CHARAKTERISIERUNG DER NICHT-ARCHIMEDISCHEN BEWERTUNGEN DURCH GRÖSSENORDNUNGEN

MIKAO MORIYA

§1. Eine multiplikative Halbgruppe Σ mit dem Nullelement 0 heißt *linear geordnet*, wenn in Σ eine lineare Ordnung $\leq$ mit den folgenden Eigenschaften definiert ist:

i) Für beliebige Elemente α, β aus Σ gilt $\alpha \leq \beta$ oder $\beta \leq \alpha$.

ii) Aus $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$ folgt $\alpha = \beta$.

iii) Aus $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \gamma$ folgt $\alpha \leq \gamma$.

iv) Für das Nullelement und ein beliebiges Element α aus Σ gilt stets:

$$0 \leq \alpha.$$

v) Aus $\alpha \leq \beta$ folgen stets

$$\alpha\gamma \leq \beta\gamma \qquad \text{und} \qquad \gamma\alpha \leq \gamma\beta,$$

wo γ ein beliebiges Element aus Σ bezeichnet.

Es liege nun ein (Schief-) Körper K vor. Dann heißt eine eindeutige Abbildung $|\ |$ von K in Σ eine nicht-archimedische Bewertung von K, wenn die folgenden Bewertungspostulate erfüllt sind:

α) $|x| = 0$ (Nullelement aus Σ) $\leftrightarrow$ $x = 0$ (Nullelement aus K).

β) $|xy| = |x||y|$.

γ) $|x + y| \leq \mathrm{Max}(|x|, |y|)$.

Nun wollen wir in K durch die obige Bewertung eine Größenordnung „$<$" einführen, indem wir $x < y$ (wir schreiben auch $y > x$) setzen, wenn $|x| \leq |y|$ ist. Die auf obige Weise definierte Ordnung wollen wir einfach eine *durch die Bewertung* $|\ |$ *bestimmte Größenordnung* von K nennen. Ist $x < y$, so sagen wir auch wie üblich, daß x kleiner ist als y. Aus den Bewertungspostulaten schließt man ohne Schwierigkeit die folgenden:

1) Die Ordnungsrelation $<$ ist linear; d.h. für beliebige Elemente x, y aus K gilt mindestens eine Relation von $x < y$ und $y < x$.

2) Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$ (Transitivitätsgesetz).

3) Ist $x < y$, so gelten für ein beliebiges Element z aus K: $zx < zy$ und $xz < yz$.

4) Für eine beliebige natürliche Zahl n gilt stets:

$$n < 1^{1)}.$$

Ein Element u aus K heißt hinsichtlich eines Elementes a aus K *unendlich klein*, wenn alle Vielfachen von u kleiner sind als a aber a niemals kleiner ist als ein Vielfaches von u.

5) Das Nullelement aus K ist stets unendlich klein hinsichtlich eines beliebigen, von Null verschiedenen Elementes aus K.

6) Die Gesamtheit aller hinsichtlich 1 unendlich kleinen Elemente aus K bildet eine additive Halbgruppe.

§2. Es sei K ein (Schief-) Körper mit einer Größenordnung $<$, welche den folgenden Postulaten genügt:

0_1. Die Ordnung $<$ ist linear.

0_2. Die Ordnung $<$ genügt dem Transitivitätsgesetz.

0_3. Ist $x < y$, so gelten für ein beliebiges Element z aus K: $zx < zy$ und $xz < yz$.

0_4. Für eine beliebige natürliche Zahl n gilt

$$n < 1.$$

0_5. Die Gesamtheit N aller, in bezug auf das Einselement 1, unendlich kleinen Elemente aus K bildet eine nicht-leere, additive Halbgruppe.

In diesem Paragraphen lassen wir *vorläufig das Axiom* 0_4 *außer Betracht*, und mit Hilfe der übrigen Axiome wollen wir zeigen, daß in K eine nicht-archimedische Bewertung $|\ |$ so eingeführt werden kann, daß aus $x < y$ stets $|x| \leq |y|$ folgt.

Hilfssatz 1. *Für ein beliebiges Element x aus K gilt stets:*

$$x < -x \quad \textit{und} \quad -x < x.$$

Beweis. Da die Relation $<$ linear ist, so ist $x < -x$ oder $-x < x$. Ist $x < -x$, so folgt aus 0_3:

$$-x = (-1)x < (-1)(-x) = x.$$

Ebenso folgt aus $-x < x$ die Relation $x < -x$, w.z.b.w.

Hilfssatz 2. *Die Halbgruppe N ist eine additive Gruppe und bleibt invariant bei Anwendung jedes inneren Automorphismus von K.*

1) Wir identifizieren das n-Fache des Einselementes 1 aus K mit n.

Beweis. Ist $u \in N$, so ist auch $-u \in N$. Denn wäre für eine natürliche Zahl m $m(-u) = -(mu) > 1$, so würde nach Hilfssatz 1 und 0_2

$$mu > -(mu) > 1$$

sein, was aber ein Widerspruch ist. Daher gilt:

$$-N \subseteqq N.$$

Da N eine additive Halbgruppe ist, so bildet N sicher eine additive Gruppe.

Für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element x aus K und für ein Element u aus N wäre nun $m(x^{-1}ux) > 1$, wo m eine natürliche Zahl bezeichnet. Nach 0_3 gälte dann:

$$mu = x(m(x^{-1}ux))x^{-1} > xx^{-1} = 1,$$

also wäre u kein Element aus N. Es muß also $x^{-1}ux \in N$ sein; d.h. es ist $x^{-1}Nx \subseteqq N$. Hieraus schließt man sofort $N = x^{-1}Nx$, w.z.b.w.

Bemerkung 1. Da N eine additive Gruppe ist, so gehört 0 zu N, also ist 0 unendlich klein in bezug auf 1.

Bemerkung 2. Ist $u \in N$, so gehört ein Element u' mit $u' < u$ stets zu N.

Beweis. Wäre für eine natürliche Zahl m $1 < mu'$, so würde nach 0_3 und 0_2 $1 < mu' = m \cdot u' < m \cdot u = mu$ sein, was aber unmöglich ist.

Wir definieren nun eine Teilmenge N_∞ von K auf folgende Weise: Ein Element t aus K gehört dann und nur dann zu N_∞, wenn t^{-1} zu N gehört. Die Menge N_∞ ist offenbar dann und nur dann leer, wenn N nur aus dem Nullelement besteht. Berücksichtigt man ferner die Gleichung $x^{-1}Nx \subseteqq N (x \neq 0)$, so schließt man leicht, daß auch $x^{-1}N_\infty x = N_\infty$ ist.

Hilfssatz 3. *Ein Element x aus K gehört dann und nur dann nicht zu N_∞, wenn es eine natürliche Zahl n mit $n > x$ gibt.*

Beweis. Ist $t \in N_\infty$, so ist nach Definition $t^{-1} \in N$. Also gilt für jede natürliche Zahl m:

$$mt^{-1} \not> 1;$$

hieraus folgt, daß für jede natürliche Zahl m $m \not> t$ gilt. Wenn also für eine natürliche Zahl n $n > x$ gilt, so ist x sicher kein Element aus N_∞.

Nun sei $x \notin N_\infty$. Ist dann $x = 0$, so ist $0 < 1$, weil $0 \in N$ ist. Ist aber $x \neq 0$, so ist nach Definition $x^{-1} \notin N$. Daher gilt für eine geeignete natürliche Zahl n:

$$nx^{-1} > 1,$$

woraus nach O_3 $x < n$ folgt.

Hilfssatz 4. *Es ist* $1 \notin N$.

Beweis. Da $<$ linear ist, so gilt $1 < 1$; dies bedeutet aber, daß 1 kein Element aus N ist.

Hilfssatz 5. *Ist* $x \notin N_\infty$, *so gelten stets*:

$$Nx \leqq N \qquad \textit{und} \qquad xN \leqq N.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3 existiert eine natürliche Zahl n mit $x < n$. Ist also u ein beliebiges Element aus N, so gilt nach O_3:

$$ux < un = nu = \underbrace{u + \cdots\cdots + u}_{n};$$

weil N eine additive Halbgruppe ist, so ist $un = nu \in N$. Nach Bemerkung 2 gehört ux zu N; d.h. es ist $Nx \leqq N$. Ebenso beweist man leicht $xN \leqq N$.

Hilfssatz 6. *Ist* $u \in N$, *so ist* $u^{-1} \notin N$.

Beweis. Für $u = 0$ ist die Behauptung trivial. Für $u \neq 0$ sei $u^{-1} \in N$. Dann gilt $u^{-1} < 1$ und infolgedessen

$$1 = uu^{-1} < u$$

nach O_3, was aber ein Widerspruch ist.

Aus Hilfssatz 6 folgt sofort

Hilfssatz 7. *N und N_∞ haben kein Element gemeinsam.*

Satz 1. *Das Komplement R von N_∞ in K bildet einen Ring.*

Beweis. Es seien x, y beliebige Element aus R.

i) Dann wollen wir zeigen, daß $x \pm y$ auch zu R gehören. Dazu können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $xy \neq 0$ ist. Wäre nun $x + y \notin R$, so wäre

$$x + y \in N_\infty;$$

d.h. $(x + y)^{-1}$ wäre ein Element aus N. Da x, y nicht zu N_∞ gehören, so würden nach Hilfssatz 5

$$(x+y)^{-1}x \in N \qquad \text{und} \qquad (x+y)^{-1}y \in N$$

sein; also gälte:

$$1 = (x+y)^{-1}(x+y) \in N,$$

was mit Hilfssatz 4 im Widerspruch steht. Es muß also $x + y \in R$ sein. Ebenso beweist man, daß $x - y \in R$ ist.

ii) Wäre $xy \notin R$, so wäre $(xy)^{-1} \in N$. Wegen $x \notin N_\infty$ folgte aus Hilfssatz 5:

$$y^{-1} = (xy)^{-1}x \in N;$$

d.h. es wäre $y \in N_\infty$, was aber unmöglich ist.

Bemerkung 3. N ist als Links- und Rechtsideal aus R maximal.

Beweis. Nach Hilfssatz 2 und 5 ist N sicher ein zweiseitiges Ideal aus R. Nun sei N_1 ein echtes Rechtsoberideal von N aus R. Dann existiert ein Element x_1 aus N_1 mit $x_1 \notin N$. Also existiert x_1^{-1} aus K, und es ist $x_1^{-1} \notin N_\infty$; d.h. x_1^{-1} ist Element aus R. Da N_1 ein Rechtsideal aus R ist, so ist

$$1 \in N_1 x_1^{-1} \subseteqq N_1,$$

woraus $N_1 = R$ folgt, w.z.b.w.

Ebenso beweist man, daß N ein maximales Linksideal aus R ist.

Bemerkung 4. Der Restklassenring R/N ist ein Körper.

Beweis. Es genügt nur zu zeigen, daß jedes von Null verschiedene Element $\bar{x}$ aus R/N das inverse Element besitzt. Ist x ein Element aus $\bar{x}$, so ist nach Bemerkung 3 $(xR, N) = R$. Also gilt für ein Element r aus R die Kongruenz:

$$xr \equiv 1 \quad \text{mod } N,$$

weil $1 \in R$ ist. Die r enthaltende Restklasse nach N ist offenbar das rechtsinverse Element von $\bar{x}$. Ebenso beweist man, daß das linksinverse Element von $\bar{x}$ existiert. Ferner bestätigt man leicht, daß das rechtsinverse Element von $\bar{x}$ mit dem linksinversen übereinstimmt.

Wir bezeichnen nun mit E das Komplement der Vereinigung $N \cup N_\infty$ von N und N_∞ in K. Nach Definition ist für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element x aus K $x^{-1}Ex = E$, weil $x^{-1}Nx = N$, und $x^{-1}N_\infty x = N_\infty$ sind. Ferner ist E das Komplement von N in R.

Hilfssatz 8. *E ist eine multiplikative Gruppe und ein Normalteiler* *der multiplikativen Gruppe K^* aller von Null verschiedenen Elemente aus K.*

Beweis. Ist $\varepsilon \in E$, so ist ε nach Definition kein Element aus $N \cup N_\infty$, also ist es auch ε^{-1}; d.h. es ist $E^{-1} \subseteqq E$. Wegen $E = (E^{-1})^{-1} \subseteqq E^{-1}$ muß $E^{-1} = E$ sein.

Nun seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ beliebige Elemente aus E. Wäre dan $\varepsilon_1\varepsilon_2 \notin E$, so müßte $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in N$ sein, weil $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in R$ ist. Da ersichtlich $\varepsilon_1^{-1} \notin N_\infty$ ist, so folgte aus Hilfssatz 5:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1^{-1}(\varepsilon_1\varepsilon_2) \in N,$$

was aber ein Widerspruch ist. Daher muß $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in E$ sein. Mithin ist gezeigt, daß E eine multiplikative Gruppe bildet.

Da für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element x aus K stets $x^{-1}Ex = E$ ist, so ist E ein Normalteiler von K^*.

Da K eine multiplikative Halbgruppe und E ein Normalteiler von K^* ist, so kann man K in die Klassen nach E einteilen. Wenn man dabei das Produkt von zwei Klassen nach E wie üblich in der Gruppentheorie definiert, so bildet die Gesamtheit Σ aller Klassen von K nach E eine multiplikative Halbgruppe. Offenbar besteht Σ aus der Faktorgruppe K^*/E und der Nullklasse nach E, welche nur das Nullelement aus K enthält. Wir können also ohne Mißverständnis die Nullklasse von Σ mit 0 bezeichnen.

Nun wollen wir in Σ durch die folgende Festsetzung die Größenordnung „$\geq$" einführen:

a) Es ist $0 \geq 0$.

b) Ist eines von den α und β aus Σ von Null verschieden und sind a, b bzw. Elemente aus α, β, so setzen wir

$$\alpha \leq \beta,$$

wenn ab^{-1} existiert und zu R gehört[1]. Die Größenordnung $\alpha \leq \beta$ ist unabhängig von der Wahl der Elemente a bzw. b aus α bzw. β. Es seien nämlich a', b' bzw. Elemente aus α, β. Dann existieren Elemente $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ aus E, so daß $a' = a\varepsilon_1$ und $b' = b\varepsilon_2$ sind. Ist nun $ab^{-1} \in R$, so ist

$$a'b'^{-1} = a\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}b^{-1};$$

1) Hierzu vgl. R. Baer, Über nicht-archimedisch geordnete Körper, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wissenschft., 8. Abhand. (1928), S. 1 - 13.

weil $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1} \in E$ und E Normalteiler von K^* ist, so existiert ein ε aus E mit $\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}b^{-1} = b^{-1}\varepsilon$, also ist $a'b'^{-1} = ab^{-1}\varepsilon \in R$, w.z.b.w.

Durch die obige Festsetzung gilt für beliebige Elemente α, β aus Σ mindestens eine Relation von $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$. Denn für $\alpha = \beta = 0$ ist nach Festsetzung a): $\alpha \leq \beta$. Ist aber eines von α und β von Null verschieden, so existiert sicher ab^{-1} oder ba^{-1}, wo a, b bzw. Elemente aus α, β sind. Wenn ab^{-1} existiert und nicht zu R gehört, so ist $ab^{-1} \in N_\infty$, also ist

$$ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in N \leqq R;$$

d.h. es ist $\beta \leq \alpha$. Im Falle, wo ab^{-1} existiert, besteht also mindestens eine Relation von $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$. Ebenso beweist man leicht, daß im Falle, wo ba^{-1} existiert, auch $\alpha \leq \beta$ oder $\beta \leq \alpha$ besteht. Aus Definition folgt ferner:

Für ein beliebiges, von Null verschiedenes Element α aus Σ gilt niemals $\alpha \leq 0$.

Satz 2. *Für die Ordnungsrelation $\leq$ in Σ gelten:*

i) *Aus $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$ folgt $\alpha \leq \beta$.*

ii) *Aus $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \gamma$ folgt $\alpha \leq \gamma$.*

iii) *Ist $\alpha \leq \beta$, so gelten für ein beliebiges γ aus Σ:*

$$\alpha\gamma \leq \beta\gamma \qquad \textit{und} \qquad \gamma\alpha \leq \gamma\beta.$$

Beweis. Es sei a bzw. b Element aus α bzw. β.

i) Ist $\alpha = 0$, so muß wegen $\beta \leq \alpha$ auch $\beta = 0$ sein. Ist aber $\alpha \neq 0$, so ist auch $\beta \neq 0$. Weil $\alpha \leq \beta$ und $\beta \leq \alpha$ sind, so müssen nach Definition ab^{-1} und $ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1}$ gleichzeitig zu R gehören, also ist ab^{-1} ein Element aus E; d.h. es ist $\alpha = \beta$.

ii) Da für $\alpha = 0$ stets $\alpha \leq \gamma$ gilt, so nehmen wir an, daß $\alpha \neq 0$ ist. Dann folgt aus $\alpha \leq \beta$ $\beta \neq 0$ und infolgedessen auch $\gamma \neq 0$. Es sei c ein Element aus γ. Dann sind nach Voraussetzung

$$ab^{-1} \in R \qquad \text{und} \qquad bc^{-1} \in R,$$

also ist $ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in R$; d.h. es gilt: $\alpha \leq \gamma$.

iii) Für $\gamma = 0$ oder $\beta = 0$ ist die Behauptung trivial, weil dabei $\alpha\gamma(\gamma\alpha)$ und $\gamma\beta(\gamma\beta)$ beide Null sind. Wir nehmen also $\beta \neq 0$ und $\gamma \neq 0$ an. Dann ist wegen $\alpha \leq \beta$ $ab^{-1} \in R$. Ist also c ein Element aus γ, so ist $(ac)(bc)^{-1} = ab^{-1} \in R$; d.h. es ist $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$. Berücksichtigt man nun, daß cRc^{-1} das Komplement von $cN_\infty c^{-1} = N_\infty$ in K ist, so ist

$cRc^{-1} = R$. Aus $(ca)(cb)^{-1} = c(ab^{-1})c^{-1} \in cRc^{-1} = R$ folgt sofort:

$$\gamma\alpha \leq \gamma\beta.$$

Wir ordnen jetzt einem Element x aus K die x enthaltende Klasse $|x|$ aus Σ zu. Dann gibt $|x|$, wie im folgenden Satz 3 bestätigt wird, eine Bewertung von K an.

Satz 3. 1) *Dann und nur dann ist* $|x| = 0$, *wenn* $x = 0$ *ist.*
2) *Es gilt*:

$$|xy| = |x||y|.$$

3) *Es gilt*:

$$|x + y| \leq \mathrm{Max}(|x|, |y|).$$

Beweis. 1) und 2) folgen sofort aus Definition.

3) Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $|x| \leq |y|$ annehmen. Ist dann $y = 0$, so muß auch $x = 0$ sein. Für $x = y = 0$ gilt sicher:

$$|x + y| \leq \mathrm{Max}(|x|, |y|).$$

Ist aber $y \neq 0$, so folgt aus $|x| \leq |y|$:

$$xy^{-1} \in R.$$

Also ist $(x + y)y^{-1} = xy^{-1} + 1 \in R$, woraus nach Definition $|x + y| \leq |y| = \mathrm{Max}(|x|, |y|)$ folgt.

Satz 4. *Gilt für Elemente* x, y *aus* K $x < y$, *so ist*

$$|x| \leq |y|.$$

Beweis. Zunächst sei $y = 0$. Dann muß auch $x = 0$ sein. Denn sonst würde nach 0_3

$$1 < x^{-1}0 = 0 \in N$$

sein, was nach Hilfssatz 4 unmöglich ist. Für $x = y = 0$ gilt sicher:

$$|x| \leq |y|.$$

Nun sei $y \neq 0$. Dann folgt aus $x < y$

$$xy^{-1} < 1 \in R;$$

d.h. es ist $|x| \leq |y|$.

Bemerkung 5. Es kann der Fall auftreten, wo N nur aus dem Nullelement besteht. Dann ist N_∞ die leere Menge, und E stimmt mit K^* überein. Daher enthält Σ nur das Null- und Einselement; d.h. die Bewertung $|\ |$ von K ist dabei trivial.

Bemerkung 6. Wenn man für die geordnete Gruppe K^*/E das *archimedische Axiom* voraussetzt, so kann Σ als eine multiplikative Halbgruppe der reellen Zahlen angenommen werden.

§3. In diesem Paragraphen ziehen wir erst das Axiom 0_4 in Betracht. Dann gilt

Hilfssatz 9. *Unter den Axiomen 0_1—0_5 ist dann und nur dann $x \in R$, wenn $x < 1$ ist. Ferner gilt für ein beliebiges Element ε aus $E: 1 < \varepsilon < 1$.*

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist dann und nur dann $x \in R$, wenn für eine geeignete natürliche Zahl m $x < m$ gilt. Da nach 0_4 $m < 1$ ist, so ist $x < m < 1$.

Für ein ε aus E gilt nach dem eben Bewiesenen:

$$\varepsilon < 1.$$

Da $\varepsilon^{-1} \in E$ ist, so gilt auch $\varepsilon^{-1} < 1$; d.h. es ist $1 < \varepsilon$. Daher gilt: $1 < \varepsilon < 1$.

Satz 5. *Unter den Axiomen 0_1—0_5 ist die ursprüngliche Ordnung $<$ eine Ordnung von K, welche durch die in §2 definierte Bewertung bestimmt ist.*

Beweis. Es genügt nur zu beweisen, daß dann und nur dann $x < y$ ist, wenn $|x| \leq |y|$ ist, wo x, y Elemente aus K bezeichnen. Da nach Satz 4 aus $x < y$ stets $|x| \leq |y|$ folgt, so braucht man nur zu zeigen, daß aus $|x| \leq |y|$ $x < y$ folgt. Ist zunächst $y = 0$, so ist wegen $|x| \leq |y|$ $|x| = 0$, woraus $x = 0$ folgt. Also gilt sicher: $x < y$. Wenn $y \neq 0$ ist, so ist wegen $|x| \leq |y|$ $xy^{-1} \in R$. Da nach Hilfssatz 9 $xy^{-1} < 1$ ist, so schließt man nach 0_3:

$$x = (xy^{-1})y < y.$$

Bemerkung 7. Geht man zuerst aus einer nicht-archimedischen Bewertung $|\ |_1$ von K aus und dann bestimmt eine lineare Ordnung $<$ wie in §1, so genügt die Ordnung $<$ den Axiomen 0_1—0_5 aus §2. Man kann daher wie in §2 durch $<$ eine nicht-archimedische Bewertung $|\ |_2$ von K definieren. Dabei sind ersichtlich:

$$|x|_1 \leq |y|_1 \leftrightarrow x < y \quad \text{und} \quad x < y \rightarrow |x|_2 \leq |y|_2 .$$

Hieraus folgt:

$$|x|_1 \leq |y|_1 \leftrightarrow |x|_2 \leq |y|_2 ;$$

d.h. die Bewertung $|\ |_1$ und $|\ |_2$ von K sind *analytisch isomorph.*

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(*Received July 20, 1953*)