ZUR FORTSETZUNG DER 2-COZYKLEN IN EINEM KOMMUTATIVEN RING

MIKAO MORIYA

Die vorliegende Note bildet den algebraischen Teil meiner Untersuchung über die Struktur der 2-Cohomologiegruppen, welche die Hauptordnung eines diskret bewerteten perfekten Körpers als Definitionsbereich besitzen. Ich will im folgenden die von Y. Kawada[1] entwickelte Theorie der 2-Cohomologiegruppen in Henselschen $\mathfrak{p}$-adischen Zahlkörpern verallgemeinern und an einigen Stellen ergänzen.

§1. 2-Cohomologiegruppen in einem kommutativen Ring. $\mathfrak{R}$ sei ein kommutativer Ring und $\mathfrak{M}$ ein $\mathfrak{R}$-Linksmodul. Dann versteht man unter einem 2-*Cozyklus* f von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ eine eindeutige Abbildung des Produktraumes $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Für beliebige Elemente a, b aus $\mathfrak{R}$ gilt

$$f(a, b) = f(b, a).$$

2. Für a_1, a_2 aus $\mathfrak{R}$ gilt

$$f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b).$$

3. Für a, b und c aus $\mathfrak{R}$ gilt

$$af(b, c) + f(a, bc) = f(ab, c) + cf(a, b).$$

Ist nun g eine 1-*Kette* von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ (d.h. g ist ein Homomorphismus von $\mathfrak{R}$ als additiver Gruppe in $\mathfrak{M}$), so definiert man eine Abbildung δg von $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$ durch die Relation

$$\delta g(a, b) = ag(b) + bg(a) - g(ab),$$

wo a, b beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$ bezeichnen. Dann wird δg, wie leicht bestätigt, ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$; δg heißt der 2-*Corand* von g. Für beliebige 2-Cozyklen f_1, f_2 von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ definiert man die Summe $f_1 + f_2$ nach folgender Vorschrift:

$$(f_1 + f_2)(a, b) = f_1(a, b) + f_2(a, b), \qquad a, b \in \mathfrak{R}.$$

---

1) Y. Kawada, On the Derivations in number fields, Ann. of Math., Vol. 54 (1951), S. 302 - 314.

Ersichtlich ist $f_1 + f_2$ wieder ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$. Man sieht ferner sofort ein, daß die Gesamtheit $Z^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$ aller 2-Cozyklen von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ bei obiger Summenbildung eine additive Gruppe mit $\mathfrak{R}$ als Linksoperatorenbereich bildet; dabei ist die Gesamtheit $B^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$ aller 2-Coränder der 1-Ketten eine $\mathfrak{R}$-Untergruppe von $Z^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$. Die Faktorgruppe $H^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M}) = Z^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})/B^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$ ist die 2-Cohomologiegruppe von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ genannt. Ein Element aus $H^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$ heißt 2-Cohomologieklasse; 2-Cozyklen f_1, f_2, welche ein und derselben Cohomologieklasse angehören, heißen einander cohomolog.

§2. Reduktion eines 2-Cozyklus auf einen normierten Cozyklus.

$\mathfrak{R}$ sei ein kommutativer Ring mit 1-Element und $\mathfrak{R}_0$ ein Unterring von $\mathfrak{R}$, welcher auch 1 enthält. Ferner sei vorausgesetzt, daß $\mathfrak{R}$ eine linear unabhängige $\mathfrak{R}_0$-Basis $1, \theta, \cdots\cdots, \theta^{n-1}$ $(n > 1)$ besitzt; d.h. jedes Element aus $\mathfrak{R}$ läßt sich eindeutig als lineare Form in $1, \theta, \cdots\cdots, \theta^{n-1}$ mit Koeffizienten aus $\mathfrak{R}_0$ darstellen. Wir betrachten dann einen $\mathfrak{R}$-Modul $\mathfrak{M}$ mit 1 als Einsoperator. Im folgenden bezeichnen die kleinen lateinischen Buchstaben $a, b, c, \cdots\cdots$ oder $x, y, \cdots\cdots$ Elemente aus $\mathfrak{R}_0$ und die großen lateinischen Buchstaben $A, B, C, \cdots\cdots$ Elemente aus $\mathfrak{R}$, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird.

Ist nun f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, so setze man für jedes Element A aus $\mathfrak{R}$:

$$g(A) = f(1, A);$$

offenbar ist g nach Definition eine 1-Kette von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$. Ferner gilt wegen $Af(1,1) + f(A,1) = f(A,1) + 1f(A,1)$:

$$g(A) = f(1, A) = Af(1,1) = Ag(1).$$

Bildet man also den 2-Cozyklus $f_0 = f - \delta g$, so ist

$$\begin{aligned} f_0(1, A) &= f(1, A) - \delta g(1, A) \\ &= f(1, A) - Ag(1) - 1g(A) + g(A) = 0. \end{aligned}$$

Daher enthält jede Cohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{R};\mathfrak{M})$ einen Cozyklus f_0 mit $f_0(1, A) = 0$.

Ist A von der Form $\sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$, so sind die Koeffizienten a_i aus $\mathfrak{R}_0$ durch A eindeutig bestimmt. Setzt man dann

$$g_0(A) = \sum_{i=0}^{n-1} g_0(a_i \theta^i)$$

und

$$g_0(x\theta^i) = f_0(x, \theta^i) \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1),$$

so wird g_0 eine 1-Kette von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$. Ferner gelten:

$$g_0(x) = f_0(x, 1) = 0 \quad \text{und} \quad g_0(\theta^i) = f_0(1, \theta^i) = 0.$$

Der Cozyklus $f_1 = f_0 + \delta g_0$ genügt folgenden Relationen:

$$f_1(1, A) = f_0(1, A) + \delta g_0(1, A) = Ag_0(1) + g_0(A) - g_0(A) = 0$$

und

$$\begin{aligned} f_1(x, \theta^i) &= f_0(x, \theta^i) + \delta g_0(x, \theta^i) \\ &= f_0(x, \theta^i) + \theta^i g_0(x) + xg_0(\theta^i) - g_0(x\theta^i) \\ &= 0 \qquad\qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1). \end{aligned}$$

Betrachtet man nun eine 1-Kette g_1 von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften $g_1(x) = 0$ und $g_1(x\theta^{i+1}) = f_1(x\theta, \theta^i)$ $(0 \leqq i \leqq n-2)$, so erhält man sofort:

$$g_1(x\theta) = 0.$$

Für den 2-Cozyklus $f_2 = f_1 + g_1$ besteht:

$$\begin{aligned} f_2(x, \theta^i) &= f_1(x, \theta^i) + \delta g_1(x, \theta^i) \\ &= \theta^i g_1(x) + xg_1(\theta^i) - g_1(x\theta^i) \\ &= xg_1(\theta^i) - g_1(x\theta^i). \end{aligned}$$

Da nach Definition $g_1(x) = 0$ und $g_1(x\theta) = 0$ sind, so gelten für $i = 0, 1$:

$$f_2(x, \theta^i) = 0.$$

Für $2 \leqq i \leqq n-1$ gilt aber wegen $xf_1(\theta, \theta^{i-1}) + f_1(x, \theta^i) = f_1(x\theta, \theta^{i-1}) + \theta^{i-1}f_1(x, \theta)$:

$$xg_1(\theta^i) = g_1(x\theta^i).$$

Hieraus schließt man sofort:

$$f_2(x, \theta^i) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1);$$

ferner gilt auch $f_2(1, A) = 0$. Wegen $g_1(x\theta) = 0$ ist

$$\begin{aligned} f_2(x\theta, \theta) &= f_1(x\theta, \theta) + \delta g_1(x\theta, \theta) \\ &= f_1(x\theta, \theta) + \theta g_1(x\theta) + x\theta g_1(\theta) - g_1(x\theta^2) \\ &= f_1(x\theta, \theta) - f_1(x\theta, \theta) = 0. \end{aligned}$$

Nun nehmen wir an, daß zu jeder natürlichen Zahl i mit $i < n-1$ stets ein zu f cohomologer 2-Cozyklus f_i mit $f_i(x, \theta^j) = 0$ $(j = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$ und mit $f_i(x\theta, \theta^h) = 0$ $(h = 0, 1, \cdots\cdots, i-1)$ existiert. Ist dann noch $i+1 < n-1$, so betrachten wir eine 1-Kette g_i von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ mit $g_i(x) = 0$ und $g_i(x\theta^{j+1}) = f_i(x\theta, \theta^j)$ $(j = 0, 1, \cdots\cdots, n-2)$. Wegen $xf_i(\theta, \theta^{j-1}) + f_i(x, \theta^j) = f_i(x\theta, \theta^{j-1}) + \theta^{j-1} f_i(x, \theta)$ besteht für $1 \leqq j \leqq n-1$:

$$xg_i(\theta^j) - g_i(x\theta^j) = xf_i(\theta, \theta^{j-1}) - f_i(x\theta, \theta^{j-1}) = 0;$$

hieraus schließt man für $j = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$:

$$\begin{aligned} f_i(x, \theta^j) + \delta g_i(x, \theta^j) &= f_i(x, \theta^j) + \theta^j g_i(x) + xg_i(\theta^j) - g_i(x\theta^j) \\ &= xg_i(\theta^j) - g_i(x\theta^j) = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$f_{i+1} = f_i + \delta g_i,$$

so sind für $h = 0, 1, \cdots\cdots, i-1$ nach Definition:

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x\theta, \theta^h) &= f_i(x\theta, \theta^h) + \delta g_i(x\theta, \theta^h) \\ &= \theta^h g_i(x\theta) + x\theta g_i(\theta^h) - g_i(x\theta^{h+1}) = 0, \end{aligned}$$

weil nach Definition $g_i(x\theta^h) = 0$ $(h = 0, 1, \cdots\cdots, i)$ sind; es ist aber

$$\begin{aligned} f_{i+1}(x\theta, \theta^i) &= f_i(x\theta, \theta^i) + \delta g_i(x\theta, \theta^i) \\ &= f_i(x\theta, \theta^i) + \theta^i g_i(x\theta) + x\theta g_i(\theta^i) - g_i(x\theta^{i+1}) \\ &= f_i(x\theta, \theta^i) - g_i(x\theta^{i+1}) = 0. \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt:

(i) $\quad f_{i+1}(x, \theta^j) = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots\cdots, n-1),$

(ii) $\quad f_{i+1}(x\theta, \theta^h) = 0 \qquad (h = 0, 1, \cdots\cdots, i).$

Durch vollständige Induktion kann man also folgenden Hilfssatz beweisen:

Hilfssatz 1. *Jede Cohomologieklasse aus $H^{(2)}(\mathfrak{R}; \mathfrak{M})$ besitzt einen 2-Cozyklus f mit folgenden Eigenschaften:*

$$\text{(i)} \qquad f(x, \theta^i) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1),$$
$$\text{(ii)} \qquad f(x\theta, \theta^j) = 0 \qquad (j = 0, 1, \cdots\cdots, n-2).$$

Ein 2-Cozyklus f von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii) in Hilfssatz 1 heißt *über* $\mathfrak{R}_0$ *θ-normiert.*

Hilfssatz 2. *Es sei f ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ und $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{R}$. Dann gelten:*

1) $f(x, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i f(x, a_i),$

2) $f(x\theta, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + f(xa_{n-1}, \theta^n) + xa_{n-1}f(\theta, \theta^{n-1}),$

3) $f(x\theta^i, A) = \theta f(x\theta^{i-1}, A) + f(\theta, x\theta^{i-1}A) \qquad (1 \leqq i \leqq n-1).$

Beweis. 1) Da f über $\mathfrak{R}_0$ θ-normiert ist, so sind

$$f(a_i, \theta^i) = f(xa_i, \theta^i) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1);$$

aus $xf(a_i, \theta^i) + f(x, a_i\theta^i) = f(xa_i, \theta^i) + \theta^i f(x, a_i)$ erhält man daher

$$f(x, a_i\theta^i) = \theta^i f(x, a_i).$$

Es gilt also:

$$f(x, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x, a_i\theta^i) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i f(x, a_i).$$

2) Berücksichtigt man nun die Relation $f(\theta, xa_i\theta^i) = xa_i f(\theta, \theta^i) + f(xa_i, \theta^{i+1}) - \theta f(xa_i, \theta^i)$, so gelten:

$$f(\theta, xa_i\theta^i) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2)$$

und

$$f(\theta, xa_{n-1}\theta^{n-1}) = xa_{n-1}f(\theta, \theta^{n-1}) + f(xa_{n-1}, \theta^n).$$

Weil aber

$$\begin{aligned} f(x\theta, a_i\theta^i) &= \theta f(x, a_i\theta^i) + f(\theta, xa_i\theta^i) - a_i\theta^i f(x, \theta) \\ &= \theta^{i+1} f(x, a_i) + f(\theta, xa_i\theta^i) \end{aligned}$$

ist, so besteht

$$\begin{aligned} f(x\theta, A) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(x\theta, a_i\theta^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + f(xa_{n-1}, \theta^n) + xa_{n-1}f(\theta, \theta^{n-1}). \end{aligned}$$

3) Aus $f(x\theta^i, A) + Af(\theta, x\theta^{i-1}) = \theta f(x\theta^{i-1}, A) + f(\theta, x\theta^{i-1}A)$ folgt:

$$f(x\theta^i, A) = \theta f(x\theta^{i-1}, A) + f(\theta, x\theta^{i-1}A),$$

weil nach 2) für $1 \leqq i \leqq n-1$ $f(\theta, x\theta^{i-1}) = \theta^i f(1, x) = 0$ ist.

§3. Fortsetzung eines 2-Cozyklus auf einen Oberring. In diesem Paragraphen bedeuten $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{M}$ kommutative Ringe bzw. $\mathfrak{R}$-Linksmodul wie in §2. Ferner ist $1, \theta, \cdots\cdots, \theta^{n-1}$ $(n > 1)$ eine linear unabhängige $\mathfrak{R}_0$-Basis von $\mathfrak{R}$. Die kleinen bzw. großen lateinischen Buchstaben bezeichnen wieder Elemente aus $\mathfrak{R}_0$ bzw. $\mathfrak{R}$, wenn nichts anderes ausdrücklich gesagt wird. Nun wollen wir im folgenden beweisen, daß ein 2-Cozyklus f von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ stets auf $\mathfrak{R}$ fortsetzbar ist; d.h. es existiert ein 2-Cozyklus f^* von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, welcher in $\mathfrak{R}_0$ f induziert. Dabei heißt f^* einfach eine *Fortsetzung* von f auf $\mathfrak{R}$. Um die obige Behauptung zu bestätigen, kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß stets $f(1, x) = 0$ ist. Nämlich sonst definiere man eine 1-Kette g von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ durch $g(x) = f(1, x)$ und eine 1-Kette g^* von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ durch $g^*(A) = g(a_0)$ für $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$; es ist dann

$$(f - \delta g)(1, x) = 0.$$

Wenn also $f - \delta g$ eine Fortsetzung f^* auf $\mathfrak{R}$ besitzt, so ist $f^* + \delta g^*$ sicher eine Fortsetzung von f auf $\mathfrak{R}$. Wir wollen daher im folgenden stets annehmen, daß von vornherein $f(1, x) = 0$ ist.

Nun definieren wir eine Abbildung f^* des Produktraumes $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ in $\mathfrak{M}$ durch folgende Festsetzungen:

1) Für $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$ ist

$$f^*(x, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i f(x, a_i)$$

gesetzt.

2) $f^*(x\theta, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + f^*(xa_{n-1}, \theta^n) + xa_{n-1}\mu.$

Dabei ist $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$ und μ ein beliebig festgelegtes Element aus $\mathfrak{M}$.

3) Ist i eine beliebige natürliche Zahl mit $2 \leqq i \leqq n-1$, so ist

$$f^*(x\theta^i, A) = \theta f^*(x\theta^{i-1}, A) + f^*(\theta, x\theta^{i-1}A).$$

4) Ist $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$, so ist

$$f^*(A, B) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(a_i \theta^i, B)$$

gesetzt.

Bemerkung. Da $1, \theta, \cdots\cdots, \theta^{n-1}$ eine linear unabhängige $\mathfrak{R}_0$-Basis von $\mathfrak{R}$ ist, so sind die Koeffizienten a_i $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$ von A durch A eindeutig bestimmt. Daher ist $f^*(x, A)$ nach Festsetzung, 1) durch x und A eindeutig bestimmt, ebenso ist es auch $f^*(x\theta, A)$, soweit μ festgelegt ist. Weil Festsetzung, 3) die Induktionsvorschrift zur Definition von $f^*(x\theta^i, A)$ $(2 \leqq i \leqq n-1)$ angibt, so ist $f^*(x\theta^i, A)$ für jedes i mit $0 \leqq i \leqq n-1$ durch x und A eindeutig bestimmt.

Hilfssatz 3. *Es gelten:*

i) $f^*(x, y\theta^i) = \theta^i f(x, y)$ $\qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$,

insbesondere sind $f^*(x, \theta^i) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$.

ii) $f^*(\theta, \theta^i) = 0$ $\qquad$ *für* $i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2$

und

$$f^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu.$$

iii) *Im allgemeinen sind für* $\nu = 0, 1$ *und für* i *mit* $0 \leqq i \leqq n-1$:

$$f^*(x\theta^\nu, y\theta^i) = \theta^{i+\nu} f(x, y) + f^*(xy, \theta^{i+\nu}) + xyf^*(\theta^\nu, \theta^i).$$

Beweis. Die Behauptung i) folgt ohne weiteres aus Festsetzung, 1). Setzt man in Festsetzung, 2) $x = 1$ und $A = \theta^i$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$, so sind offenbar:

$$f^*(\theta, \theta^i) = 0 \qquad \text{für} \quad i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2$$

und

$$f^*(\theta, \theta^{n-1}) = \theta^n f(1, 1) + f^*(1, \theta^n) + \mu.$$

Da θ^n von der Form $\theta^n = \sum_{i=0}^{n-1} c_i \theta^n$ ist, so ist nach Festsetzung, 1)

$$f^*(1, \theta^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i f(1, c_i) = 0,$$

also ist $f^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$. Somit ist ii) bewiesen.

Die Behauptung iii) folgt ohne Schwierigkeit aus i), ii) und Festsetzung, 2).

Zusatz zu Hilfssatz 3. *Ist* $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$, *so gelten für* $\nu = 0, 1$:

$$f^*(x\theta^\nu, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, a_i\theta^i).$$

Beweis. Für $\nu = 0$ gilt nach Festsetzung, 1) und Hilfssatz 3:

$$f^*(x, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i f(x, a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x, a_i\theta^i).$$

Für $\nu = 1$ gilt nach Festsetzung, 2):

$$f^*(x\theta, A) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + f^*(xa_{n-1}, \theta^n) + xa_{n-1}\mu;$$

da nach Hilfssatz 3

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta, a_i\theta^i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f^*(xa_i, \theta^{i+1}) + \sum_{i=0}^{n-1} xa_i f^*(\theta, \theta^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+1} f(x, a_i) + f^*(xa_{n-1}, \theta^n) + xa_{n-1}\mu\end{aligned}$$

ist, so gilt:

$$f^*(x\theta, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta, a_i\theta^i).$$

Hilfssatz 4. *Für jede ganze rationale Zahl* ν *mit* $0 \leqq \nu \leqq n-1$ *gilt stets*:

$$f^*(x\theta^\nu, A + B) = f^*(x\theta^\nu, A) + f^*(x\theta^\nu, B).$$

Beweis. Setzt man $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$ und $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\theta^i$, so gelten für $\nu = 0, 1$ nach Zusatz zu Hilfssatz 3:

$$f^*(x\theta^\nu, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, a_i\theta^i), \quad f^*(x\theta^\nu, B) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, b_i\theta^i)$$

und

$$\begin{aligned}f^*(x\theta^\nu, A + B) &= \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, (a_i + b_i)\theta^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \theta^{i+\nu} f(x, (a_i + b_i)) + \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x(a_i + b_i), \theta^{i+\nu}) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} x(a_i + b_i) f^*(\theta^\nu, \theta^i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \{\theta^{i+\nu} f(x, a_i) + f^*(xa_i, \theta^{i+\nu}) + xa_i f^*(\theta^\nu, \theta^i)\} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \{\theta^{i+\nu} f(x, b_i) + f^*(xb_i, \theta^{i+\nu}) + xb_i f(\theta^\nu, \theta^i)\}\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, a_i\theta^i) + \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, b_i\theta^i).$$

Es sind also für $\nu = 0, 1$:

$$f^*(x\theta^\nu, A + B) = f^*(x\theta^\nu, A) + f^*(x\theta^\nu, B).$$

Ist $2 \leqq \nu \leqq n-1$, so nehmen wir an, daß die Behauptung des Satzes bis $\nu - 1$ richtig ist. Nun gilt nach Festsetzung, 3):

$$f^*(x\theta^\nu, A + B) = \theta f^*(x\theta^{\nu-1}, A + B) + f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}(A + B)).$$

Wegen Induktionsannahme sind

$$\theta f^*(x\theta^{\nu-1}, A + B) = \theta f^*(x\theta^{\nu-1}, A) + \theta f^*(x\theta^{\nu-1}, B)$$

und

$$f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}(A + B)) = f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}A) + f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}B);$$

hieraus schließt man sofort:

$$\begin{aligned} f^*(x\theta^\nu, A + B) &= \theta f^*(x\theta^{\nu-1}, A) + f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}A) \\ &\quad + \theta f^*(x\theta^{\nu-1}, B) + f^*(\theta, x\theta^{\nu-1}B) \\ &= f^*(x\theta^\nu, A) + f^*(x\theta^\nu, B). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun die Festsetzung, 4), so beweist man leicht mit Hilfe von Hilfssatz 4:

Hilfssatz 5. *Es gilt*:

$$f^*(A_1 + A_2, B_1 + B_2) = \sum_{i,j=1}^{2} f^*(A_i, B_j).$$

Wenn also beide folgenden Tatsachen α) und β) über f^* bewiesen werden, so wird f^* sicher ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, welcher eine Fortsetzung von f ist:

α) $\quad f^*(A, B) = f^*(B, A).$

β) $\quad Af^*(B, C) + f^*(A, BC) = f^*(AB, C) + Cf^*(A, B).$

Zum Beweis der letzten Tatsachen gehen wir schrittweise vor.

Hilfssatz 6. *Es gelten*:

(1) $\quad f^*(x\theta, A) = f^*(x, \theta A) + xf^*(\theta, A).$

(2) $\quad f^*(x\theta, A) = f^*(\theta, xA) + \theta f^*(x, A).$

Beweis. Man setze $A=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\theta^i$ und $\theta^n=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\theta^i$. Dann erhält man aus Festsetzung, 2) und Festsetzung, 1)

$$\begin{aligned}f^*(x\theta, A) &= \sum_{i=0}^{n-1}\theta^{i+1}f(x, a_i)+f^*(xa_{n-1}, \theta^n)+xa_{n-1}\mu\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\theta^{i+1}f(x, a_i)+\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(xa_{n-1}, c_i)+xa_{n-1}\mu\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}xf^*(\theta, A) &= x\sum_{i=0}^{n-1}\theta^{i+1}f(1, a_i)+x\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(a_{n-1}, c_i)+xa_{n-1}\mu\\ &= x\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(a_{n-1}, c_i)+xa_{n-1}\mu.\end{aligned}$$

Wegen $\theta A=\sum_{i=0}^{n-2}a_i\theta^{i+1}+a_{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}c_i\theta^i$ gilt offenbar

$$f^*(x, \theta A) = \sum_{i=0}^{n-2}\theta^{i+1}f(x, a_i)+\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(x, a_{n-1}c_i).$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}&f^*(x\theta, A)-f^*(x, \theta A)-xf^*(\theta, A)\\ &= \theta^n f(x, a_{n-1})+\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(xa_{n-1}, c_i)-x\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(a_{n-1}, c_i)\\ &\quad -\sum_{i=0}^{n-1}\theta^i f(x, a_{n-1}c_i)\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\theta^i\{f(xa_{n-1}, c_i)+c_i f(x, a_{n-1})-xf(a_{n-1}, c_i)-f(x, a_{n-1}c_i)\}\\ &= 0,\end{aligned}$$

weil f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ ist. Somit ist die Formel (1) bewiesen.

Nun erhält man

$$\begin{aligned}f^*(\theta, xA) = f^*(\theta, \sum_{i=0}^{n-1}xa_i\theta^i) &= \sum_{i=0}^{n-1}\theta^{i+1}f(1, xa_i)\\ &\quad +f^*(xa_{n-1}, \theta^n)+xa_{n-1}\mu\end{aligned}$$

und

$$\theta f^*(x, A) = \sum_{i=0}^{n-1}\theta^{i+1}f(x, a_i).$$

Hieraus folgt ohne weiteres:

$$f^*(x\theta, A)-f^*(\theta, xA)-\theta f^*(x, A) = 0.$$

Mithin ist die Formel (2) bewiesen.

Hilfssatz 7. *Für* $\nu = 0, 1$ *und für jedes* j *mit* $0 \leqq j \leqq n-1$ *gelten*:

$$f^*(x\theta^\nu, y\theta^j) = f^*(y\theta^j, x\theta^\nu).$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3, iii) gelten einerseits für $\nu = 0, 1$

$$f^*(x\theta^\nu, y\theta^j) = \theta^{j+\nu} f(x, y) + f^*(xy, \theta^{j+\nu}) + xyf^*(\theta^\nu, \theta^j)$$

und anderseits für $j = 0, 1$

$$f^*(y\theta^j, x\theta^\nu) = \theta^{j+\nu} f(x, y) + f^*(xy, \theta^{j+\nu}) + xyf^*(\theta^j, \theta^\nu).$$

Ist hierbei $\mathrm{Min}(\nu, j) = 0$, so ist stets $f^*(\theta^\nu, \theta^j) = f^*(\theta^j, \theta^\nu) = 0$; sonst ist $f^*(\theta^\nu, \theta^j) = f^*(\theta, \theta) = f^*(\theta^j, \theta^\nu)$. Daraus schließt man für $j = 0, 1$:

$$f^*(x\theta^\nu, y\theta^j) = f^*(y\theta^j, x\theta^\nu).$$

Wenn also $j \geqq 2$ ist, so nehmen wir an, daß für jedes h mit $h < j$ stets

$$f^*(x\theta^\nu, y\theta^h) = f^*(y\theta^h, x\theta^\nu)$$

gilt. Nun folgt aus Festsetzung, 3) und Hilfssatz 3, iii):

$$\begin{aligned} f^*(y\theta^j, x\theta^\nu) &= \theta f^*(y\theta^{j-1}, x\theta^\nu) + f^*(\theta, xy\theta^{j+\nu-1}) \\ &= \theta f^*(x\theta^\nu, y\theta^{j-1}) + f^*(\theta, xy\theta^{j+\nu-1}) \\ &= \theta[\theta^{j+\nu-1} f(x, y) + f^*(xy, \theta^{j+\nu-1}) + xyf^*(\theta^\nu, \theta^{j-1})] \\ &\qquad + \theta^{j+\nu} f(1, xy) + f^*(xy, \theta^{j+\nu}) + xyf^*(\theta, \theta^{j+\nu-1}); \end{aligned}$$

da wegen $j + \nu - 1 \leqq n-1$ stets $f^*(xy, \theta^{j+\nu-1}) = f^*(\theta^\nu, \theta^{j-1}) = 0$ sind, so erhält man sofort:

$$\begin{aligned} f^*(y\theta^j, x\theta^\nu) &= \theta^{j+\nu} f(x, y) + f^*(xy, \theta^{j+\nu}) + xyf^*(\theta^\nu, \theta^j) \\ &= f^*(x\theta^\nu, y\theta^j). \qquad \text{(nach Hilfssatz 3, iii))} \end{aligned}$$

Zusatz zu Hilfssatz 7. *Für* $\nu = 0, 1$ *gelten*:

$$f^*(x\theta^\nu, A) = f^*(A, x\theta^\nu).$$

Beweis. Setzt man $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \theta^i$, so erhält man nach Zusatz zu Hilfssatz 3:

$$f^*(x\theta^\nu, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(x\theta^\nu, a_i\theta^i);$$

da nach Hilfssatz 7 $f^*(x\theta^\nu, a_i\theta^i) = f^*(a_i\theta^i, x\theta^\nu)$ $(0 \leqq i \leqq n-1)$ ist, so ist $f^*(x\theta^\nu, A) = \sum_{i=0}^{n-1} f^*(a_i\theta^i, x\theta^\nu) = f^*(A, x\theta^\nu)$ (nach Festsetzung, 4)).

Hilfssatz 8. *Unter der Einschränkung* $\mathrm{Max}(i, j) \leqq n-1$ *gilt stets*:

$$f^*(x\theta^i, y\theta^j) = f^*(y\theta^j, x\theta^i).$$

Beweis. Für $i = 0, 1$ oder für $j = 0, 1$ gelten die Gleichungen nach Hilfssatz 7. Dabei können j für $i = 0, 1$ und i für $j = 0, 1$ die Zahlen $0, 1, \cdots\cdots, n-1$ durchlaufen. Ist nun $\mathrm{Min}(i, j) \geqq 2$, so können wir annehmen, daß für jedes h mit $0 \leqq h < i$ und für alle j $(\leqq n-1)$ stets

$$f^*(x\theta^h, y\theta^j) = f^*(y\theta^j, x\theta^h)$$

gelten, und, daß für jedes l mit $0 \leqq l < j$ und alle i $(\leqq n-1)$ stets

$$f^*(x\theta^i, y\theta^l) = f^*(y\theta^l, x\theta^i)$$

gelten. Nun ist

$$\begin{aligned} f^*(x\theta^i, y\theta^j) &= \theta f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^j) + f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}) \\ &\qquad\qquad \text{(nach Festsetzung, 3))} \\ &= \theta f^*(y\theta^j, x\theta^{i-1}) + f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}) \\ &\qquad\qquad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \theta^2 f^*(y\theta^{j-1}, x\theta^{i-1}) + \theta f^*(\theta, xy\theta^{i+j-2}) + f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}) \\ &\qquad\qquad \text{(nach Festsetzung, 3));} \end{aligned}$$

ebenso ist

$$f^*(y\theta^j, x\theta^i) = \theta^2 f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^{j-1}) + \theta f^*(\theta, xy\theta^{i+j-2}) + f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}).$$

Da nach Induktionsannahme $f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^{j-1}) = f^*(y\theta^{j-1}, x\theta^{i-1})$ ist, so gilt

$$f^*(x\theta^i, y\theta^j) = f^*(y\theta^j, x\theta^i).$$

Mit Hilfe von Festsetzung, 4) und von Hilfssatz 8 kann man leicht folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Sind A, B beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$, so gilt stets*:

$$f^*(A, B) = f^*(B, A).$$

Hilfssatz 9. *Für jedes j mit $0 \leqq j \leqq n-1$ und für eine beliebige natürliche Zahl i gilt*:

$$f^*(xy\theta^i, z\theta^j) + z\theta^j f^*(x\theta, y\theta^{i-1}) = x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^j) + f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-1}).$$

Beweis. Setzt man $\theta^{i-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1} t_\nu \theta^\nu$ und $\theta^n = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \theta^\nu$, so ist

$$\theta^i = \sum_{\nu=0}^{n-2} t_\nu \theta^{\nu+1} + t_{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \theta^\nu.$$

Hieraus schließt man für $j = 0$:

$$\begin{aligned} f^*(xy\theta^i, z\theta^j) &= f^*(z, xy\theta^i) \qquad \text{(nach Zusatz zu Hilfssatz 7)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-2} \theta^{\nu+1} f(z, xyt_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^\nu f(z, xyt_{n-1}c_\nu) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} zf^*(x\theta, y\theta^{i-1}) &= z\{\sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^{\nu+1} f(x, yt_\nu) + f^*(xyt_{n-1}, \theta^n)\} \\ &\quad + xyzt_{n-1} f^*(\theta, \theta^{n-1}). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man dabei, daß f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ ist, so gilt für jedes ν mit $0 \leq \nu \leq n-1$:

$$f(z, xyt_{n-1}c_\nu) = f(xyzt_{n-1}, c_\nu) + c_\nu f(z, xyt_{n-1}) - zf(xyt_{n-1}, c_\nu);$$

also ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^\nu f(z, xyt_{n-1}c_\nu) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^\nu f(xyzt_{n-\nu}, c_\nu) + \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \theta^\nu f(z, xyt_{n-1}) \\ &\quad - z\sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^\nu f(xyt_{n-1}, c_\nu) \\ &= f^*(xyzt_{n-1}, \theta^n) + \theta^n f(z, xyt_{n-1}) - zf^*(xyt_{n-1}, \theta^n). \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} f^*(xy\theta^i, z) + zf^*(x\theta, y\theta^{i-1}) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^{\nu+1} f(z, xyt_\nu) + z\sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^{\nu+1} f(x, yt_\nu) \\ &\quad + f^*(xyzt_{n-1}, \theta^n) + xyzt_{n-1} f^*(\theta, \theta^{n-1}). \end{aligned}$$

Nun sind aber für $j = 0$:

$$x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^j) = x\theta f^*(z, y\theta^{i-1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} x\theta^{\nu+1} f(z, yt_\nu)$$

und

$$\begin{aligned} f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-1}) = f^*(x\theta, yz\theta^{i-1}) &= \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^{\nu+1} f(x, yzt_\nu) + f^*(xyzt_{n-1}, \theta^n) \\ &\quad + xyzt_{n-1} f^*(\theta, \theta^{n-1}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$f^*(xy\theta^i, z) + zf^*(x\theta, y\theta^{i-1}) - x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z) - f^*(x\theta, yz\theta^{i-1})$$
$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \theta^{\nu+1}\{f(xyt_\nu, z) + zf(x, yt_\nu) - xf(yt_\nu, z) - f(x, yzt_\nu)\}$$
$$= 0,$$

weil f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ ist.

Wir nehmen also an, daß die Behauptung des Satzes bis $j-1$ richtig ist. Dann ist

$$f^*(xy\theta^i, z\theta^j) = f^*(z\theta^j, xy\theta^i) = \theta f^*(z\theta^{j-1}, xy\theta^i) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j-1}).$$

Da nach Induktionsannahme

$$f^*(z\theta^{j-1}, xy\theta^i) = f^*(xy\theta^i, z\theta^{j-1})$$
$$= x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^{j-1}) + f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-2})$$
$$- z\theta^{j-1}f^*(x\theta, y\theta^{i-1})$$

gilt, so ist

$$f^*(xy\theta^i, z\theta^j) + z\theta^j f^*(x\theta, y\theta^{i-1})$$
$$= x\theta^2 f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^{j-1}) + \theta f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-2}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j-1})$$
$$= x\theta^2 f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^{j-1}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j-1}) + x\theta f^*(\theta, yz\theta^{i+j-2})$$
$$+ \theta f^*(x, yz\theta^{i+j-1}) \qquad \text{(nach Hilfssatz 6, (1))}.$$

Weil nach Festsetzung, 3) $x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^j) = x\theta f^*(z\theta^j, y\theta^{i-1}) = x\theta^2 f^*(z\theta^{j-1}, y\theta^{i-1}) + x\theta f^*(\theta, yz\theta^{i+j-2})$ ist und nach Hilfssatz 6, (2) $f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-1}) = \theta f^*(x, yz\theta^{i+j-1}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j-1})$ ist, so gilt:

$$x\theta f^*(y\theta^{i-1}, z\theta^j) + f^*(x\theta, yz\theta^{i+j-1})$$
$$= x\theta^2 f^*(z\theta^{j-1}, y\theta^{i-1}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j-1}) + x\theta f^*(\theta, yz\theta^{i+j-2})$$
$$+ \theta f^*(x, yz\theta^{i+j-1});$$

also ist die Behauptung des Satzes für j auch richtig.

Aus Hilfssatz 9 schließt man mit Hilfe von Hilfssatz 4 ohne Schwierigkeit:

Zusatz zu Hilfssatz 9. *Für eine beliebige natürliche Zahl i gilt:*

$$f^*(xy\theta^i, A) + Af^*(x\theta, y\theta^{i-1}) = x\theta f(y\theta^{i-1}, A) + f^*(x\theta, y\theta^{i-1}A).$$

Hilfssatz 10. *Unter der Einschränkung* $\mathrm{Max}(i, j, l) \leqq n-1$ *gilt stets:*

$$x\theta^i f^*(y\theta^j, z\theta^l) + f^*(x\theta^i, yz\theta^{j+l}) = f^*(xy\theta^{i+j}, z\theta^l) + z\theta^l f^*(x\theta^i, y\theta^j).$$

Beweis. 1) $i=j=0$. Dann sind nach Festsetzung, 1):

$$xf^*(y, z\theta^l) + f^*(x, yz\theta^l) = \theta^l\{xf(y, z) + f(x, yz)\}$$

und

$$f^*(xy, z\theta^l) + z\theta^l f(x, y) = \theta^l\{f(xy, z) + zf(x, y)\};$$

weil f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ ist, so ist

$$xf(y, z) + f(x, yz) = f(xy, z) + zf(x, y).$$

Also ist die Behauptung des Satzes für $i=j=0$ richtig.

2) $i=0$ und $1 \leqq j \leqq n-1$. Dann nehmen wir an, daß die Behauptung des Satzes bis $j-1$ richtig ist. Nun gelten:

$$xf^*(y\theta^j, z\theta^l) = x\theta f^*(y\theta^{j-1}, z\theta^l) + xf^*(\theta, yz\theta^{j+l-1})$$

und

$$\begin{aligned} f^*(x, yz\theta^{j+l}) &= f^*(yz\theta^{j+l}, x) \\ &= \theta f^*(yz\theta^{j+l-1}, x) + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}) \\ &\quad - xf^*(\theta, yz\theta^{j+l-1}) \qquad \text{(nach Hilfssatz 9).} \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} &xf^*(y\theta^j, z\theta^l) + f^*(x, yz\theta^{j+l}) \\ &= \theta[xf^*(y\theta^{j-1}, z\theta^l) + f^*(x, yz\theta^{j+l-1})] + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}) \\ &= \theta[f^*(xy\theta^{j-1}, z\theta^l) + z\theta^l f^*(x, y\theta^{j-1})] \\ &\qquad + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}) \qquad \text{(nach Induktionsannahme)} \\ &= \theta f^*(xy\theta^{j-1}, z\theta^l) + z\theta^{j+l} f(x, y) + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}). \end{aligned}$$

Ferner sind

$$\begin{aligned} f^*(xy\theta^j, z\theta^l) &= \theta f^*(xy\theta^{j-1}, z\theta^l) + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}) \\ &\quad - z\theta^l f^*(\theta, xy\theta^{j-1}) \qquad \text{(nach Hilfssatz 9)} \\ &= \theta f^*(xy\theta^{j-1}, z\theta^l) + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}) \end{aligned}$$

und

$$z\theta^l f^*(x, y\theta^j) = z\theta^{j+l} f(x, y);$$

also gilt

$$\begin{aligned} f^*(xy\theta^j, z\theta^l) + z\theta^l f^*(x, y\theta^j) &= \theta f^*(xy\theta^{j-1}, z\theta^l) + z\theta^{j+l} f(x, y) \\ &\quad + f^*(\theta, xyz\theta^{j+l-1}). \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, daß die Behauptung des Satzes für $i=0$ und für $j=0, 1, \cdots\cdots, n-1$ richtig ist.

3) Nun nehmen wir an, daß die Behauptung des Satzes bis $i-1$ richtig ist. Dann erhält man aus Zusatz zu Hilfssatz 9:

$$f^*(x\theta^i, yz\theta^{j+l}) = \theta f^*(x\theta^{i-1}, yz\theta^{j+l}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j+l-1}) - yz\theta^{j+l}f^*(\theta, x\theta^{i-1});$$

also ist

$$x\theta^i f^*(y\theta^j, z\theta^l) + f^*(x\theta^i, yz\theta^{j+l}) = x\theta^i f^*(y\theta^j, z\theta^l) + \theta f^*(x\theta^{i-1}, yz\theta^{j+l}) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j+l-1}).$$

Ferner gilt nach Hilfssatz 9:

$$\begin{aligned} f^*(xy\theta^{i+j}, z\theta^l) + z\theta^l f^*(x\theta^i, y\theta^j) &= \theta f^*(xy\theta^{i+j-1}, z\theta^l) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j+l-1}) - z\theta^l f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}) \\ &\quad + z\theta^{l+1}f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^j) + z\theta^l f^*(\theta, xy\theta^{i+j-1}) - yz\theta^{j+l}f^*(\theta, x\theta^{i-1}) \\ &= \theta f^*(xy\theta^{i+j-1}, z\theta^l) + f^*(\theta, xyz\theta^{i+j+l-1}) + z\theta^{l+1}f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^j). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} x\theta^i f^*(y\theta^j, z\theta^l) &+ f^*(x\theta^i, yz\theta^{j+l}) - f^*(xy\theta^{i+j}, z\theta^l) - z\theta^l f^*(x\theta^i, y\theta^j) \\ &= \theta[x\theta^{i-1}f^*(y\theta^j, z\theta^l) + f^*(x\theta^{i-1}, yz\theta^{j+l}) - f^*(xy\theta^{i+j-1}, z\theta^l) \\ &\quad - z\theta^l f^*(x\theta^{i-1}, y\theta^j)] \\ &= 0 \qquad \text{(nach Induktionsannahme), w.z.b.w.} \end{aligned}$$

Satz 2. *Es gilt:*

$$Af^*(B, C) + f^*(A, BC) = f^*(AB, C) + Cf^*(A, B).$$

Beweis. Setzt man $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$, $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i\theta^i$ und $C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\theta^i$, so bestehen:

$$\begin{aligned} Af^*(B, C) &= \sum_{i,j,l=0}^{n-1} a_i\theta^i f^*(b_j\theta^j, c_l\theta^l), \\ f^*(A, BC) &= \sum_{i,j,l=0}^{n-1} f^*(a_i\theta^i, b_jc_l\theta^{j+l}), \\ f^*(AB, C) &= \sum_{i,j,l=0}^{n-1} f^*(a_ib_j\theta^{i+j}, c_l\theta^l), \\ Cf^*(A, B) &= \sum_{i,j,l=0}^{n-1} c_l\theta^l f^*(a_i\theta^i, b_j\theta^j). \end{aligned}$$

Für ein festgelegtes System (i, j, l) gilt nach Hilfssatz 10:

$$a_i\theta^i f^*(b_j\theta^j, c_l\theta^l) + f^*(a_i\theta^i, b_jc_l\theta^{j+l}) = f^*(a_ib_j\theta^{i+j}, c_l\theta^l) + c_l\theta^l f^*(a_i\theta^i, b_j\theta^j),$$

woraus sofort die Behauptung des Satzes folgt.

Wie bereits bemerkt ist, ist f^* nach Satz 1 und Satz 2 eine Fortsetzung von f auf $\mathfrak{R}$ geworden.

Satz 3. *Ist f ein 2-Cozyklus von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$, so existiert zu einem beliebigen Element μ aus $\mathfrak{M}$ stets genau eine über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierte Fortsetzung f^* von f auf $\mathfrak{R}$ mit $f^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß es höchstens eine über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierte Fortsetzung f^* von f mit $f^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$ gibt. Nun seien f_1^*, f_2^* über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierte Fortsetzungen von f mit $f_1^*(\theta, \theta^{n-1}) = f_2^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$. Bildet man dann den 2-Cozyklus $f^* = f_1^* - f_2^*$, so ist f^* sicher θ-normiert über $\mathfrak{R}_0$; ferner sind $f^*(\theta, \theta^{n-1}) = 0$ und $f^*(x, y) = 0$. Für A beweist man nach 1) und 2) aus Hilfssatz 2 ohne Schwierigkeit:

$$f^*(x, A) = 0 \qquad \text{und} \qquad f^*(x\theta, A) = 0.$$

Berücksichtigt man ferner die Relation 3) aus Hilfssatz 2, so schließt man durch vollständige Induktion:

$$f^*(x\theta^i, A) = 0 \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1).$$

Hieraus ergibt sich:

$$f^*(A, B) = 0;$$

d.h. es ist $f^* = 0$ und infolgedessen $f_1^* = f_2^*$.

Nun sei $\varphi(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots\cdots + c_0$ das Minimalpolynom von θ in $\mathfrak{R}_0$. Dann setzen wir für eine 1-Kette g von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$:

$$\varphi^g(\theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \theta^i g(c_i) \qquad \text{und} \qquad \varphi_g(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} i c_i \theta^{i-1}.$$

Nun gilt folgender

Satz 4. *Es sei g eine 1-Kette von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ mit $g(1) = 0$ und $\varphi(x)$ das Minimalpolynom von θ in $\mathfrak{R}_0$. Dann ist die Lösbarkeit der Gleichung*

$$\varphi_g(\theta)x + \varphi^g(\theta) - \mu = 0 \qquad (\mu \in \mathfrak{M})$$

in $\mathfrak{M}$ notwendig und hinreichend dafür, daß für eine geeignete Fortsetzung g^* von g auf $\mathfrak{R}$ δg^* ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus mit $\delta g^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$ ist.

Beweis. Für eine 1-Kette g^* von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, welche eine Fortsetzung von g ist, sei δg^* über $\mathfrak{R}_0$ θ-normiert und $\delta g^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$. Dann folgen aus $\delta g^*(x, \theta^i) = 0$

$$g^*(x\theta^i) = xg^*(\theta^i) + \theta^i g(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1),$$

und aus $\delta g^*(x\theta, \theta^i) = 0$

$$g^*(\theta^i) = i\theta^{i-1}g^*(\theta) \qquad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1).$$

Hieraus schließt man sofort:

$$g^*(\theta^n) = -g^*(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\theta^i) = -\varphi^g(\theta) - (\sum_{i=1}^{n-1} ic_i\theta^{i-1})g^*(\theta).$$

Wegen der Relation

$$\begin{aligned} \mu = \delta g^*(\theta, \theta^{n-1}) &= \theta g^*(\theta^{n-1}) + \theta^{n-1}g^*(\theta) - g^*(\theta^n) \\ &= n\theta^{n-1}g^*(\theta) + \varphi^g(\theta) + (\sum_{i=0}^{n-1} ic_i\theta^{i-1})g^*(\theta) \\ &= \varphi^g(\theta) + \varphi_g(\theta)g^*(\theta) \end{aligned}$$

ist $g^*(\theta)$ eine Lösung der Gleichung $\varphi_g(\theta)x + \varphi^g(\theta) - \mu = 0$.

Umgekehrt sei $\lambda \in \mathfrak{M}$ eine Lösung der Gleichung $\varphi_g(\theta)x + \varphi^g(\theta) - \mu = 0$. Dann setzen wir:

i) $g^*(x) = g(x)$, ii) $g^*(\theta) = \lambda$, iii) $g^*(\theta^i) = i\theta^{i-1}g^*(\theta)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1)$, iv) $g^*(x\theta^i) = \theta^i g(x) + xg^*(\theta^i)$.

Setzt man für ein beliebiges Element $A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\theta^i$

$$g^*(A) = \sum_{i=0}^{n-1} g^*(a_i\theta^i),$$

so verifiziert man leicht, daß g^* eine 1-Kette von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ ist, die eine Fortsetzung von g ist. Aus iii) folgen $\delta g^*(\theta, \theta^i) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2)$ und aus iv) $\delta g^*(x, \theta^i) = 0$ $(i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1)$. Ferner folgt aus $\varphi_g(\theta)g^*(\theta) + \varphi^g(\theta) - \mu = 0$:

$$\delta g^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu.$$

Daher ist δg^* ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus mit $\delta g^*(\theta, \theta^{n-1}) = \mu$.

Ein 1-Cozyklus von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$ heißt eine *Derivation*. Ist nun D eine Derivation von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, so gilt stets:

$$\delta D(A, B) = 0.$$

Nun kann man mit Hilfe von Satz 4 folgenden Satz beweisen:

Satz 5. *Eine Derivation D von $\mathfrak{R}_0$ über $\mathfrak{M}$ besitzt dann und nur dann eine Fortsetzung auf $\mathfrak{R}$, wenn die Gleichung $\varphi_D(\theta)x + \varphi^D(\theta) = 0$ in $\mathfrak{M}$ lösbar ist.*[1]

1) Y. Kawada, a. a. O., S. 303 - 304.

Beweis. Da $\delta D(1, 1) = 0$ ist, so ist $D(1) = 0$. Nun sei D^* eine Fortsetzung von D auf $\mathfrak{R}$. Dann sind für ein beliebiges Element x aus $\mathfrak{R}_0$

$$\delta D^*(x, \theta^i) = 0$$

und

$$\delta D^*(x\theta, \theta^i) = 0$$

wo $i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$ sind. δD^* ist also ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus mit $\delta D^*(\theta, \theta^{n-1}) = 0$. Nach Satz 4 muß also die Gleichung

$$\varphi_D(\theta)x + \varphi^D(\theta) = 0$$

in $\mathfrak{M}$ lösbar sein.

Umgekehrt sei die Gleichung $\varphi_D(\theta)x + \varphi^D(\theta) = 0$ in $\mathfrak{M}$ lösbar. Zu einer beliebigen Lösung λ der Gleichung existiert dann nach Satz 4 eine Fortsetzung D^* von D auf $\mathfrak{R}$ mit $D^*(\theta) = \lambda$ derart, daß δD^* ein über $\mathfrak{R}_0$ θ-normierter 2-Cozyklus mit $\delta D^*(\theta, \theta^{n-1}) = 0$. Nach Hilfssatz 2 kann man leicht beweisen, daß für $i = 0, 1, \cdots\cdots, n-1$ $\delta D^*(x\theta^i, B) = 0$ sind und infolgedessen stets $\delta D^*(A, B) = 0$ gilt; d.h. D^* ist eine Derivation von $\mathfrak{R}$ über $\mathfrak{M}$, welche eine Fortsetzung von D ist.

Department of Mathematics,
Okayama University

(*Received June 30, 1954*)