak{X}$ étant supposé monotone[1]).*

Démonstration. Selon la définition, l'ensemble E_λ^γ est évidemment non-dense comme un sous ensemble de E^γ. Nous allons démontrer que $E_\lambda=\sum_\gamma E_\lambda^\gamma$ est non-dense. En effet, supposons par contre que E_λ ne soit pas non-dense, c.à.d. qu'il existe un ensemble ouvert G non-vide tel que $G\subset\overline{E}_\lambda$. Soit, à maintenant, x un point de G et soit $V_\mu(x)$ un voisinage de x qui est entièrement contenu dans G, où $\mu\geqq\lambda$. Il en résulte que $V_\mu(x)\subset\overline{(\sum_\gamma E_\lambda^\gamma)}$, à savoir que $V_\mu(x)\cdot(\sum_\gamma E_\lambda^\gamma)\neq\phi$; il existe donc un indice γ_0 tel que $V_\mu(x)\cdot E_\lambda^{\gamma_0}\neq\phi$. D'autre part, selon $\mu\geqq\lambda$ et la formule (5), il vient $V_\mu(x)\cdot E_\lambda^\gamma=\phi$ pour $\gamma\neq\gamma_0$; donc $V_\mu(x)\subset\overline{E}_\lambda^{\gamma_0}$. Ce qui montre que $E_\lambda^{\gamma_0}$ n'est pas non-dense et nous aboutissons à une contradiction. Par conséquent, E_λ est non-dense et il en résulte que $\sum_\gamma E^\gamma=\sum_\lambda E_\lambda$ est de 1-re catégorie, c.q.f.d.

De plus, on a les

Corollaire 4. *Si chaque ensemble E^γ est de 1-re catégorie, la somme $\sum_\gamma E^\gamma$ l'est aussi.*

Corollaire 5. *Si chaque ensemble E^γ jouit de la propriété de Baire, la somme $\sum_\gamma E^\gamma$ possède la même propriété.*

On a, en effet, le corollaire 4 selon le théorème 2 et ce fait que l'opération $\mathfrak{M}$ est additive, et le corollaire 5 selon ce fait que l'ensemble E^γ peut être considéré comme somme d'un ensemble G_δ et d'un ensemble de 1-re catégorie.

Corollaire 6. *Soit P une propriété invariante par rapport à l'opération $\mathfrak{M}$. E étant un ensemble donné, désignons par E_{P} l'ensemble des points x de E pour lesquels il existe un ensemble ouvert O tel que*

1) Un espace est dit monotone, lorsque son caractère est filtrant à droite.

$x \in O$ et $O \cdot E$ jouit de la propriété **P**. *L'ensemble $E_{\mathbf{P}}$ jouit alors aussi de cette propriété.*

Démonstration. Rangeons, en effet, tous les points de $E_{\mathbf{P}}$ en une suite bien ordonnée:

$$(1) \qquad x_1, \; x_2, \; \cdots\cdots, \; x_\beta, \; \cdots\cdots.$$

Au point x_1 faisons correspondre un ensemble ouvert O^1 contenant x_1 tel que $O^1 \cdot E$ jouit de la propriété **P**. Puis, soit x_{β_2} le premier point dans la suite (1) tel qu'il n'est pas contenu dans $O^1 \cdot E$. Au point x_{β_2} faisons correspondre un ensemble ouvert O^2 contenant x_{β_2} tel que $O^2 \cdot E$ jouit de la propriété **P**. Supposons que les ensembles ouverts O^α pour tout $\alpha < \gamma$ soient déjà définis, et désignons par x_{β_γ} le premier point dans la suite (1) tel qu'il n'appartient pas à $\sum\limits_{\alpha<\gamma} O^\alpha$. Au point x_{β_γ} faisons correspondre un ensemble ouvert O^γ contenant x_{β_γ} tel que $O^\gamma \cdot E$ jouit de la propriété **P**. Continuerons cette manière jusqu'à ce que tous les points de la suite (1) seront épuisés. En posant $G^\gamma = \sum\limits_{\alpha \leqq \gamma} O^\alpha$ et $E^\gamma = E \cdot O^\gamma - \sum\limits_{\alpha<\gamma} O^\alpha$, G^γ est ouvert et E^γ jouit de la propriété **P** et $E_{\mathbf{P}} = \sum\limits_{\gamma} E^\gamma$. En outre, on a $G^1 \subset G^2 \subset \cdots\cdots \subset \subset G^\gamma \subset \cdots\cdots$ et $E^\gamma \subset G^\gamma - \sum\limits_{\alpha<\gamma} G^\alpha$. Donc, en tenant compte de la propriété **P**, l'ensemble $E_{\mathbf{P}}$ jouit aussi de la propriété **P**, c.q.f.d.

§8. Fonctions mesurables (B)

Dans ce paragraphe, nous considérons quelques espaces $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ etc.. Nous devons distinguer en général leurs caractères, mais, dans la suite, la puissance de caractère joue un rôle important et, par conséquent, nous supposons par simplicité du raisonnement que les caractères sont égaux dans tous les espaces, sauf mention expresse du contraire.

1. Définition. Une fonction $y = f(x)$ qui transforme un espace $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ est dit fonction mesurable (B) de classe α (ou simplement fonction de classe α), lorsque, quel que soit un ensemble fermé $F \subset \mathfrak{Y}$, l'ensemble $f^{-1}(F)$ est un ensemble borelien de classe α multiplicative.

De la définition et de l'identité $f^{-1}(\mathfrak{Y} - F) = \mathfrak{X} - f^{-1}(F)$, on peut définir les fonctions de classe α comme fonctions pour lesquelles l'ensemble $f^{-1}(G)$ est de classe α additive, quel que soit l'ensemble ouvert $G \subset \mathfrak{Y}$.

Les ensembles fermés étant de classe 0 multiplicative, les fonctions continues coïncident, conformément à cette définition, avec les fonctions de classe 0.

Ceci étant posé, nous allons donner quelques résultats:

Théorème 1. *Soit* $\mathfrak{Y}$ *un espace parfaitement séparable d'ordre* $\aleph_\xi$[1]. *Pour qu'une fonction* $y=f(x)$ *soit de classe* α, *il faut et il suffit qu'il existe pour chaque suffixe* $\lambda \in \mathfrak{A}$, *une décomposition de l'espace* $\mathfrak{X}$ *de façon que* $\mathfrak{X} = \sum_\mu X_\mu^\lambda$, $(\mu \in \mathfrak{A})$, *en ensembles de classe* α *additive tels que* $f(X_\mu^\lambda) \subset U_\lambda(y_\mu^\lambda)$, *quel que soit* μ, *pour un point* y_μ^λ *convenablement choisi.*

Démonstration. Necessité: En effet, $\mathfrak{Y}$ étant parfaitement séparable d'ordre $\aleph_\xi$, il existe pour chaque suffixe λ une suite de voisinages $U_\lambda(y_\mu^\lambda)$ tels que $\mathfrak{Y} = \sum_\mu U_\lambda(y_\mu^\lambda)$ et $\mu \in \mathfrak{A}$. $f(x)$ étant de classe α, l'ensemble $X_\mu^\lambda = f^{-1}(U_\lambda(y_\mu^\lambda))$ est de classe α additive et on a évidemment $\mathfrak{X} = \sum_\mu X_\mu^\lambda$ et $f(X_\mu^\lambda) \subset U_\lambda(y_\mu^\lambda)$.

Suffisance. Supposons que la condition du théorème est vérifiée, c. à. d. qu' à chaque suffixe λ correspond une décomposition de l'espace $\mathfrak{X}$ telles que $\mathfrak{X} = \sum_\mu X_\mu^\lambda$ où $\mu \in \mathfrak{A}$ et X_μ^λ est de classe α additive et $f(X_\mu^\lambda) \subset U_\lambda(y_\mu^\lambda)$ pour un point y_μ^λ convenablement choisi. Ceci étant établi, il s'agit de prouver que, G étant un ensemble ouvert dans $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(G)$ est de classe α additive.

Soit $x \in f^{-1}(G)$ qui équivaut à $f(x) \in G$; Comme G est ouvert, il existe un voisinage $U_\lambda(f(x)) \subset G$; donc, selon la condition (D) il existe un suffixe $\mu \in \mathfrak{A}$ tel que: $f(x) \in U_\mu(y') \rightarrow U_\mu(y') \subset U_\lambda(f(x))$, quel que soit $y' \in \mathfrak{Y}$. Par conséquent, selon l'hypothèse il y a un ensemble $x \in X_\mu^\lambda$ dans une décomposition de $\mathfrak{X}$ tel que $f(x) \in f(X_\mu^\lambda) \subset U_\lambda(f(x)) \subset G$, c. à. d. à chaque point $x \in f^{-1}(G)$ correspond un ensemble X_μ^λ de classe α additive tel que $f(X_\mu^\lambda) \subset U_\lambda(f(x))$. Comme on le sait, l'ensemble de tous les ensembles X_μ^λ est évidemment au plus de puissance $\aleph_\xi$; donc $f^{-1}(G)$ est un ensemble de classe α additive comme somme de tels ensembles X_μ^λ, c.q.f.d.

Théorème 2. $f(x)$ *étant une fonction de classe* α *et* E *un ensemble de classe* β, *l'ensemble* $f^{-1}(E)$ *est de classe* $\alpha+\beta$ *(multiplicative ou additive suivant la classe de* E*).*

Ce théorème est démontré par l'induction transfinie (par rapport

---

1) Une espace $\mathfrak{Y}$ est dit parfaitement séparable d'ordre $\aleph_\xi$, lorsqu'on peut sans altérer la fermeture dans $\mathfrak{Y}$, adopter pour les différents points y de $\mathfrak{Y}$ des voisinages appartenant à une même famille d'ensembles ouverts, cette famille, indépendant de y, ayant une puissance $\aleph_\xi$.

à β) et par les identités: $f^{-1}(\sum_\lambda E) = \sum_\lambda f^{-1}(E_\lambda)$ et $f^{-1}(\prod_\lambda E_\lambda) = \prod_\lambda f^{-1}(E_\lambda)$ et du fait que $\beta_\gamma < \beta$ entraîne $\alpha + \beta_\gamma < \alpha + \beta$, c.q.f.d.

Selon le théorème 2, on a aisément le

Corollaire 1. *Soit $y = f(x)$ une fonction de classe α et $z = g(y)$ une fonction de classe β. La fonction superposée $z = g(f(x))$ est alors de classe $\alpha + \beta$.*

2. Fonction de plusieurs variables. Une fonction $z = f(x, y)$ est dite fonction de deux variables, lorsque la variable indépendante parcourt un produit cartésien de deux espaces $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.

Clairement, une fonction $z = f(x)$ d'un seul variable peut être considérée comme fonction $g(x, y)$ de deux variables, en posant $f(x) = g(x, y)$. Cela posé, on prouve aisément que: *si $z = f(x)$ est une fonction de classe α, alors, en posant $f(x) = g(x, y)$, $g(x, y)$ est de classe α par rapport à la variable (x, y).*

De plus, on a le

Théorème 3. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces et soit $\mathfrak{Z}$ un espace satisfaisant à la condition (B_1) et monotone. Si une fonction $z = f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et de classe α relativement à la variable y, alors elle est de classe $\alpha + 1$ relativement à la variable (x, y).*

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de quelques lemmes:

Lemme 1. *Soit $z = g(x)$ une fonction continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Z}$ et soit $\{x_\tau\}$ un ensemble partout dense dans $\mathfrak{X}$. Dans ce cas, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $g(x)$ appartienne à un ensemble fermé F situé dans $\mathfrak{Z}$, est que, en symbole logique:*

$$[g(x) \in F] \equiv \prod_\lambda \prod_\mu \sum_\tau [\{x \in S_\mu(x_\tau)\} \cdot \{g(x_\tau) \in O_\lambda(F)\}],^{1)}$$

où λ et μ parcourent respectivement le caractère de $\mathfrak{Z}$ et celui de $\mathfrak{X}$.

Démonstration. D'une part, si $g(x) \in F$, en vertu de la continuité de $g(x)$, à deux suffixes quelconques λ et μ correspond un suffixe ν tel que $g(V_\nu(x)) \subset W_\lambda(g(x))$ et $V_\nu(x) \subset V_\mu(x)$. Il en résulte que $g(V_\nu(x)) \subset O_\lambda(F)$ et $V_\nu(x) \subset S_\mu(x)$. L'ensemble $\{x_\tau\}$ étant partout dense dans $\mathfrak{X}$, il y a un suffixe τ tel que $x_\tau \in V_\nu(x) \subset S_\mu(x)$; d'où $g(x_\tau) \in O_\lambda(F)$ et $x \in S_\mu(x_\tau)$ qui équivaut à $x_\tau \in S_\mu(x)$. Par conséquent, on a l'implication:

$$(1) \qquad [g(x) \in F] \rightarrow \prod_\lambda \prod_\mu \sum_\tau [\{x \in S_\mu(x_\tau)\} \cdot \{g(x_\tau) \in O_\lambda(F)\}].$$

1) Quant à $S_\mu(E)$ et à $O_\lambda(E)$, voir la Note 5) au bas de la page 79.

D'autre part, si $g(x) \bar{\in} F$, il existe un suffixe λ tel que $g(x) \bar{\in} \overline{O_\lambda(F)}$[1]. Il y a donc un suffixe ν de façon que $W_\nu(g(x)) \cdot O_\lambda(F) = \phi$. Or, $g(x)$ étant continue, il existe selon la condition (D) un suffixe μ tel que $g(S_\mu(x)) \subset W_\nu(g(x))$[2]; il vient donc $g(S_\mu(x)) \cdot O_\lambda(F) = \phi$. En outre, comme $x_\tau \in S_\mu(x)$ et $x \in S_\mu(x_\tau)$ sont équivalents, $x_\tau \in S_\mu(x)$ entraîne $g(x_\tau) \bar{\in} O_\lambda(F)$; d'où on a l'implication suivante;

$$(2) \qquad [g(x) \bar{\in} F] \to \sum_\lambda \sum_\mu \prod_\tau [\{x \in S_\mu(x_\tau)\} \to \{g(x_\tau) \bar{\in} O_\lambda(F)\}].$$

Selon (1) et (2), la démonstration du lemme est établie, c.q.f.d.

Lemme 2. *Soit $\mathfrak{Z}$ un espace monotone et satisfaisant à la condition (B_1) et soit $\{z_\tau\}$ un système caractéristique dans $\mathfrak{Z}$ et supposons qu'il converge vers un point z. Pour que le point z appartienne à un ensemble fermé $F \subset \mathfrak{Z}$, il faut et il suffit qu'on ait l'équivalence:*

$$[z \in F] \equiv \prod_\lambda \prod_{\tau_0} \sum_{\tau_0 \leqq \tau} [z_\tau \in O_\lambda(F)].$$

Démonstration. D'une part, si $z \in F$, on a $z \in O_\lambda(F)$ pour un suffixe quelconque λ; il existe donc un suffixe μ tel que $z \in W_\mu(z) \subset O_\lambda(F)$. Selon supposition que $\{z_\tau\}$ converge vers le point z, il existe, pour $W_\mu(z)$, un suffixe τ_0 de façon que $z_\tau \in W_\mu(z)$ pour tout $\tau \geqq \tau_0$. Donc, selon la monotonie de l'espace $\mathfrak{Z}$, il existe un suffixe τ pour un suffixe quelconque τ_0 de façon que $z_\tau \in O_\lambda(F)$ et $\tau \geqq \tau_0$. On a donc l'implication suivante:

$$(3) \qquad [z \in F] \to \prod_\lambda \prod_{\tau_0} \sum_{\tau_0 \leqq \tau} [z_\tau \in O_\lambda(F)].$$

D'autre part, si $z \bar{\in} F$, il y a un suffixe λ tel que $z \bar{\in} \overline{O_\lambda(F)}$. Il existe donc un voisinage $W_\mu(z)$ disjoint à $O_\lambda(F)$. $\{z_\tau\}$ étant un système convergeant vers le point z, il existe un suffixe τ_0 tel que $z_\tau \in W_\mu(z)$ pour tout $\tau \geqq \tau_0$; d'où on a $z_\tau \bar{\in} O_\lambda(F)$ pour tout $\tau \geqq \tau_0$. Par suite, on a l'implication:

$$(4) \qquad [z \bar{\in} F] \to \sum_\lambda \sum_{\tau_0} \prod_{\tau_0 \leqq \tau} [z_\tau \bar{\in} O_\lambda(F)].$$

D'après (3) et (4), le lemme est complètement établie, c.q.f.d.

Ces préliminaires étant posée, nous allons donner la

Démonstration du théorème. Considérons tout d'abord le cas où $\alpha = 0$. Soit $\{x_\tau\}$ un ensemble partout dense dans $\mathfrak{X}$ et soit F un en-

1) Voir la Note 5) au bas de la page 79.

2) Dans un espace satisfaisant à la condition (D), on peut vérifier qu'il existe pour un voisinage $V_\lambda(x)$ un suffixe μ tel que $S_\mu(x) \subset V_\lambda(x)$.

semble fermé dans $\mathfrak{Z}$. Alors, d'après le lemme 1, on a, en posant $g(x)=f(x, y)$,

$$[f(x, y) \in F] \equiv \prod_{\lambda} \prod_{\mu} \sum_{\tau} [\{x \in S_\mu(x_\tau)\} \cdot \{f(x_\tau, y) \in O_\lambda(F)\}].$$

Il vient donc

$$f^{-1}(F) = \prod_{\lambda} \prod_{\mu} \sum_{\tau} [\{\mathop{\mathbf{E}}_{x}(x \in S_\mu(x_\tau)) \times \mathfrak{Y}\} \cdot \{\mathfrak{X} \times \mathop{\mathbf{E}}_{y}(f(x_\tau, y) \in O_\lambda(F))\}].$$

Or, $f(x, y)$ étant continue relativement à y, $\mathop{\mathbf{E}}_{y}(f(x_\tau, y) \in O_\lambda(F))$ est ouvert dans $\mathfrak{Y}$ et $\mathop{\mathbf{E}}_{x}(x \in S_\mu(x_\tau))$ est aussi ouvert dans $\mathfrak{X}$. Par suite, l'ensemble dans la paranthèse [ ] est ouvert dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. Il vient donc que $f^{-1}(F) = \prod_{\lambda} \prod_{\mu} \sum_{\tau} [\quad]$ est un G_δ.

Deuxième cas où $\alpha \geqq 1$. Rangeons tous les points de $\mathfrak{X}$ dans une suite bien ordonnée:

(1) $$x_0, x_1, \cdots\cdots, x_\gamma, \cdots\cdots.$$

Cela posé, pour un suffixe μ et un point $x \in \mathfrak{X}$, désignons par $\gamma(x, \mu)$ le plus petit nombre γ tel que $x \in S_\mu(x_\gamma)$ et posons

$$\omega_\mu(x) = x_{\gamma(x, \mu)}.$$

Alors, on a évidemment

$$\rho(\omega_\mu(x), x) \leqq \frac{1}{\mu}.$$

Comme l'espace $\mathfrak{X}$ satisfait à la condition (D), le système caractéristique $\{\omega_\mu(x)\}$ converge vers le point x. En outre, le système caractéristique $\{f(\omega_\mu(x), y)\}$ converge vers le point $f(x, y)$, puisque $f(x, y)$ est continue relativement à la variable x. Or, en posant $z=f(x, y)$ et $z_\mu = f(\omega_\mu(x), y)$, du fait que $\{f(\omega_\mu(x), y)\}$ converge vers le point $f(x, y)$ et de l'équivalence (3) du lemme 2, il résulte que:

$$[f(x, y) \in F] \equiv \prod_{\lambda} \prod_{\mu_0} \sum_{\mu_0 \leqq \mu} [f(\omega_\mu(x), y) \in O_\lambda(F)]$$

et d'où

(*) $$\mathop{\mathbf{E}}_{xy}[f(x, y) \in F] = \prod_{\lambda} \prod_{\mu_0} \sum_{\mu_0 \leqq \mu} \mathop{\mathbf{E}}_{xy}[f(\omega_\mu(x), y) \in O_\lambda(F)].$$

D'autre part, d'après définition de $\omega_\mu(x)$, on a

$$[f(\omega_\mu(x), y) \in O_\lambda(F)]$$
$$\equiv \sum_{\gamma} [f(x_\gamma, y) \in O_\lambda(F)] \cdot [x \in (S_\mu(x_\gamma) - \sum_{\beta<\gamma} S_\mu(x_\beta))],$$

par suite, il vient

$$\underset{xy}{\mathsf{E}}[f(\omega_\lambda(x), y) \in O_\lambda(F)]$$
$$= \sum_\gamma \{\underset{xy}{\mathsf{E}}[f(x_\gamma, y) \in O_\lambda(F)] \cdot \underset{xy}{\mathsf{E}}[x \in (S_\mu(x_\gamma) - \sum_{\beta<\gamma} S_\mu(x_\beta))].$$

En posant $G_\mu^\gamma = \sum_{\beta \leqq \gamma} \underset{xy}{\mathsf{E}}[S_\mu(x_\beta) \times \mathfrak{Y}]$ et $F_{\mu,\lambda}^\gamma = \underset{xy}{\mathsf{E}}[f(x_\gamma, y) \in O_\lambda(F)] \cdot$ $\cdot (G_\mu^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G_\mu^\beta)$, G_μ^γ est ouvert dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ et $F_{\mu,\lambda}^\gamma$, de classe α additive et contenu dans $G_\mu^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G_\mu^\beta$, puisque $f(x, y)$ est de classe α relativement à la variable y. Par suite, $F_{\mu,\lambda} = \sum_\gamma F_{\mu,\lambda}^\gamma$ est aussi de classe α additive. D'autre part, selon la formule (*), il vient $f^{-1}(F) = \prod_\lambda \prod_{\mu_0} \sum_{\mu_0 \leqq \mu} F_{\mu,\lambda}$; il en résulte que $f^{-1}(F)$ est au plus de classe $\alpha+1$ multiplicative, puisque les suffixes λ, μ_0 et μ parcourent respectivement un ensemble de puissance $\aleph_\xi$, c.q.f.d.

3. Image de l'équation $y = f(x)$. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces monotones et satisfaisant à l'axiome (T_2) de séparation. On a dans ce cas le

Théorème 4. *Si $y = f(x)$ est de classe α (>0), l'image $I = \underset{xy}{\mathsf{E}}[y = f(x)]$ de la fonction $y = f(x)$ est de classe α multiplicative dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$.*

Démonstration. Soit $y_0, y_1, \cdots\cdots, y_\gamma, \cdots\cdots$ une suite bien ordonnée de tous les points de $\mathfrak{Y}$, et, pour simplicité, désignons par U_λ^γ le voisinage $U_\lambda(y_\gamma)$ dans $\mathfrak{Y}$. Or, $f(x)$ étant de classe α, l'ensemble $E_\lambda^\gamma = f^{-1}(\overline{U}_\lambda^\gamma)$ est de classe α multiplicative. En posant $H_\lambda^\gamma = E_\lambda^\gamma \times (\overline{U}_\lambda^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} U_\lambda^\beta)$ et $G_\lambda^\gamma = \mathfrak{X} \times (\sum_{\beta<\gamma} U_\lambda^\beta)$, le premier est de classe α multiplicative et le dernier, ouvert dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, et de plus il vient

$$G_\lambda^0 \subset G_\lambda^1 \subset \cdots\cdots \subset G_\lambda^\gamma \subset \cdots\cdots \quad \text{et} \quad H_\lambda^\gamma \subset G_\lambda^\gamma - \sum_{\beta<\gamma} G_\lambda^\beta .$$

Par suite, il résulte selon le corollaire 1 que l'ensemble $H_\lambda = \sum_\gamma H_\lambda^\gamma$ est de classe α multiplicative.

Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer que $I = \prod_\lambda H_\lambda$. D'une part, soit (x, y) un point de I et pour un suffixe λ, désignons par $\gamma(y, \lambda)$ le plus petit nombre ordinal γ tel que $y \in U_\lambda^\gamma$. D'après définition, on a $y \in U_\lambda^{\gamma(y,\lambda)} - \sum_{\beta<\gamma(y,\lambda)} U_\lambda^\beta$ et $E_\lambda^{\gamma(y,\lambda)} = f^{-1}(\overline{U}_\lambda^{\gamma(y,\lambda)})$. Il vient donc $(x, y) \in H_\lambda^{\gamma(y,\lambda)}$, puisque $x \in E_\lambda^{\gamma(y,\lambda)}$. Par suite, $(x, y) \in H_\lambda$; d'où $I \subset \prod_\lambda H_\lambda$.

D'autre part, soit (x, y) un point n'appartenant pas à I, c.à.d. $y \neq f(x)$. En vertu de l'axiome (T_2) il y a deux voisinages disjoints

$U_{\lambda_1}(y)$ et $U_{\lambda_2}(f(x))$. De la montonie de $\mathfrak{X}$ et de $\mathfrak{Y}$ et du fait que $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Z}$ satisfont à la condition (D), il y a un suffixe λ_0 tel que $S_{\lambda_0}(y) \subset U_{\lambda_1}(y)$ et $S_{\lambda_0}(f(x)) \subset U_{\lambda_2}(f(x))$. Pour ce λ_0, si l'on désigne par $\gamma(y, \lambda_0)$ le plus petit nombre ordinal γ tel que $f(x) \in U^{\gamma}_{\lambda_0}$, alors il vient $f(x) \bar{\in} U_{\lambda}^{\gamma(y, \lambda_0)}$; Il en résulte que $x \bar{\in} E_{\lambda_0}^{\gamma(y, \lambda_0)}$. Donc, par définition, $H_{\lambda_0}^{\gamma(y, \lambda_0)}$ ne contient pas le point (x, y). Puis, si $\gamma(y, \lambda_0) < \gamma$, il résulte selon définition que $y \bar{\in} U^{\gamma}_{\lambda_0} - \sum_{\beta < \gamma} U^{\beta}_{\lambda}$. Il vient donc $(x, y) \bar{\in} H^{\gamma}_{\lambda_0}$ pour tout γ; d'où $(x, y) \bar{\in} H_{\lambda_0}$. Il en résulte que $(x, y) \bar{\in} \prod_{\lambda} H_{\lambda}$; Ce qui montre que $I \supset \prod_{\lambda} H_{\lambda}$, c.q.f.d.

4. Limite de fonctions. Supposons à cette place-ci que l'espace $\mathfrak{Y}$ satisfasse à la condition (B_1).

Soit $\{f_{\tau}(x)\}$ un système caractéristique de fonctions définies de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$, c. à. d. supposons qu'il est ordonné suivant l'ordre du caractère de $\mathfrak{Y}$. Ainsi, nous pouvons considérer la convergence du système en chaque point x. Soit $f(x)$ une fonction et si, pour chaque point x, on a, en symbole logique,

$$\prod_{\tau_{\lambda} \leqq \tau} [f_{\tau}(x) \in U_{\lambda}(f(x))],$$

où τ_{λ} est un suffixe déterminé par x et λ, on dit alors que le système $\{f_{\tau}(x)\}$ converge vers la fonction $f(x)$ et que $f(x)$ est fonction limite de $\{f_{\tau}(x)\}$. En particulier, si τ_{λ} est indépendant du point x, on dit que le système $\{f_{\tau}(x)\}$ converge uniformément vers la fonction $f(x)$.

Cela posé, nous allons démontrer le

Théorème 5. *Si un système caractéristique $\{f_{\tau}(x)\}$ est constitué de fonctions de classe α et s'il converge vers une fonction $f(x)$, alors $f(x)$ est de plus de classe $\alpha + 1$.*

Démonstration. Par supposition que $\{f_{\tau}(x)\}$ converge vers $f(x)$, on a, pour un ensemble fermé $F \subset \mathfrak{Y}$, $[f(x) \in F] \equiv \prod_{\lambda} \prod_{\tau_0} \sum_{\tau_0 \leqq \tau} [f_{\tau}(x) \in O_{\lambda}(F)]$ selon le lemme 2. Il vient donc

$$f^{-1}(F) = \prod_{\lambda} \prod_{\tau_0} \sum_{\tau_0 \leqq \tau} f_{\tau}^{-1}(O_{\lambda}(F)).$$

Or, $f_{\tau}(x)$ étant de classe α, l'ensemble $f_{\tau}^{-1}(O_{\lambda}(F))$ est de classe α additive. Par conséquent, $f^{-1}(F)$ est de classe $\alpha + 1$ multiplicative; D'où $f(x)$ est de classe $\alpha + 1$, c.q.f.d.

Théorème 6. *Si un système caractéristique $\{f_{\tau}(x)\}$ formé de fonctions de classe α, converge uniformément vers une fonction $f(x)$, alors elle est au plus de classe α.*

Pour démontrer ce théorème, nous besoin un lemme suivant;

Lemme. *Si un système* $\{f_\tau(x)\}$ *converge uniformément vers une fonction* $f(x)$, *alors on a pour un ensemble fermé* $F \subset \mathfrak{Y}$, *en symbole logique,*

$$[f(x) \in F] \equiv \prod_\lambda \prod_{\tau_\lambda \leqq \tau} [f_\tau(x) \in \overline{O_\lambda(F)}],$$

où τ_λ *est un suffixe déterminé par* λ.

Démonstration. Par supposition que $\{f_\tau(x)\}$ converge uniformément vers $f(x)$, il y a, pour un suffixe λ, un suffixe τ_λ qui est indépendant de x tel que $\prod_{\tau_\lambda \leqq \tau} [f_\tau(x) \in U_\lambda(f(x))]$. Or, si $f(x) \in F$, on a $U_\lambda(f(x)) \subset O_\lambda(F) \subset \overline{O_\lambda(F)}$; D'où on a l'implication: $[f(x) \in F] \rightarrow \prod_\lambda \prod_{\tau_\lambda \leqq \tau} \cdot [f_\tau(x) \in \overline{O_\lambda(F)}]$.

D'autre part, si $f(x) \bar{\in} F$, il y a alors deux suffixes λ et μ tels que $U_\mu(f(x)) \cdot O_\lambda(F) = \phi$[1]. De plus, $\{f_\tau(x)\}$ convergeant uniformément vers $f(x)$, le système $\{f_\tau(x)\}$ est résiduel avec lui-même dans $U_\mu(f(x))$. Par suite, il y a un suffixe τ ($\geqq \tau_\lambda$) tel que $f_\tau(x) \in U_\mu(f(x))$; d'où $f_\tau(x) \bar{\in} \overline{O_\lambda(F)}$. Il en résulte que $[f(x) \bar{\in} F] \rightarrow \sum_\lambda \sum_{\tau_\lambda \leqq \tau} [f_\tau(x) \bar{\in} \overline{O_\lambda(F)}]$. Ainsi la démonstration est établie, c.q.f.d.

Démonstration du théorème. Par le lemme, on a

$$f^{-1}(F) = \prod_\lambda \prod_{\tau_\lambda \leqq \tau} \mathop{\mathbf{E}}_x [f_\tau(x) \in \overline{O_\lambda(F)}] = \prod_\lambda \prod_{\tau_\lambda \leqq \tau} f_\tau^{-1}(\overline{O_\lambda(F)}).$$

$f_\tau(x)$ étant de classe α, $f_\tau^{-1}(\overline{O_\lambda(F)})$ est de classe α multiplicative; Donc, $f^{-1}(F)$ l'est aussi. $f(x)$ est ainsi de classe α, c.q.f.d.

5. Théorème de Baire sur les fonctions de 1-re classe. En suivant le raisonnement dû à M. Kuratowski, on peut aisément démontrer le théorème 7 et le corollaire suivant[2].

Théorème 7. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction* $y = f(x)$ *de* 1-*re classe est de* 1-*re catégorie* ($\mathfrak{Y}$ *étant supposé parfaitement séparable d'ordre* $\aleph_\xi$).

Corollaire. $f(x)$ *étant une fonction de* 1-*re classe et* E *étant un sous-ensemble arbitraire de l'espace* $\mathfrak{X}$, *l'ensemble des points de discontinuité de la fonction partielle* $f(x \mid E)$ *est de* 1-*re catégorie par rapport à* E.

Théorème 8. *Une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé est de* 1-*re classe* (*étant supposé que l'espace* $\mathfrak{X}$ *satis-*

---

1) Nous pouvons prouver qu'un espace satisfaisant à la condition (B_1) est régulier. Voir notre article: Sur les espaces à structure uniforme, Jour. of the Fac. of Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. 1, Vol. X (1943), p. 188.

2) Cf. Kuratowski, Topologie I, pp. 300 - 302.

fasse à la condition (T_1)).

Démonstration, Soit, en effet, $F \subset \mathfrak{Y}$ un ensemble fermé. Il s'agit de prouver que $f^{-1}(F)$ est un G_δ. Or, comme $\mathfrak{Y} - F$ est ouvert, il y a un ensemble $\{F_\tau\}$ d'ensembles fermés tels que $\mathfrak{Y} - F = \sum_\tau F_\tau$, τ parcourant un ensemble de puissance $\aleph_\xi$. Nous démontrons tout d'abord qu'il existe pour deux ensembles $f^{-1}(F)$ et $f^{-1}(F_\tau)$ un ensemble développable D_τ de façon que $f^{-1}(F) \subset D_\tau$ et $f^{-1}(F_\tau) \cdot D_\tau = \phi$.

En effet, supposons par contre qu'il existe un ensemble X fermé et non-vide tel que $X = \overline{X \cdot f^{-1}(F)} \cdot \overline{X \cdot f^{-1}(F_\tau)}$. X étant fermé et non-vide, il existe par l'hypothèse un point x de continuité de la fonction partielle $g(x) = f(x \mid X)$. Par conséquent, on a $x \in X \subset \overline{X \cdot f^{-1}(F)} = \overline{g^{-1}(F)}$ et, en vertu de la continuité de la fonction $g(x)$; $g(x) \in \overline{g(g^{-1}(F))}$. Il vient donc $f(x) \in F$, puisque $f(x) = g(x)$ et $\overline{g(g^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$. D'une façon analogue, on a $f(x) \in F_\tau$ selon l'inclusion $x \in X \subset \overline{X \cdot f^{-1}(F_\tau)}$. Mais cela est impossible, car $F \cdot F_\tau = \phi$. Il vient donc $X = \phi$. Ce qui est une contradiction. Par conséquent, comme on le sait, il y a un ensemble développable D_τ tel que $f^{-1}(F) \subset D_\tau$ et $f^{-1}(F_\tau) \cdot D_\tau = \phi$; Il en résulte que

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &\subset \prod_\tau D_\tau \subset \prod_\tau (\mathfrak{X} - f^{-1}(F_\tau)) \subset \mathfrak{X} - \sum_\tau f^{-1}(F_\tau) \\ &= \mathfrak{X} - f^{-1}(\sum_\tau F_\tau) = \mathfrak{X} - f^{-1}(\mathfrak{Y} - F) \\ &= \mathfrak{X} - (\mathfrak{X} - f^{-1}(F)) = f^{-1}(F). \end{aligned}$$

D'où $f^{-1}(F) = \prod_\tau D_\tau$. $f^{-1}(F)$ est donc un G_δ; ce qui montre que $f(x)$ est de classe 1, c.q.f.d.

En rapprochant le théorème 8 et le lemme 4 donné dans un autre article[1], on a le

Théorème 9. *Dans un espace exceptionel, régulier et localement-parfaitment compact en soi au sens bien ordonné, pour qu'une fonction* $f(x)$ *soit de classe* 1, *il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble fermé dans* $\mathfrak{X}$.

6. Fonction jouissant de la propriété de Baire. En suivant l'idée due à M. Kuratowski[2], on peut démontrer le

Théorème 10. *Soient* $\mathfrak{X}$ *et* $\mathfrak{Y}$ *deux espaces monotones. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction* $y = f(x)$ *jouisse de la propriété de Baire est qu'il existe un ensemble* P *de* 1-*re caté-*

1) Cf. Contribution à la topologie II, Ce Jonrnal, Vol. 2 (1953), p. 160.
2) Kuratowski, Topologie I, (1952), p. 306.

gorie dans $\mathfrak{X}$ tel que la fonction partielle $f(x \mid \mathfrak{X} - P)$ est continue ($\mathfrak{Y}$ étant supposé parfaitement séparable d'ordre $\aleph_\xi$).

Théorème 11. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces monotones vérifiant l'axiome (T_1) et soit $\mathfrak{Z}$ un espace monotone vérifiant la condition (B_1). Si une fonction $z = f(x, y)$ est continue relativement à la variable x et jouit de la propriété de Baire relativement à la variable y, elle jouit de cette propriété relativement à la variable (x, y).*

La démonstration du théorème est obtenu d'une façon tout-à-fait analogue à celle du théorème 3.

Quant à l'image de l'equation $y = f(x)$, on a le théorème suivant d'une façon analogue au théorème 4;

Théorème 12. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$. deux espaces monotones vérifiant l'axiome (T_2), et $y = f(x)$ soit une fonction jouissant de la propriété de Baire. Alors, l'image $I = \underset{xy}{\mathbf{E}}[y = f(x)]$ de $f(x)$ jouit de cette propriété.*

Nous insérons un théorème qui est analogue au théorème 5:

Théorème 13. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace monotone vérifiant l'axiome (T_1) et soit $\mathfrak{Y}$ un espace monotone satisfaisant à la condition (B_1). La limite d'un système caractéristique $\{f_\tau(x)\}$ de fonctions jouissant de la propriété de Baire jouit aussi de cette propriété.*

(Fin)

Table des matières.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received August 31, 1954*)