QUELQUES GÉNÉRALISATIONS DES THÉORÈMES CONCERNANT AUX PRODUITS DIRECTS DES ESPACES LINÉAIRES LOCALEMENT CONVEXES

ICHIRO AMEMIYA

tiré des lettres à
O. TAKENOUCHI

Les deux théorèmes, qui sont établis dans "Sur les espaces linéaires localement convexes" par O. Takenouchi (qui a paru dans ce même Journal, tom. 2, n °1, pp. 57 - 84), et qui insistent que le produit direct des espaces de chacune de deux espèces c.-à-d. "bornologique" et "tonnelé" est encore l'un de la même espèce, sont vrais sous les conditions moins restrictives. À savoir,

Concernant au théorème 14: La restriction d'être complet n'est pas nécessaire.

Concernant au théorème 15: La puissance d'ensemble des composants du produit peut être tenue encore plus grand.

§1. Cas des espaces tonnelés.

Théorème. *Le produit direct des espaces tonnelés est encore un espace tonnelé.*

Démonstration. Soient $E_\xi (\xi \in \Xi)$ les espaces tonnelés, et posons $E = \mathrm{P}_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Soit U un tonneau qui n'est pas identique avec E lui-même.

Nous allons montrer qu'un sous-espace $\bar{E}_H$, qui consiste à tous les éléments de E dont les ξ-composants sont tous nuls pour $\xi \notin H$, et où le complémentaire H' de H dans Ξ est un ensemble fini, est contenu dans U. Nous avançons par absurde. Supposons qu'il n'existe aucun tel sous-espace $\bar{E}_H$. Alors nous pourrions construire une telle suite d'éléments $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots$ et une telle suite des ensemble d'indices $H_1, H_2, \cdots\cdots \subset \Xi$ ayant le complémentaire fini que

$$H_1 \supset H_2 \supset \cdots\cdots,$$

$$x_\xi^{(n)} = x_\xi^{(n+1)} \quad (\xi \notin H_n),$$

$$\text{où} \quad x^{(n)} = (x_\xi^{(n)};\ \xi \in \Xi), \quad x^{(n+1)} = (x_\xi^{(n+1)};\ \xi \in \Xi),$$

$$nU \cap (x^{(n)} + \bar{E}_{H_n}) = \phi.$$

Pour $n = 1$, nous prenons un $x^{(1)} \notin U$, et soient $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots, x^{(n-1)}$; $H_1, H_2, \cdots\cdots, H_{n-1}$ déjà déterminés. Alors,

$$nU \not\ni x^{(n-1)} + \bar{E}_{H_{n-1}}.$$

Car, s'il n'en était pas ainsi, $x^{(n-1)} \in nU$ et $\bar{E}_{H_{n-1}} \subset -x^{(n-1)} + nU \subset 2nU$. Comme $\bar{E}_{H_{n-1}}$ était un sous-espace linéaires, il s'en suivrait que $\bar{E}_{H_{n-1}} \subset U$, qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, un élément $x^{(n)}$ satisfaisant aux

$$x^{(n)} \notin nU, \quad x^{(n)} \in x^{(n-1)} + \bar{E}_{H_{n-1}}$$

peut se choisir. Maintenant, si, pour l'élément $x^{(n)}$ ainsi déterminé, tout ensemble de la forme $x^{(n)} + \bar{E}_H$ où H' est fini avait une intersection non-vide avec nU, un voisinage arbitraire de $x^{(n)}$ dans E aurait toujours une intersection avec nU qui s'oppose à $x^{(n)} \notin nU$ (parce que nU est fermé). Par suite, un $H \subset \Xi$ avec H' fini existe et

$$nU \cap (x^{(n)} + \bar{E}_H) = \phi.$$

Posons $H_n = H_{n-1} \cap H$, alors

$$nU \cap (x^{(n)} + \bar{E}_{H_n}) = \phi,$$
$$H_{n-1} \supset H_n,$$

et l'induction est ainsi continuée. Soit

$$H = \cap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Nous construisons un élément $x^{(0)}$ comme suit. Le ξ-composant, de $x^{(0)}$ soit 0 pour $\xi \in H$, et si $\xi \notin H$, posons $x^{(0)} = x_\xi^{(n)}$ pour un n assujetti à $H_n \not\ni \xi$. Alors $x^{(0)}$ sera complètement déterminé. Cet $x^{(0)}$ ne serait contenu dans aucun multiple de U, car $x^{(0)} \in x^{(n)} + \bar{E}_{H_n}$ pour tout $n = 1, 2, \cdots\cdots$ et $x^{(n)} + \bar{E}_{H_n}$ n'a pas de l'intersection avec nU. L'existence d'un tel élément est absurde comme un tonneau doit engendrer le tout d'espace.

Par conséquent, U contient un sous-espace $\bar{E}_H$ où H' est fini. Le sous-espace $\bar{E}_{H'}$ est linéairement et topologiquement isomorphique avec l'espace

$$E_{\xi_1} \times E_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times E_{\xi_\kappa} \qquad (\text{où } \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_\kappa\} = H'),$$

et l'ensemble $U \cap \bar{E}_{H'}$ correspond à un tonneau de cet espace. Or $E_{\xi_1} \times E_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times E_{\xi_\kappa}$ étant un espace tonnelé comme le produit direct d'un nombre fini des espaces tonnelés, l'ensemble qui correspond à $U \cap \bar{E}_{H'}$ contient un voisinage $U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa}$ de 0 de cet espace (ici U_{ξ_ι} est un voisinage de 0 dans E_{ξ_ι}). $U \cap \bar{E}_{H'}$ contient alors l'ensemble $U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa} \times \mathrm{P}_{\xi \in H} \{0\}$, et de là suit que

$$U \supset U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa} \times \mathrm{P}_{\xi \in H} E_\xi .$$

Nous avons ainsi démontré que U est un voisinage de 0.

§2. Cas des espaces bornologiques.

Nous disons, avec H. Nakano (voir son article: On transcendental points in proper spaces of discrete semi-ordered linear spaces, Journal of the Faculty of Science, Hokkaido University, Série I, tom. 12 (1953), pp. 104 - 110, spéciellement §1), qu'une puissance (un nombre cardinal) $\aleph$ est régulière si elle est plus petite que la puissance $\overline{\aleph}$ qui a la propriété suivante:

(i) $\overline{\aleph}$ n'est pas dénombrable,

(ii) pour aucun ensemble de la puissance $< \overline{\aleph}$, la puissance de la famille de tous les sous-ensemble de cet ensemble n'atteint pas à $\overline{\aleph}$.

(iii) la réunion d'une puissance $< \overline{\aleph}$ des ensembles de la puissance $< \overline{\aleph}$ a encore une puissance $< \overline{\aleph}$.

(iv) $\overline{\aleph}$ est la plus petite puissance qui a ces propriétés (i), (ii) et (iii).

Alors H. Nakano a énoncé le

Théorème. *Un ultrafiltre d'un ensemble de la puissance régulière est déterminé par un point, si la partie dénombrable de ce filtre a toujours une intersection non-vide.*

Ici on dit qu'un filtre est déterminé par un point, si ce filtre consiste à tous les ensembles contenant ce point.

Ce que nous voulons établir est le suivant

Théorème. *Le produit direct d'une puissance régulière des espaces bornologiques est encore un espace bornologique.*

Démonstration. Soient E_ξ ($\xi \in \Xi$) les espaces bornologiques où nous admettons que la puissance de Ξ est régulière, et posons $E = \mathrm{P}_{\xi \in \Xi} E_\xi$. Soit U un ensemble bornivore qui n'est pas identique avec E lui-même.

Si $H_1, H_2, \cdots\cdots$ est une suite de sous-ensembles de Ξ deux à deux disjoints, et soit $x^{(\nu)} \in \bar{E}_{H_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$). Alors on a toujours $x^{(\nu)} \in U$ sauf un nombre fini, car les éléments $x^{(1)}, 2x^{(2)}, \cdots\cdots, \nu x^{(\nu)}, \cdots\cdots$ constituent un ensemble borné.

Nous posons

$$\mathfrak{F} = \{H\,;\ H \subset \Xi,\ \bar{E}_H \not\subset U\}.$$

Cela ne sera pas toujours un filtre, mais, si $H_1 \in \mathfrak{F}$ et $H_1 \subset H_2$ alors $H_2 \in \mathfrak{F}$, et si $H_1 \cup H_2 \in \mathfrak{F}$ l'un au moins de H_1, H_2 doit être contenu dans $\mathfrak{F}$, et le fait noté ci-dessus signifie qu'il n'existe aucune suite infinie de membres de $\mathfrak{F}$ deux à deux disjoints. De plus, si $\mathfrak{F}$ contient une suite décroissante $H_1, H_2, \cdots\cdots$, alors $\bigcap_{\mu=1}^{\infty} H_\mu \in \mathfrak{F}$. C'est démontré d'une même façon qu'au cas du mémoire cité de Takenouchi. À savoir, admettons que

$$H_1 \supset H_2 \supset \cdots\cdots, \quad H_\mu \in \mathfrak{F} \text{ et } H = \bigcap_{\mu=1}^{\infty} H_\mu \notin \mathfrak{F}.$$

Alors, nous pouvons prendre un $y^{(1)} = (y_\xi^{(1)}\,;\ \xi \in \Xi) \in \bar{E}_{H_1}$ tel que $y^{(1)} \notin U$ et $y_\xi^{(1)} = 0$ $(\xi \in H)$. Soit $y^{(1)} = \frac{1}{2}(y^{(1,1)} + y^{(1,2)})$ où $y^{(1,1)} \in \bar{E}_{H_1 \cap H_2'}$, $y^{(1,2)} \in \bar{E}_{H_2}$. L'un au moins de ces éléments ne doit pas être contenu dans U. Si c'est $y^{(1,1)}$, nous posons $x^{(1)} = y^{(1,1)}$ et prenons de nouveau un $y^{(2)} = (y_\xi^{(2)}\,;\ \xi \in \Xi) \in \bar{E}_{H_2}$ qui satisfait à $y^{(2)} \notin U$ et $y_\xi^{(2)} = 0$ $(\xi \in H)$. Si, au contraire, c'est $y^{(1,2)}$, nous posons $x^{(1)} = y^{(1,2)}$ et $y^{(2)} = y^{(1,2)}$. La même procédé s'applique à $y^{(2)}$ et nous obtenons $x^{(2)}$ et $y^{(3)}$. Continuons ainsi de suite. Les éléments $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots$ ainsi construits sont tous en dehors de U, et, pour un indice fixe, ces éléments ont leurs ξ-composants 0 à un nombre fini près. Il s'ensuit de ce dernier fait que l'ensemble $x^{(1)}, 2x^{(2)}, \cdots\cdots$ est borné. Mais c'est exclu, car alors $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots$ doivent être tous contenus dans U à partir d'un quelque $x^{(\nu)}$.

Maintenant nous proposons qu'il existe un nombre fini d'ensembles $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_{\kappa_0} \subset \Xi$ tel que

$$\bigcup_{\iota=1}^{\kappa_0} Z_\iota = \Xi,$$

et chaque $\mathfrak{F}_{Z_\iota} = \{H\,;\ H \in \mathfrak{F}\}$, $H \subset Z_\iota$ $(\iota = 1, 2, \cdots\cdots, \kappa_0)$ devient ou bien un ensemble vide ou bien un ultrafiltre dans Z_ι. Supposons que, pour $\mathfrak{F}$, la propriété proposée n'a pas lieu. Il est aisé de voir, en premier, que si un ensemble $Z \subset \Xi$ a la propriété donnée ci-dessous, le $\mathfrak{F}_Z$ correspondant est un ultrafiltre dans Z. À savoir, la propriété que, quand on décompose Z en deux parties Z_1 et Z_2 (: $Z_1 \cup Z_2 = Z$, $Z_1 \cap Z_2 = \phi$) il y a toujours lieu que l'une de Z_1 et Z_2 est contenu dans $\mathfrak{F}$ et l'autre ne l'est pas. En notant cela, décomposons Ξ en deux parties. Si, dans ce cas, on obtenait toujours l'une dans $\mathfrak{F}$, l'autre hors de $\mathfrak{F}$, alors $\mathfrak{F}$ lui-même serait un ultrafiltre, et ce n'est pas le cas. Par conséquent, il y aura deux ensembles $Z_{1,\text{II}}$ et $Z_{2,\text{II}}$ de $\mathfrak{F}$ qui n'ont aucun élément commun, et qui ont la réunion Ξ. Pour un au moins de ces ensembles qu'on notera Ξ_1, $\mathfrak{F}_{\Xi_1}$ ne sera pas un ultrafiltre. L'autre, nous l'écrirons Z_1. On décompose ensuite Ξ_1 en deux parties, et la même circonstance aura lieu. On obtiendra ainsi les ensembles Z_2 et Ξ_2 de $\mathfrak{F}$ qui satisfont aux $Z_2 \cup \Xi_2 = \Xi_1$, $Z_2 \cap \Xi_2 = \phi$, et $\mathfrak{F}_{\Xi_2}$ n'est pas un ultrafiltre. En suivant ainsi, une suite illimitée des éléments de $\mathfrak{F}$ deux à deux disjoints $Z_1, Z_2, \cdots\cdots$ sera obtenue, contrairement à ce qui est remarqué plus haut.

Chaque $\mathfrak{F}_{Z_\iota}$ $(\iota = 1, 2, \cdots\cdots, \kappa_0)$ est déterminé, s'il n'est pas vide, par un point ξ_ι. Autrement dit, il existe un nombre fini d'éléments $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_\kappa$ de Ξ ou un sous-ensemble fini de Ξ, dont le complémentaire H n'est pas contenu dans $\mathfrak{F}$, et cela revient à dire que $\bar{E}_{\text{H}} \subset U$. Le sous-espace $\bar{E}_{\text{H}'}$ est linéairement et topologiquement isomorphique avec l'espace

$$E_{\xi_1} \times E_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times E_{\xi_\kappa}$$

et l'ensemble $U \cap \bar{E}_{\text{H}'}$ correspond à un ensemble bornivore de cet espace. Or $E_{\xi_1} \times E_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times E_{\xi_\kappa}$ étant un espace bornologique comme le produit direct d'un nombre fini des espaces bornologiques, l'ensemble qui correspond à $U \cap \bar{E}_{\text{H}'}$ contient un voisinage $U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa}$ de 0 de cet espace (ici U_{ξ_ι} est un voisinage de 0 dans E_{ξ_ι}). $U \cap \bar{E}_{\text{H}'}$ contient alors l'ensemble $U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa} \times \mathrm{P}_{\xi \in \text{H}}\{0\}$ et de là suit que

$$U \supset U_{\xi_1} \times U_{\xi_2} \times \cdots\cdots \times U_{\xi_\kappa} \times \mathrm{P}_{\xi \in \Xi} E_\xi .$$

Nous avons ainsi démontré que U est un voisinage de 0.

Note. Après avoir préparé ce mémoire à publier, j'ai su que MM. W.F. Donoghue et K.T. Smith ont considéré le même problème (voir l'article de ces auteurs: On the symmetry and bounded closure of locally convex spaces, Trans. Amer. Math. Soc., tom. 73 (1952), pp. 321-344, en particuler, §2, théorème 7, p. 337) et ont donné une même réponse que notre dernier théorème en utilisant le théorème de S. Ulam. (Leur résultat contient aussi la proposition inverse.)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
HOKKAIDO UNIVERSITY

(Received February 12, 1953)