

CONTRIBUTION À LA TOPOLOGIE II.

TAKESHI INAGAKI

Introduction.

On croit en général que la théorie topologique dans un espace se développe en relation avec la propriété topologique de l'espace considéré. Cependant, si l'on envisage les notions utilisées pour établir la théorie, on voit sans peine qu'il y a deux espèces de notions, c.-à-d. que les unes sont en relations intimes avec la topologie de l'espace et les autres, presque indépendantes de la topologie de l'espace. Par exemple, la notion d'un ensemble fermé est bien définie en relation intime avec la topologie de l'espace considéré et la notion de l'ensemble mesurable $\mathfrak{B}$ se rapporte certainement à la puissance $\aleph_0$, mais il sera plus naturel de dire qu'elle est presque indépendante de la topologie de l'espace.

Pour mettre en lumière ce que nous avons rapporté plus haut, nous montrons un exemple. Si l'on regard l'ensemble dit *homogenen Normaltypus* η_ξ ¹⁾ comme un espace dans lequel, comme toujours, les voisinages d'un point x sont d'intervalles ouverts contenant le point x , alors, comme on le voit sans peine, la somme de nombre dénombrable d'ensembles fermés l'est également; par conséquent, dans cet espace la notion de l'ensemble F_σ au sens usuel n'a aucun sens essentiel, et on voit que dans cet espace l'ensemble correspondant à l'ensemble F_σ doit être défini comme une somme de la puissance $\aleph_\xi$ d'ensembles fermés.

Originellement, la topologie prend sa source à la notion de la limite et il me semble donc qu'il est naturel de développer sa théorie en relation avec la structure de la limite dans l'espace que nous avons en question.

Soient R un espace v introduit par M. Fréchet et x un point de R . Alors, il y a plusieurs familles de voisinages du point x telles qu'elles sont équivalentes deux à deux, et de plus il y a une famille telle que sa puissance est la plus petite parmi celles de toutes les familles. Désignons respectivement par $\{V(x)\}$ et $\aleph_\xi(x)$, la famille

1) L'ensemble dit *homogenen Normaltypus* η_ξ est un ensemble linéairement ordonné tel que son chaque point est un $\omega_\xi \omega_\xi^*$ -élément, où ω_ξ est un nombre régulier.

Cf. F. Hausdorff, *Mengenlehre*. Leipzig (1914), en particulier pages 142 et 179.

et sa puissance. Cela posé, si un système ordonné de points $\{x_\alpha\}$ converge vers le point x , alors, comme on le sait, on peut convenablement extraire un système $\{x_{V(x)}\}$, se composant de points de $\{x_\alpha\}$ et ordonné suivant l'ordre de l'ensemble $\{V(x)\}^{1)}$ de leurs suffixes, tel qu'il converge vers le point x ; ce qui montre que la convergence vers le point x peut être écrite par le mot de la convergence d'un système ordonné de la puissance $\aleph_\xi(x)$. Par conséquent, si la puissance $\aleph_\xi(x)$ est indépendante du point x de l'espace considéré, nous pouvons écrire la topologie dans l'espace par le mot de la convergence d'un système ordonné de la puissance $\aleph_\xi$. Ainsi, on peut dire que l'espace jouit en un sens de la structure uniforme par rapport à la limite.

De plus, quoiqu'un espace considéré R ne soit pas à structure uniforme en ce sens énoncé plus haut, s'il est quantitatif²⁾, la puissance d'ensemble de suffixes de voisinages est indépendante de points de l'espace et, par suite, on peut considérer que l'espace est à structure uniforme par rapport à la limite. Ainsi, il sera naturel que, dans l'espace quantitatif, la notion ayant des relations avec une puissance doit être définie en relation avec la puissance de l'ensemble des suffixes, et, en effet, on pourra voir dans §5 que la puissance joua un rôle important dans tel espace.

Dans ce travail, nous traitons principalement pour abrégier les espaces quantitatifs dans lesquels chaque voisinage est ouvert. Le premier objet de cet article est d'excepter des notions ayant des relations avec la puissance $\aleph_0$ dans le sens conventionnel, et le deuxième, de démontrer un traitement naturel sur quelques affaires fondamentales dans la topologie. Nous traiterons les espaces quantitatifs dans §5 et les espaces à structure uniforme dans §6.

§5. Les espaces quantitatifs.

Dans la suite, nous supposons que la famille $\{V_\alpha(x)\}$ des voisinages d'un point x d'un espace R remplisse les conditions suivantes :

1. $x \in V_\alpha(x)$, quels que soient $x \in R$ et $\alpha \in A$.
2. Tout voisinage $V_\alpha(x)$ est ouvert dans l'espace R .

1) À une famille d'ensembles $\{M\}$ nous pouvons introduire un ordre de façon que $M_1 \geq M_2$ équivaut à $M_1 \subset M_2$, quels que soient deux ensembles M_1 et M_2 de la famille.

2) Un espace v est appelé quantitatif, lorsqu'il existe une fonction univoque φ d'un ensemble de suffixes A sur chaque famille de voisinages de chaque point de l'espace.

Voir notre article: Sur les espaces à structure uniforme. Jour. of the Faculty of Science Hokkaido Imp. Univ., Ser. I, Vol. X (1943). P. 180.

En premier lieu, nous définirons un ordre relatif à un point x parmi les éléments de A par l'équivalence, en symboles logiques,

$$[\beta \geq \alpha] \equiv [V_\beta(x) \subset V_\alpha(x)].$$

Alors, comme on le voit, l'ensemble A sera considéré comme un ensemble ordonné et nous le désignerons brièvement par $\mathfrak{A}_x$. L'ordre de $\mathfrak{A}_x$ est évidemment dépendant du point x . De même, si nous définirons un ordre parmi les éléments de A par l'équivalence :

$$[\beta \geq \alpha] \equiv [V_\beta(x) \subset V_\alpha(x), \text{ quel que soit } x \in R],$$

nous obtiendrons un ensemble ordonné et se composant des éléments de A , et nous le désignerons par $\mathfrak{A}$.

Dans ce cas, il est évident que $\mathfrak{A}_x$ et $\mathfrak{A}$ ne sont pas nécessairement des ensembles filtrants à droite. Quoique tous les $\mathfrak{A}_x$ aient des ensembles filtrants à droite, $\mathfrak{A}$ n'est pas nécessairement d'ensemble filtrant à droite.

Par rapport aux ensembles $\mathfrak{A}_x$ et $\mathfrak{A}$, on a évidemment les

Théorème 1. (1). $\mathfrak{A}_x$ est un ensemble filtrant à droite dans le cas et le seul cas où R est additif, c.-à-d. où R vérifie la condition suivante :

Pour deux suffixes quelconques α et β , il existe un suffixe γ dépendant de α et de β et de x , tel que $V_\gamma(x) \subset V_\alpha(x) \cdot V_\beta(x)$.

(2). Pour que $\mathfrak{A}$ soit un ensemble filtrant à droite, il faut et il suffit que, quels que soient deux suffixes α et β , il existe un suffixe γ , dépendant de α et de β et indépendant de x , tel que $V_\gamma(x) \subset V_\alpha(x) \cdot V_\beta(x)$.

Dans la suite nous appelons *monotone* l'espace R vérifiant la condition (2) du théorème 1.

Théorème 2. Quels que soient deux suffixes α et β ,

$$\beta \geq \alpha (\mathfrak{A})^{(1)} \quad \text{entraîne} \quad \beta \geq \alpha (\mathfrak{A}_x).$$

Théorème 3. $\mathfrak{A}$ est aussi effectif pour la convergence que $\mathfrak{A}_x^{(2)}$, c.-à-d. on a $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{A}_x^{(2)}$, quel que soit x .

En effet, si l'on définit deux fonctions : $\alpha = \varphi(\alpha)$ de $\mathfrak{A}_x$ dans $\mathfrak{A}$

1) Le symbole $\beta \geq \alpha (\mathfrak{A})$ signifie que $\beta \geq \alpha$ suivant l'ordre de $\mathfrak{A}$.

2) Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux ensembles ordonnés. S'il existe deux fonctions $\alpha = \varphi(\beta)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et $\beta = \psi(\alpha)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ telles que $\alpha \geq \varphi(\beta) (\mathfrak{A})$ entraîne $\psi(\alpha) \geq \beta (\mathfrak{B})$, alors $\mathfrak{A}$ est dit aussi effectif pour la convergence que $\mathfrak{B}$ et nous le désignons par $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$. Voir J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology. *Annals of Mathematics studies*, No. 2, Princeton (1940), p. 25.

et $\alpha = \psi(\alpha)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}_x$, alors il vient du théorème 2 que $\alpha \geq \varphi(\beta)$ ($\mathfrak{A}$) entraîne $\psi(\alpha) \geq \beta$ ($\mathfrak{A}_x$), c.q.f.d.

Théorème 4. Soit $\{x_\alpha\}$ un système de points, où α parcourt $\mathfrak{A}$. Alors, il se trouve que :

- (1) si $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x$, alors $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$,
- (2) si $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$, alors $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x$.

Cette démonstration est presque évidente selon le théorème 2.

Théorème 5. Soit $\{x_\alpha\}$ un système tel que $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$. Il existe alors un sous-système²⁾ de $\{x_\alpha\}$ tel qu'il converge vers le point x .

En effet, étant $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$, quel que soit α , il existe un suffixe $\varphi(\alpha)$ tel que $\varphi(\alpha) \geq \alpha$ et $x_{\varphi(\alpha)} \in V_\alpha(x)$. Donc, en posant $\bar{x}_\alpha = x_{\varphi(\alpha)}$, il est évident que le système $\{\bar{x}_\alpha\}$ converge vers le point x ; Ce qui montre que le sous-système $\{x_{\varphi(\alpha)}\}$ de $\{x_\alpha\}$ converge vers le point x , c.q.f.d.

Théorème 6. Pour un ensemble non-vide E , on a les équivalences suivantes :

- (1) $[x \in \bar{E}] \equiv [Il \text{ existe un système de points } \{x_\alpha\} \subset E \text{ tel que } \{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x]$.
- (2) $[x \in \bar{E}] \equiv [Il \text{ existe un système de points } \{x_\alpha\} \subset E \text{ tel que } \{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x]$.

En effet, soit $x \in \bar{E}$. Alors, quel que soit $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe un point x_α appartenant à $V_\alpha(x) \cdot E$ et, par conséquent, pour le système $\{x_\alpha\}$ on a $\{x_\alpha\} \subset E$ et $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x$. Et de plus, on a évidemment $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$ du théorème 4.

Puis, supposons que $\{x_\alpha\} \subset E$ et $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$. D'après l'hypothèse $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}} x$ on a $x \in \overline{\sum_\alpha x_\alpha}$. D'autre part, étant $\{x_\alpha\} \subset E$, il vient $x \in \bar{E}$, c.q.f.d.

Le théorème 6 montre que la topologie dans l'espace R peut être écrite par le mot de la convergence des systèmes de points $\{x_\alpha\}$, ayant les éléments de $\mathfrak{A}$ comme leurs suffixes et ordonnés suivant l'ordre de $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ s'appelle le *caractère* de l'espace R et un système de points

1) Le symbole $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x$ (ou $\{x_\alpha\} \xrightarrow{\mathfrak{A}_x} x$) signifie que le système $\{x_\alpha\}$ ordonné suivant l'ordre de $\mathfrak{A}_x$ converge (ou s'attroupe) vers le point x .

2) Un système $\{x_{\varphi(\alpha)}\}$ est dit un sous-système de $\{x_\alpha\}$, lorsque $\varphi(\alpha) \geq \alpha$ pour chaque α .

$\{x_\alpha\}$ ordonné suivant l'ordre de $\mathfrak{A}$ s'appelle un *système caractéristique*.

Pour nécessité dans la suite, nous donnerons ici quelques définitions :

1. Soit $\mathfrak{B}$ un ensemble ordonné et soit $x(\mathfrak{B})$ un système de points, ayant les éléments de $\mathfrak{B}$ comme leurs suffixes et ordonnés suivant l'ordre de $\mathfrak{B}$. Quel que soit $\alpha \in \mathfrak{A}$, s'il existe un point x_α tel que le sous-système $x(\mathfrak{B}) \cdot V_\alpha(x_\alpha)$ de $x(\mathfrak{B})$ est résiduel avec $x(\mathfrak{B})$, alors le système $x(\mathfrak{B})$ est dit *fondamental*.

2. Soit E un ensemble dans R . Si, pour chaque système caractéristique et fondamental $x(\mathfrak{A}) \subset E$, il existe au moins un des points adhérents (qui appartient à E), alors l'ensemble E est dit à *caractère complet (en soi)*.

3. Si, pour chaque système caractéristique $x(\mathfrak{A}) \subset E$, il existe au moins un des points adhérents (qui appartient à E), l'ensemble E s'appelle à *caractère compact (en soi)*.

Dans la suite, nous convenons, sauf mention expresse du contraire, qu'un système $x(\mathfrak{B})$ est ordonné suivant l'ordre de $\mathfrak{B}$.

Théorème 7. *Soit E un ensemble à caractère compact (en soi) et soit $x(\mathfrak{A}) \subset E$. Alors, chaque sous-système confinal $x(\mathfrak{A}')$ de $x(\mathfrak{A})$ possède aussi au moins un des points adhérents (qui appartient à E).*

Démonstration. $x(\mathfrak{A}')$ étant confinal avec $x(\mathfrak{A})$, il existe, pour chaque suffixe α , un suffixe $\beta(\alpha) \geq \alpha$ tel que $x_{\beta(\alpha)} \in x(\mathfrak{A}')$. Or, en posant $\bar{x}_\alpha = x_{\beta(\alpha)}$, le système $\{\bar{x}_\alpha\}$ est caractéristique et $\{\bar{x}_\alpha\} \subset E$. Il existe donc un point adhérent $\bar{x}$ (appartenant à E) de $\{\bar{x}_\alpha\}$, et, par suite, pour un voisinage $V_\alpha(\bar{x})$ et un suffixe γ il existe un suffixe $\delta \geq \gamma$ tel que $\bar{x}_\delta \in V_\alpha(\bar{x})$; De plus, étant $\bar{x}_\delta = x_{\beta(\delta)}$ et $\beta(\delta) \geq \delta \geq \gamma$, il vient $x_{\beta(\delta)} \in V_\alpha(\bar{x})$ et $\beta(\delta) \geq \gamma$. Ce qui montre que $x(\mathfrak{A}')$ s'attroupe vers le point $\bar{x}$, c.q.f.d.

De même, on a le

Corollaire. *Soit E un ensemble à caractère complet (en soi) et soit $x(\mathfrak{A}) \subset E$ un système caractéristique et fondamental. Alors, chaque sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$ possède au moins un des points adhérents (appartenant à E).*

Nous pouvons vérifier sans peine les

Théorème 8. *Un ensemble à caractère compact (en soi) est à caractère complet (en soi).*

Théorème 9. *Un ensemble fermé F dans un ensemble à carac-*

ère compact en soi (ou un ensemble à caractère complet en soi) l'est également.

Théorème 10. *Dans un espace de Hausdorff, un ensemble à caractère complet en soi est fermé.*

En effet, si $x \in \bar{E}$, alors il existe du théorème 4 un système caractéristique $\{x_\alpha\} \subset E$ convergeant vers le point x . Dans ce cas, le système $\{x_\alpha\}$ étant évidemment fondamental, il possède selon l'hypothèse au moins un point adhérent, soit y . On peut dire que $x = y$. Si l'on suppose par contre que $x \neq y$, il existe selon l'hypothèse deux voisinages disjoints $V_\alpha(x)$ et $V_\beta(y)$ tels que le système $\{x_\alpha\}$ est résiduel avec lui-même dans $V_\alpha(x)$ et confinal avec lui-même dans $V_\beta(y)$; C'est une contradiction, donc on a $x = y$. Par suite, on voit que $\{x_\alpha\}$ possède un et un seul point adhérent x . E étant à caractère complet en soi, on peut dire que le point x appartient à E , c.-à-d. que E est fermé, c.q.f.d.

Théorème 11. *Soit R un espace à caractère compact. Supposons qu'à chaque suffixe $\alpha \in \mathfrak{A}$ corresponde un ensemble F_α fermé et non-vidé vérifiant la condition que $\beta \geq \alpha$ entraîne $F_\beta \subset F_\alpha$. Alors, la partie commune à tous les ensembles F_α n'est pas vide.*

Démonstration. Soit x_α un point de F_α , et considérons le système caractéristique $\{x_\alpha\}$. R étant à caractère compact, le système $\{x_\alpha\}$ possède au moins un des points adhérents, soit x . Alors, quels que soient un voisinage $V_\gamma(x)$ et un suffixe α , il existe un suffixe $\beta \geq \alpha$ tel que $x_\beta \in V_\gamma(x)$. D'autre part, étant $x_\beta \in F_\alpha$ pour $\beta \geq \alpha$, il vient $V_\gamma(x) \cdot F_\alpha \neq \emptyset$; d'où $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$, quel que soit α . Il vient donc $x \in \bigcap_\alpha F_\alpha$, c.q.f.d.

Théorème 12. *Soit R un espace à caractère complet vérifiant la condition $(T_1^*)^{1)}$ et soit $\{F_\alpha\}$ une famille d'ensembles F_α , α parcourant $\mathfrak{A}$, fermés et non-vides vérifiant les deux conditions:*

1. $F_\beta \subset F_\alpha$ pour $\beta \geq \alpha$.
2. Pour chaque α il existe un suffixe $\beta(\alpha) \geq \alpha$ et un point y_α tels que $F_{\beta(\alpha)} \subset V_\alpha(y_\alpha)$.

Alors, la partie commune aux ensembles F_α constitue d'un seul point.

Démonstration. Soit $x_\alpha \in F_\alpha$ et considérons le système $\{x_\alpha\}$. Pour

1) La condition (T_1^*) signifie que: Quels que soient deux points distincts x et y , il existe un suffixe α déterminé par x et y tel que au moins un des x et y n'est pas contenu dans $V_\alpha(z)$, quel que soit $z \in R$.

un suffixe α il existe, selon l'hypothèse 2, un suffixe $\beta(\alpha) \geq \alpha$ et un point y_α tels que $F_{\beta(\alpha)} \subset V_\alpha(y_\alpha)$. Par conséquent, il vient $x_\gamma \in V_\alpha(y_\alpha)$ pour tout $\gamma \geq \beta(\alpha)$, car $F_\gamma \subset F_{\beta(\alpha)}$ se trouve selon l'hypothèse 1; ce qui montre que le système $\{x_\alpha\}$ est fondamental. Par suite, R étant à caractère complet, il y a un point adhérent x de $\{x_\alpha\}$ et, en suivant l'idée usée dans la démonstration du théorème précédent, on peut démontrer que le point x appartient à F_α , quel que soit α . Il vient donc $x \in \prod_\alpha F_\alpha$.

Puis, supposons par contre qu'il existe un point distinct y de x tel que $x + y \in \prod_\alpha F_\alpha$. Alors, selon la condition (T_1^*) , il existe un suffixe α tel que $V_\alpha(z)$ ne contient pas les deux points x et y en même temps, quel que soit $z \in R$. D'autre part, pour ce suffixe α il existe, selon l'hypothèse 2, un suffixe $\beta(\alpha)$ et un point y_α tels que $F_{\beta(\alpha)} \subset V_\alpha(y_\alpha)$; ce qui contredit au fait que $x + y \in \prod_\alpha F_\alpha$, c.q.f.d.

Théorème 13. *Dans un espace complet¹⁾ vérifiant la condition $(T_2^*)^{2)}$, si un système fondamental $x(\mathfrak{B})$ s'attroupe vers un point x , alors le système converge vers le point x .*

Démonstration. Soit $x(\mathfrak{B})$ un système fondamental s'attroupant vers un point x et supposons par contre que le système ne converge pas vers le point x . Il y a alors un voisinage $V_\alpha(x)$ dans lequel le système $x(\mathfrak{B})$ n'est pas résiduel avec lui-même; par conséquent, le sous-système $x(\mathfrak{B}) - V_\alpha(x)$ de $x(\mathfrak{B})$ possède au moins un des points adhérents, soit y , et y n'appartient pas à $V_\alpha(x)$, puisque $x(\mathfrak{B}) - V_\alpha(x)$ est aussi un système fondamental et l'espace R est complet. Etant $x \neq y$, il y a de l'hypothèse (T_2^*) un suffixe β tel que $V_\beta(z)$ est disjoint d'un au moins des $V_\beta(x)$ et $V_\beta(y)$, quel que soit $z \in R$. Donc le système $x(\mathfrak{B})$ n'est pas fondamental et nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Théorème 14. *Soit $y = f(x)$ une fonction continue d'un espace quantitatif $\mathfrak{X}$ dans un espace quasi-accessible $\mathfrak{Y}$. Alors, pour que $f(x)$ soit continue à un point x_0 , il faut et il suffit que, pour chaque système caractéristique $\{x_\alpha\}$ convergeant vers le point x_0 , le système ordonné $\{f(x_\alpha)\}$ dans $\mathfrak{Y}$ converge vers le point $f(x_0)$.*

1) Un espace quantitatif est dit complet, lorsque, quel que soit un système fondamental dans l'espace, il possède au moins un des points adhérents.

2) La condition (T_2^*) signifie que: Soient x et y deux points distincts. Il existe alors un suffixe α déterminé par x et y tel que, quel que soit $z \in R$, le voisinage $V_\alpha(z)$ est disjoint d'un au moins des $V_\alpha(x)$ et $V_\alpha(y)$.

Démonstration. Soit $f(x)$ continue à un point x_0 . Alors, pour chaque voisinage $U(f(x_0))$ il existe un voisinage $V_\alpha(x_0)$ tel que $f(V_\alpha(x_0)) \subset U(f(x_0))$. Or, comme $\{x_\alpha\}$ converge vers le point x_0 , il est résiduel avec lui-même dans $V_\alpha(x_0)$. Par suite $\{f(x_\alpha)\}$ est aussi résiduel avec lui-même dans $U(f(x_0))$. Ce qui montre que le système $\{f(x_\alpha)\}$ converge vers le point $f(x_0)$.

D'autre part, si $f(x)$ n'est pas continue à un point x_0 , il existe un voisinage $U(f(x_0))$ tel que, pour chaque voisinage $V_\alpha(x_0)$, il y a un point $x_\alpha \in V_\alpha(x_0)$ de façon que $f(x_\alpha) \notin U(f(x_0))$. Si l'on considère le système des points $\{x_\alpha\}$ ainsi définis, il est évident que le système caractéristique $\{x_\alpha\}$ dans $\mathfrak{X}$ converge vers le point x_0 et $f(\{x_\alpha\}) \cdot U(f(x_0)) = \emptyset$, donc le système ordonné $\{f(x_\alpha)\}$ ne converge pas vers le point $f(x_0)$, c. q. f. d.

Espace quantitatif-exceptionnel. Un espace quantitatif R est dit *exceptionnel*, lorsque, pour chaque décomposition de $\mathfrak{A}$ en puissance inférieure à $\overline{\mathfrak{A}}^{10}$: $\mathfrak{A} = \sum_{\tau \in T} \mathfrak{A}_\tau$, où $\overline{T} < \overline{\mathfrak{A}}$ et les composantes $\mathfrak{A}_\tau$ ne sont pas nécessairement disjoints deux à deux, il existe au moins une composante $\mathfrak{A}_\tau$ confinal avec $\mathfrak{A}$. Par exemple, si $\mathfrak{A}$ est filtrant à droite et $\overline{\mathfrak{A}} = \aleph_c$, alors l'espace est exceptionnel¹¹.

Selon cette définition, nous aurons le théorème intéressant suivant:

Théorème 15. Dans un espace quantitatif-exceptionnel R , on a les deux propositions équivalentes l'une l'autre.

(1) La somme de puissance inférieure à $\overline{\mathfrak{A}}$ d'ensembles fermés est fermée.

(2) Le produit de puissance inférieure à $\overline{\mathfrak{A}}$ d'ensembles ouverts est ouvert.

Démonstration. (1). Soit $\{F_\tau\}$ une famille d'ensembles fermés, où $\tau \in T$ et $\overline{T} < \overline{\mathfrak{A}}$. Posons $F = \sum_{\tau \in T} F_\tau$ et soit x un point de $\bar{F}$. Alors, il existe du théorème 6 un système caractéristique $\{x_\alpha\}$ tel que $\{x_\alpha\} \subset F$ et il converge vers le point x . Cela posé, désignons par $\{x_\alpha\}_\tau$ l'ensemble des points x_α appartenant à F_τ et par $\mathfrak{A}_\tau$ l'ensemble des suffixes α des points de $\{x_\alpha\}_\tau$. Il est évident que $\mathfrak{A} = \sum_{\tau \in T} \mathfrak{A}_\tau$. Or, l'espace étant quantitatif-exceptionnel, il y a un ensemble $\mathfrak{A}_{\tau_0}$ confinal avec $\mathfrak{A}$. Par conséquent, quel que soit un voisinage $V_\alpha(x)$, il

1) $\overline{E}$ désigne, comme toujours, la puissance de l'ensemble E .

2) Cf. J. W. Tukey, loc. cit., p. 14.

vient $V_\alpha(x) \cdot \{x_\alpha\}_{\tau_0} \neq \emptyset$, puisque le système $\{x_\alpha\}$ converge vers le point x . Il vient donc $x \in \bar{F}_{\tau_0}$. F_{τ_0} étant fermé, il vient $x \in F_{\tau_0}$; d'où $x \in F$. Ce qui montre que F est fermé.

Il est presque évident que (1) et (2) sont équivalentes, c.q.f.d.

En tenant compte du théorème précédent, il sera naturel de définir, par exemple, la famille des *ensembles boreliens* comme suit :

La famille $\mathfrak{F}$ des ensembles boreliens est la plus petite famille assujettie aux conditions suivantes¹⁾ :

1. *Tout ensemble fermé appartient à $\mathfrak{F}$.*
2. *Si un ensemble E appartient à $\mathfrak{F}$, alors le complémentaire de E appartient aussi à $\mathfrak{F}$.*
3. *Soit $\{E_\tau\}$ une famille de la puissance $\overline{\aleph}$ d'ensembles appartenant à $\mathfrak{F}$. Alors l'ensemble $\prod_\tau E_\tau$ lui appartient également.*

La somme de la puissance $\overline{\aleph}$ d'ensembles fermés est dite un *ensemble F_s* , et le produit de la puissance $\overline{\aleph}$ d'ensembles ouverts est dit un *ensemble G_u* .

De même, nous dirons qu'un ensemble est de *1-re catégorie* lorsqu'il est considéré comme une somme de la puissance $\overline{\aleph}$ d'ensembles non-denses, et un ensemble qui n'est pas de 1-re catégorie est dit de *seconde catégorie*.

Espace dans lequel un ensemble de 1-re catégorie est frontière.
Comme on peut le voir aisément, on a le

Théorème 16. (1) *Un ensemble de 1-re catégorie est contenu dans un ensemble de 1-re catégorie et F_s .*

(2) *Un ensemble F_s et frontière est de 1-re catégorie.*

Nous convenons d'ans la suite que la puissance du caractère $\aleph$ de l'espace considéré est désignée par $\aleph_\xi$, sauf mention expresse du contraire. Cela posé, soit ω_η un nombre régulier arbitraire tel que $\omega_\eta \leq \omega_\xi$, où ω_ξ est le nombre initial de la puissance $\aleph_\xi$. Prenons un système de points $\{x_\lambda\} \subset E$ ayant les nombres ordinaux $\lambda \in W(\omega_\eta)$ ²⁾ comme leurs suffixes et convenons que $x_\lambda \leq x_\mu$ pour $\lambda < \mu < \omega_\eta$. Si tel système quelconque possède au moins un des points adhérents (appartenant à E), alors l'ensemble E est dit *parfaitement compact (en soi) au sens bien ordonné*.

1) En s'appuyant cette définition et les idées dues à M. M. Kuratowski et Montgomery, nous pouvons développer la théorie analogue à celle de la fonction mesurable $\mathfrak{B}$; Voir notre article, Contribution à la topologie III, qui paraîtra prochainement dans ce journal.

2) $W(\lambda)$ désigne, comme toujours, l'ensemble des nombres ordinaux inférieurs à λ .

D'après cette définition, on peut déduire le

Théorème 17. *Pour un ensemble fermé F , les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *F est parfaitement compact en soi au sens bien ordonné.*

(2) *Soit $\{F_\lambda\}$ une famille du type σ ($\leq \omega_\xi$) d'ensembles fermés et non-vides dans F , ayant les nombres ordinaux $\lambda < \sigma$ comme leurs suffixes, telle que $F_\lambda \supset F_\mu$ si $\lambda < \mu < \sigma$. Alors la partie commune à tous les ensembles F_λ n'est pas vide.*

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2) : En désignant par ω_η le nombre initial, régulier et confinal avec $W(\sigma)$, on a $\omega_\eta \leq \sigma$. Il existe alors une sous-famille $\{F_{\lambda_\nu}\}$, ($\nu \in W(\omega_\eta)$), de la famille telle que $\prod_\lambda F_\lambda = \prod_\nu F_{\lambda_\nu}$. Cela posé, si nous considérons un système ordonné de points $\{x_\nu\}$, où $x_\nu \in F_{\lambda_\nu}$, il s'attroupe vers un point x de F selon l'hypothèse (1). D'autre part, comme on le voit, le système $\{x_\nu\}$ est confinal avec lui-même dans chaque F_{λ_ν} ; il vient donc $x \in \bar{F}_{\lambda_\nu} = F_{\lambda_\nu}$. Par conséquent, il vient $\prod_\lambda F_\lambda = \prod_\nu F_{\lambda_\nu} \neq \emptyset$.

(2) $\rightarrow$ (1) : Si l'on suppose que F ne soit pas parfaitement compact au sens bien ordonné, il existe alors un nombre régulier ω_η ($\leq \omega_\xi$) tel qu'il existe un système ordonné de points $\{x_\lambda\}$ et ne s'attroupant vers aucun point de F , où $x_\lambda \in F$ et $\lambda \in W(\omega_\eta)$. En posant $G = R - F$, G est ouvert, puisque F est fermé. D'autre part, à chaque point x de F correspond un voisinage $V_\alpha(x)$ dans lequel la partie commune $\{x_\lambda\} \cdot V_\alpha(x)$ n'est pas confinal avec $\{x_\lambda\}$. Si l'on fait correspondre à chaque point x de F l'un de tels voisinages $V_\alpha(x)$, il existe alors un nombre le plus petit $\mu < \omega_\eta$ de façon que chaque suffixe de point appartenant à la partie commune $\{x_\lambda\} \cdot V_\alpha(x)$ est inférieur à μ . Dans ce cas, nous dirons que l'ordre du voisinage $V_\alpha(x)$ est μ au plus et désignons par g_μ la somme des voisinages de l'ordre μ au plus. Si l'on pose $G_\lambda = G + \sum_{\mu \leq \lambda} g_\mu$, on a alors $F \subset \sum_{\lambda < \omega_\eta} G_\lambda$; donc, en posant $F_\lambda = F - G_\lambda$, la famille $\{F_\lambda\}$ des ensembles fermés, non-vides et contenus dans F est du type ω_η et $F_\mu \subset F_\lambda$ si $\lambda < \mu$, et de plus, comme on le voit, il vient $\prod_\lambda F_\lambda = \emptyset$; ce qui montre que (2) entraîne (1), c.q.f.d.

Un espace R est appelé *localement-parfaitement compact au sens bien ordonné à un point x* , lorsqu'on peut faire correspondre au point x un voisinage tel que sa fermeture est parfaitement compact au sens bien ordonné.

D'après cette terminologie, nous allons démontrer le

Théorème 18. *Dans un espace quantitatif-exceptionnel, régulier et localement-parfaitement compact au sens bien ordonné, un ensemble de 1-re catégorie est frontière.*

Démonstration. Soit E un ensemble de 1-re catégorie et soit $E = \sum_{\lambda < \omega_\xi} N_\lambda$ où N_λ sont d'ensembles non-denses. Quel que soit un ensemble G ouvert et non-vidé, il s'agit de démontrer que $G - E \neq \emptyset$.

Or, N_0 étant non-dense et R étant régulier et localement-parfaitement compact au sens bien ordonné, il existe un point $x_0 \in G - N_0$ et un voisinage $V_{\alpha(0)}(x_0)$ tels que $\overline{V_{\alpha(0)}(x_0)} \subset G - N_0$ et la fermeture de $V_{\alpha(0)}(x_0)$ est parfaitement compact au sens bien ordonné. Ceci étant établi, supposons que, pour tous les nombres $\mu < \nu$ inférieurs à λ ($< \omega_\xi$), deux points x_μ et x_ν et leurs voisinages $V_{\alpha(\mu)}(x_\mu)$ et $V_{\alpha(\nu)}(x_\nu)$ sont déjà définis tels que $\overline{V_{\alpha(\nu)}(x_\nu)} \subset V_{\alpha(\mu)}(x_\mu)$ et $V_{\alpha(\mu)}(x_\mu) \subset V_{\alpha(0)}(x_0) - \sum_{\mu < \nu} N_\mu$. Cela posé, nous définirons pour λ un point x_λ et son voisinage $V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)$ comme suit :

Si λ est un nombre isolé, nous pouvons prendre un voisinage $V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)$ tel que

$$\overline{V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)} \subset V_{\alpha(\lambda-1)}(x_{\lambda-1}) - N_\lambda.$$

Si λ est un nombre limite, le produit $\prod_{\mu < \lambda} V_{\alpha(\mu)}(x_\mu)$ contient le produit $\prod_{\mu+1 < \lambda} \overline{V_{\alpha(\mu+1)}(x_{\mu+1})}$ et celui-ci n'est pas vide selon l'hypothèse et le théorème 17 ; par conséquent, celui-là est ouvert et non-vidé selon le théorème 15. Par suite, on peut choisir un point x_λ et son voisinage $V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)$ tels que $\overline{V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)} \subset \prod_{\mu < \lambda} V_{\alpha(\mu)}(x_\mu) - N_\lambda$.

Ainsi nous avons défini la famille des ensembles $V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda)$, ($\lambda < \omega_\xi$), et par conséquent on a selon (2) du théorème 17 que $G - E \supset \prod_{\lambda < \omega_\xi} V_{\alpha(\lambda)}(x_\lambda) \supset \prod_{\lambda+1 < \omega_\xi} \overline{V_{\alpha(\lambda+1)}(x_{\lambda+1})} \neq \emptyset$, c.q.f.d.

En suivant les idées dues à M. Kuratowski¹⁾, nous pouvons déduire du théorème plusieurs lemmes que nous donnons sans démonstration ci-dessous.

Lemme 1. *Le complémentaire d'un ensemble de 1-re catégorie n'est pas de 1-re catégorie.*

Lemme 2. *Soit $\{E_\tau\}$, où $\tau \in T$ et $\overline{T} < \overline{\mathfrak{A}}$, une famille de puissance $< \overline{\mathfrak{A}}$ d'ensembles G_α et denses. Alors la partie commune $\prod_\tau E_\tau$ l'est également.*

1) C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa, (1933).

Lemme 3. Un ensemble G_α et de 1-re catégorie est non-dense.

Lemme 4. Un ensemble F_τ et G_α est développable.

Lemme 5. Soit R un espace dense en soi et décomposable en puissance $\overline{\mathfrak{A}}$ d'ensembles fermés: $R = \sum_{\tau} F_\tau$. Si l'ensemble $E \cdot F_\tau$ est clair-semé pour chaque τ , l'ensemble E l'est également.

Lemme 6. Soit E un ensemble dense en soi et non-vidé dans l'espace $\mathfrak{X}$ et soit $y = f(x)$ une fonction continue de $\mathfrak{X}$ dans un T_1 -espace $\mathfrak{Y}$ tel que la fonction partie $f(x|E)$ est biunivoque. Alors la puissance de l'ensemble des valeurs de la fonction $f(x)$ est supérieure à $\overline{\mathfrak{A}}$.

Ensemble (totalement) borné. Si l'on désigne par $S_\alpha(x)^1$ un voisinage stelliforme d'un point x , il y a alors l'équivalence

$$[y \in S_\alpha(x)] \equiv [x \in S_\alpha(y)],$$

quels que soient deux points x et y . En employant cette relation, nous pouvons définir une notion dite *filet* $\frac{1}{\alpha}$;

Etant donné un ensemble E , nous considérons un sous-ensemble D_α de E tel qu'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1. Quels que soient x et y deux points distincts de D_α , on a $y \notin S_\alpha(x)$.

2. Quel que soit un point $x \in E$, on a $S_\alpha(x) \cdot D_\alpha \neq \emptyset$.

Tel ensemble D_α s'appelle *filet* $\frac{1}{\alpha}$ dans E .

Ensuite nous définirons la notion dite un *ensemble borné* (ou un *ensemble totalement borné*). Soient E un ensemble et α un suffixe. L'ensemble E est dit borné (ou totalement borné), lorsqu'il se laisse décomposer pour chaque α en de puissance inférieure à $\overline{\mathfrak{A}}$ (ou en nombre fini) d'ensembles tels que:

$$E = \sum_{\tau} E_\tau^\alpha, (\overline{T} < \overline{\mathfrak{A}}), \text{ et } x_\tau \in E_\tau^\alpha \subset S_\alpha(x_\tau) \text{ et } x_{\tau'} \notin S_\alpha(x_\tau) \text{ si } \tau \neq \tau',$$

(ou $E = E_1^\alpha + E_2^\alpha + \dots + E_{n_\alpha}^\alpha$, $x_i \in E_i^\alpha \subset S_\alpha(x_i)$ pour $i = 1, 2, \dots, n_\alpha$ et $x_j \notin S_\alpha(x_i)$ si $i \neq j$).

Ces préliminaires étant posés, on a le

Théorème 19. Pour qu'un ensemble E soit borné, il faut et il suffit qu'à chaque α corresponde dans E un *filet* $\frac{1}{\alpha}$ D_α tel que $\overline{D}_\alpha < \overline{\mathfrak{A}}$.

1) Pour un ensemble E , le symbole $S_x(E)$ désigne la somme des voisinages $V_\alpha(z)$ tels que $V_\alpha(z) \cdot E \neq \emptyset$, quel que soit $z \in R$.

Démonstration. En effet, par définition, E étant borné, on a pour chaque α une décomposition de E telle que :

$$E = \sum_{\tau \in T} E_{\tau}^{\alpha}, (\bar{T} < \bar{\mathfrak{A}}); \quad x_{\tau} \in E_{\tau}^{\alpha} \subset S_{\alpha}(x_{\tau}) \quad \text{et} \quad x_{\tau'} \notin S_{\alpha}(x_{\tau}) \quad \text{si} \quad \tau' \neq \tau.$$

Alors, en posant $D_{\alpha} = \sum_{\tau \in T} x_{\tau}$, il en résulte que l'ensemble D_{α} est un filet- $\frac{1}{\alpha}$ dans E et dont la puissance est $< \bar{\mathfrak{A}}$.

Réciproquement, supposons qu'à chaque suffixe α corresponde dans E un filet- $\frac{1}{\alpha}$ D_{α} de puissance inférieure à $\bar{\mathfrak{A}}$, soit $D_{\alpha} = \sum_{\tau \in T} x_{\tau}$. Cela pesé, si l'on considère les voisinages stelliformes $S_{\alpha}(x_{\tau})$, ($\tau \in T$), comme on peut le vérifier facilement, on a $E \subset \sum_{\tau \in T} S_{\alpha}(x_{\tau})$. Donc, en posant $E_{\tau}^{\alpha} = E \cap S_{\alpha}(x_{\tau})$, on a une décomposition de $E: E = \sum_{\tau \in T} E_{\tau}^{\alpha}$, $x_{\tau} \in E_{\tau}^{\alpha} \subset S_{\alpha}(x_{\tau})$ et $x_{\tau'} \notin S_{\alpha}(x_{\tau})$ si $\tau' \neq \tau$, c.q.f.d.

Théorème 20. (1) *Un ensemble compact E au sens de M. Fréchet¹⁾ est totalement borné.*

(2) *Dans un espace tel que son caractère $\mathfrak{A}$ n'a aucun élément maximum, un ensemble à caractère compact E est borné.*

Démonstration. (1): Supposons par contre que E ne soit pas totalement borné. Alors, il y a un suffixe α pour lequel l'ensemble E peut être décomposé de façon que $E = \sum_{\tau \in T} E_{\tau}^{\alpha}$, ($\bar{T} \geq \mathfrak{A}$), $x_{\tau} \in E_{\tau}^{\alpha} \subset S_{\alpha}(x_{\tau})$ et $x_{\tau'} \notin S_{\alpha}(x_{\tau})$ si $\tau' \neq \tau$. En désignant par $\{y_n\}$ un ensemble dénombrable de points distincts et extraits de l'ensemble $\{x_{\tau}\}$, ($\tau \in T$), la suite $\{y_n\}$ possède, par l'hypothèse, au moins un des points adhérents, soit y . Alors, pour le voisinage $V_{\alpha}(y)$ il y a au moins deux points distincts y_m et y_n tels qu'ils appartiennent à $V_{\alpha}(y)$; par conséquent, on a $y_n \in S_{\alpha}(y_m)$. Ce qui contredit au fait que $y_n \notin S_{\alpha}(y_m)$ si $y_m \neq y_n$.

(2). De même, si l'on suppose que E ne soit pas borné, il existe un suffixe α pour lequel l'ensemble E peut être décomposé de façon que :

$$E = \sum_{\tau \in T} E_{\tau}^{\alpha}, (\bar{T} \geq \bar{\mathfrak{A}}); \quad x_{\tau} \in E_{\tau}^{\alpha} \subset S_{\alpha}(x_{\tau}) \quad \text{et} \quad x_{\tau'} \notin S_{\alpha}(x_{\tau}) \quad \text{si} \quad \tau' \neq \tau.$$

En désignant par $\{y_{\alpha}\}$, ($\alpha \in \mathfrak{A}$), un ensemble de points distincts de $\{x_{\tau}\}$, ($\tau \in T$), pour le système caractéristique $\{y_{\alpha}\}$ il y a, par l'hypo-

1) Un ensemble E est dit compact au sens de M. Fréchet lorsque chaque suite $\{x_n\}$ de points de E possède au moins un point adhérent.

thèse, au moins un des points adhérents, soit y . Alors, pour le voisinage $V_\alpha(y)$ il y a au moins deux points distincts y_β et y_γ tels qu'ils appartiennent à $V_\alpha(y)$; par conséquent, on a $y_\beta \in S_\alpha(y_\gamma)$. Nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Ensemble connexe. Soit $\{x_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), une suite de nombre fini de points d'un ensemble E tels que $x_i \in S_\alpha(x_{i+1})$, nous dirons alors qu'elle est dans E une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ enchainant les deux points x_1 et x_n . S'il existe dans E une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ enchainant deux points quelconques de E , l'ensemble E s'appelle enchainé- $\frac{1}{\alpha}$.

Il est évident que, quel que soit un point de E , s'il est enchainé dans E par une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ d'un point déterminé de E , alors E lui-même est enchainé- $\frac{1}{\alpha}$. En particulier, si E est enchainé- $\frac{1}{\alpha}$ pour tout α , E est dit enchainé-0.

Désignons par $K_\alpha(x)$ l'ensemble des points qui sont enchainés par une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ d'un point x et nous l'appelons composante- $\frac{1}{\alpha}$ contenant le point x . Nous dirons de plus que la partie commune $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{A}} K_\alpha(x)$ est composante-0 contenant le point x et le désignerons par $K_0(x)$.

Cela posé, nous allons démontrer le

Théorème 21. (1) La composante $K_\alpha(x)$ est fermée et ouverte, quel que soit α .

(2) Si un espace R est connexe, alors il est enchainé-0.

Démonstration. (1). Soit y un point de $K_\alpha(x)$. Il existe alors une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ qui enchainé les points x et y , et de plus on a $V_\alpha(y) \subset S_\alpha(y)$ selon la définition de $S_\alpha(y)$; d'où $V_\alpha(y) \subset K_\alpha(x)$. Il en résulte que $K_\alpha(x)$ est ouvert.

D'autre part, si $y \in \overline{K_\alpha(x)}$, on a $V_\alpha(y) \cdot K_\alpha(x) \neq \emptyset$. Par conséquent, il y a un point $z \in V_\alpha(y) \cdot K_\alpha(x)$ tel que x et z sont enchainés par une chaîne- $\frac{1}{\alpha}$ et $y \in S_\alpha(z)$; ce qui montre que $y \in K_\alpha(x)$. Donc, $K_\alpha(x)$ est fermé.

(2). Quels que soient $x \in R$ et α , $K_\alpha(x)$ est ouvert et fermé selon (1). R étant connexe, on a donc $K_\alpha(x) = R$, et par conséquent il vient $K_0(x) = R$, c.q.f.d.

Théorème 22. *Dans un espace vérifiant la condition (T_2^*) , pour qu'un ensemble à caractère compact en soi soit connexe, il faut et il suffit qu'il soit enchainé-0.*

Démonstration. Si l'on considère l'ensemble donné comme un espace, il est enchainé-0 selon (2) du théorème précédent. Par conséquent, il est suffisant de démontrer qu'un ensemble non-connexe et à caractère compact en soi F ne soit pas enchainé-0.

Or, F n'étant pas connexe, par définition, F se laisse décomposer en deux ensembles non-vides, fermés et disjoints, soit $F = F_1 + F_2$ et $F_1 \cdot F_2 = \phi$. F_1 et F_2 étant fermés dans F , ils sont aussi à caractère compact en soi selon le théorème 9.

Maintenant, supposons par contre que, quel que soit α , deux points quelconques de F soient enchainés par une chaîne $\frac{1}{\alpha}$ dans F . Alors, comme on le voit, il existe deux points $x_\alpha \in F_1$ et $y_\alpha \in F_2$ tels que $y_\alpha \in S_\alpha(x_\alpha)$, ($\alpha \in \mathfrak{A}$). F_1 étant à caractère compact en soi, le système ordonné $\{x_\alpha\}$ s'attroupe vers un point $x \in F_1$. Par conséquent, selon le théorème 5 il existe un sous-système $\{x_{\varphi(\alpha)}\}$, ($\varphi(\alpha) \geq \alpha$), de $\{x_\alpha\}$ tel qu'il converge vers le point x . En posant $\bar{x}_\alpha = x_{\varphi(\alpha)}$, le système $\{\bar{x}_\alpha\}$ converge vers le point x . Puis, considérons le système confinal $\{y_{\varphi(\alpha)}\}$ de $\{y_\alpha\}$ et si l'on pose $\bar{y}_\alpha = y_{\varphi(\alpha)}$, le système caractéristique $\{\bar{y}_\alpha\}$ s'attroupe vers un point y de F_2 , puisque F_2 est à caractère compact en soi.

Comme l'espace considéré vérifie la condition (T_2^*) , il y a un suffixe β dépendant de x et de y tel que, pour un point arbitraire $z \in R$, le voisinage $V_\beta(z)$ est disjoint d'un au moins des $V_\beta(x)$ et $V_\beta(y)$. D'autre part, comme $\{\bar{x}_\alpha\}$ converge vers le point x et $\{\bar{y}_\alpha\}$ s'attroupe vers le point y , il existe un suffixe $\alpha \geq \beta$ tel que $\bar{x}_\alpha \in V_\beta(x)$ et $\bar{y}_\alpha \in V_\beta(y)$. Or, étant $\bar{x}_\alpha = x_{\varphi(\alpha)}$ et $\bar{y}_\alpha = y_{\varphi(\alpha)}$, on a $y_{\varphi(\alpha)} \in S_\beta(x_{\varphi(\alpha)})$ en vertu de la propriété de $V_\beta(z)$. De plus, étant $\varphi(\alpha) \geq \alpha \geq \beta$, il vient $V_{\varphi(\alpha)}(z) \subset V_\beta(z)$ quel que soit $z \in R$. Par suite, on a $S_{\varphi(\alpha)}(x_{\varphi(\alpha)}) \subset S_\beta(x_{\varphi(\alpha)})$, il vient donc $y_{\varphi(\alpha)} \in S_{\varphi(\alpha)}(x_{\varphi(\alpha)})$. Ce qui contredit à la définition des points $x_{\varphi(\alpha)}$ et $y_{\varphi(\alpha)}$, c.q.f.d.

Fonctions quasi-continues et fonctions continues. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces quantitatifs et désignons respectivement par $V_\alpha(x)$ et $U_\lambda(y)$ de voisinages dans $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$.

Soit $y = f(x)$ une fonction d'un sous-ensemble $X \subset \mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Quels que soient un point x et un suffixe λ , s'il existe un suffixe $\alpha_{(x, \lambda)}$ et un point $y_{(x, \lambda)}$ dépendants de x et de λ , tels que

$$(*) \quad f(X \cdot V_{\alpha_{x, \lambda}}(x)) \subset U_{\lambda}(y_{(x, \lambda)}),$$

alors $f(x)$ est dite *quasi-continue au point x* .

Si f est quasi-continue en chaque point de X , elle est dite quasi-continue *sur X* . En particulier, si le suffixe $\alpha_{(x, \lambda)} = \alpha$ est indépendant du point x , on dit que f est *uniformément quasi-continue sur X* .

Dans la formule (*), si le point $y_{(x, \lambda)}$ peut être remplacé par le point $f(x)$, f est *continue au point x* . En particulier, si le suffixe $\alpha_{(x, \lambda)}$ et le point $y_{(x, \lambda)}$ sont indépendants du point x , f s'appelle, comme d'habitude, *uniformément continue sur X* .

Ensuite nous considérons comme toujours l'espace composé de deux espaces R_1 et R_2 . En désignant par $\mathfrak{A}_i$ le caractère de R_i , ($i = 1, 2$), le caractère de l'espace composé est représenté par $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ et dont les éléments sont ordonnés par la règle que $(\alpha_1, \alpha_2) \geq (\beta_1, \beta_2)$ équivaut à $\alpha_i \geq \beta_i$ dans R_i , ($i = 1, 2$).

En particulier, si R est monotone, son caractère $\mathfrak{A}$ est filtrant à droite. Dans ce cas, comme on le voit, les ensembles ordonnés $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ et $\{(\alpha, \alpha)\}$, α parcourant $\mathfrak{A}$, sont finalement similaires¹⁾ deux à deux. En outre, il est nécessaire de adopter un ensemble ordonné tel que sa puissance est aussi petite que possible comme le caractère de l'espace considéré. Par conséquent, nous devons adopter l'ensemble ordonné $\{(\alpha, \alpha)\}$, α parcourant $\mathfrak{A}$, comme le caractère de l'espace $R \times R$; C'est ce qui signifie que les deux familles des voisinages $V_{\alpha_1}(x_1) \times V_{\alpha_2}(x_2)$ et $V_{\alpha}(x_1) \times V_{\alpha}(x_2)$ en un point (x_1, x_2) dans $R \times R$ sont équivalentes l'une l'autre, où α_1, α_2 et α parcourent $\mathfrak{A}$.

Ces préliminaires étant posés, nous allons démontrer le

Théorème 23. (1) Soit $\{(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha})\}$ un système caractéristique dans $R \times R$. Pour que le système converge vers un point (x_1, x_2) , il faut et il suffit que les systèmes $\{x_1^{\alpha}\}$ et $\{x_2^{\alpha}\}$ convergent respectivement vers les points x_1 et x_2 .

(2) Soit $\{(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha})\}$ un système caractéristique dans $R \times R$. Pour que le système s'attroupe vers un point (x_1, x_2) , il faut et il suffit qu'il y a un sous-système confinal $\{\varphi(\alpha)\}$ de $\mathfrak{A}$, où $\varphi(\alpha) \geq \alpha$, tel que le système $\{x_1^{\varphi(\alpha)}\}$ converge vers le point x_1 et le système $\{x_2^{\varphi(\alpha)}\}$ s'attroupe vers le point x_2 .

Démonstration. (1): Supposons d'abord qu'un système caractéristique $\{(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha})\}$ converge vers un point (x_1, x_2) . Dans ce cas, le sys-

1) J. W. Tukey, loc. cit., p. 11.

tème est résiduel avec lui-même dans un voisinage quelconque $V_\alpha(x_1) \times V_\alpha(x_2)$. Il existe donc un suffixe β tel que $(x_1^\beta, x_2^\beta) \in V_\alpha(x_1) \times V_\alpha(x_2)$ pour $r \geq \beta$. Par suite, on en déduit que le système $\{x_i^\alpha\}$ converge vers le point x_i , ($i = 1, 2$).

Inversement, si deux systèmes ordonnés $\{x_1^\alpha\}$ et $\{x_2^\alpha\}$ convergent respectivement vers les points x_1 et x_2 , il existe alors un suffixe β tel que $x_1^\beta \in V_\alpha(x_1)$ et $x_2^\beta \in V_\alpha(x_2)$ pour tout $r \geq \beta$, puisque le caractère $\mathfrak{A}$ de R est filtrant à droite. Il en résulte que le système $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ converge vers le point (x_1, x_2) .

(2): Soit $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ un système caractéristique et s'attroupant vers un point (x_1, x_2) . Par l'hypothèse, quel que soit α , il existe un suffixe $\varphi(\alpha)$ tel que $\varphi(\alpha) \geq \alpha$ et $(x_1^{\varphi(\alpha)}, x_2^{\varphi(\alpha)}) \in V_\alpha(x_1) \times V_\alpha(x_2)$. Il en résulte que le sous-système $\{x_i^{\varphi(\alpha)}\}$ de $\{x_i^\alpha\}$ converge vers le point x_i , ($i = 1, 2$). D'autre part, R étant monotone, le système $\{x_2^{\varphi(\alpha)}\}$ s'attroupe sans doute vers le point x_2 .

Réciproquement, soit $\{x_1^{\varphi(\alpha)}\}$ converge vers un point x_1 et soit $\{x_2^{\varphi(\alpha)}\}$ s'attroupe vers un point x_2 . Alors, quel que soit α , il existe un suffixe β_1 tel que $x_1^{\beta_1} \in V_\alpha(x_1)$ pour tout $\beta \geq \beta_1$, et pour chaque β_2 un suffixe γ tel que $r \geq \beta_2$ et $x_2^{\gamma} \in V_\alpha(x_2)$. Par conséquent, en tenant compte du fait que $\mathfrak{A}$ est filtrant à droite, il existe pour deux suffixes arbitraires α et β un suffixe r tel que $(x_1^{\varphi(r)}, x_2^{\varphi(r)}) \in V_\alpha(x_1) \times V_\alpha(x_2)$; donc le système $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ s'attroupe vers le point (x_1, x_2) , c.q.f.d.

De même, on a les

Théorème 24. *Si R est monotone et à caractère compact, alors l'espace composé $R \times R$ l'est également.*

Démonstration. Soit $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ un système caractéristique dans $R \times R$. R étant à caractère compact, il y a un sous-système $\{x_1^{\varphi(\alpha)}\}$ de $\{x_1^\alpha\}$ tel qu'il converge vers un point x_1 . De plus, le sous-système $\{x_2^{\varphi(\alpha)}\}$ de $\{x_2^\alpha\}$ s'attroupe vers un point x_2 , puisque R est à caractère compact. Donc le système $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ s'attroupe vers le point (x_1, x_2) selon (2) du théorème 23, c.q.f.d.

Théorème 25. *Si R est monotone et à caractère complet, alors l'espace composé $R \times R$ l'est également.*

Démonstration. Soit $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ un système caractéristique et fondamental dans $R \times R$. Alors, à chaque suffixe α correspond un point (y_1^α, y_2^α) tel que le système $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ est résiduel avec lui-même dans le voisinage $V_\alpha(y_1^\alpha) \times V_\alpha(y_2^\alpha)$; Ce qui montre que les systèmes $\{x_1^\alpha\}$ et $\{x_2^\alpha\}$ sont fondamentaux dans R . R étant à caractère complet, le

système $\{x_1^\alpha\}$ s'attroupe vers un point x_1 et par conséquent il contient un sous-système $\{x_1^{\alpha(\omega)}\}$ tel qu'il converge vers le point x_1 . Dans ce cas, comme on le sait, le sous-système $\{x_2^{\alpha(\omega)}\}$ de $\{x_2^\alpha\}$ étant encore fondamental, il s'attroupe vers un point x_2 . Par suite, le système $\{(x_1^\alpha, x_2^\alpha)\}$ s'attroupe vers le point (x_1, x_2) selon (2) du théorème 23, c.q.f.d.

Pour avancer le raisonnement, nous posons d'abord une définition nécessaire :

Une fonction biunivoque $y = f(x)$ est dite *quasi-homéomorphe*, lorsqu'elle est quasi-continue et admet, en outre, une fonction inverse quasi-continue.

Deux ensembles X et Y situés dans deux espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont dits *quasi-homéomorphes*, lorsqu'il existe une fonction quasi-homéomorphe $y = f(x)$ qui transforme X en Y .

Cela posé, nous allons démontrer le

Théorème 26. *Soit $y = f(x)$ une fonction quasi-continue d'un espace additif et quantitatif $\mathfrak{X}$ dans un espace quantitatif $\mathfrak{Y}$. Alors, l'ensemble I des points $(x, f(x))$, x parcourant $\mathfrak{X}$, est quasi-homéomorphe à I .*

Démonstration. Faisons correspondre à un point $x \in \mathfrak{X}$ un point $(x, f(x))$ de I et désignons cette correspondance par $(x, f(x)) = F(x)$. Il est évident que $F(x)$ est biunivoque.

$f(x)$ étant quasi-continue sur $\mathfrak{X}$, quels que soient un point $(x, y) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ et son voisinage $V_\alpha(x) \times U_\lambda(y)$, nous pouvons faire correspondre à x et à λ un suffixe β et un point $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$ tels que $f(V_\beta(x)) \subset U_\lambda(\bar{y})$. En outre, $\mathfrak{X}$ étant additif, il existe un voisinage $V_\gamma(x)$ contenu dans la partie commune $V_\alpha(x) \cdot V_\beta(x)$. Par conséquent, il vient

$$F(V_\gamma(x)) \subset V_\gamma(x) \times f(V_\gamma(x)) \subset V_\alpha(x) \times f(V_\beta(x)) \subset V_\alpha(x) \times U_\lambda(\bar{y}) ;$$

Ce qui montre que la fonction $F(x)$ est quasi-continue.

Réciproquement, il est évident que la fonction inverse de $F(x)$ est continue, donc elle est à forte raison quasi-continue, c.q.f.d.

Ensuite considérons un prolongement d'une fonction quasi-continue définie sur $X \subset \mathfrak{X}$; Pour cela, il est commode de considérer l'*oscillation d'une fonction à un point*.

Soit x un point de $\mathfrak{X}$ et soit λ un suffixe donné d'avance. Si l'on a

$$f(V_\alpha(x) \cdot X) - U_\lambda(\bar{y}) \neq \phi,$$

quels que soient α et $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$, on dit que l'oscillation de la fonction f au point x est supérieure à $\frac{1}{\lambda}$ et désigne ce fait par symbole

$$\omega(f(x)) > \frac{1}{\lambda}.$$

En outre, quel que soit λ , s'il existe un voisinage $V_\alpha(x)$ et un point $\bar{y}$ convenablement choisis tels que

$$f(V_\alpha(x) \cdot X) \subset U_\lambda(\bar{y}),$$

on dit que l'oscillation de la fonction f au point x est *nulle*, et on le désigne par symbole

$$\omega(f(x)) = 0.$$

D'après cette convention, on a immédiatement le

Théorème 27. *Pour qu'une fonction $f(x)$ soit quasi-continue à un point x , il faut et il suffit que $\omega(f(x)) = 0$.*

Théorème 28. *Soit $f(x)$ une fonction arbitraire définie sur un ensemble $X \subset \mathfrak{X}$. L'ensemble F_λ des points x pour lesquels on a $\omega(f(x)) > \frac{1}{\lambda}$ est fermé.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{F_\lambda}$, alors on a $V_\alpha(x) \cdot F_\lambda \neq \emptyset$ quel que soit α . En prenant un point $x_\alpha \in V_\alpha(x) \cdot F_\lambda$, il existe un voisinage $V_\beta(x_\alpha)$ contenu dans $V_\alpha(x)$ et il vient $f(V_\beta(x_\alpha) \cdot X) \subset f(V_\alpha(x) \cdot X)$. De plus, étant $x_\alpha \in F_\lambda$, on en conclut que $f(V_\beta(x_\alpha) \cdot X)$ n'est contenu dans aucun voisinage $U_\lambda(\bar{y})$, $\bar{y} \in \mathfrak{Y}$. Par suite, $f(V_\alpha(x) \cdot X)$ n'est contenu dans aucun $U_\lambda(\bar{y})$, il vient donc $\omega(f(x)) > \frac{1}{\lambda}$. Il en résulte que $x \in F_\lambda$, c.-à-d. que F_λ est fermé, c.q.f.d.

Théorème 29. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces quantitatifs et possédant le même caractère $\mathfrak{A}$. De plus, supposons que $\mathfrak{Y}$ vérifie les deux conditions :*

(1) $\mathfrak{Y}$ est à caractère complet.

(2) *Quel que soit un suffixe $\lambda \in \mathfrak{A}$, il existe un suffixe μ dépendant de λ tel que $\overline{U_\mu(y)} \subset U_\lambda(y)$, quel que soit $y \in \mathfrak{Y}$.*

Dans ce cas, si une fonction $y = f(x)$ est quasi-continue définie sur un ensemble $X \subset \mathfrak{X}$, alors la fonction f se laisse prolonger d'une façon quasi-continue définie sur un ensemble $X^ \supset X$ qui est une partie commune à un ensemble fermé et à un ensemble G_α .*

Démonstration. Désignons par X^* l'ensemble des points x de $\bar{X}$ tels que $\omega(f(x)) = 0$. f étant quasi-continue sur X , il est évident que $X \subset X^*$.

Cela posé, définissons une fonction $f^*(x)$ comme suit :

Si $x_0 \in X$, alors on pose $f^*(x_0) = f(x_0)$.

Si $x_0 \in X^* - X$, il existe évidemment un système caractéristique $\{x_\alpha\} \subset X$ convergeant vers le point x_0 . Or, étant $\omega(f(x_0)) = 0$, il existe pour chaque suffixe λ un suffixe β et un point y tels que

$$(1) \quad f(V_\beta(x_0)) \subset U_\lambda(y).$$

Cependant, le système $\{x_\alpha\}$ convergeant vers le point x_0 , il est résiduel avec lui-même dans $V_\beta(x_0)$; donc le système caractéristique $\{f(x_\alpha)\}$ dans $\mathfrak{Y}$ est aussi résiduel avec lui-même dans $U_\lambda(y)$. Il en résulte que, λ étant arbitraire, le système $\{f(x_\alpha)\}$ est fondamental. Par l'hypothèse, $\mathfrak{Y}$ étant à caractère complet, il existe un point adhérent y_0 de $\{f(x_\alpha)\}$; Cela posé, on pose $f^*(x_0) = y_0$ ¹⁾.

On a ainsi une fonction $y = f^*(x)$ définie sur X^* et il reste de démontrer que la fonction $f^*(x)$ est quasi-continue sur X^* .

Soit $x_0 \in X^*$ et soit $V_\gamma(x_0)$ un voisinage arbitraire, alors on a

$$(2) \quad \begin{aligned} f^*(V_\gamma(x_0) \cdot X^*) &= f^*(V_\gamma(x_0) \cdot X) + f^*(V_\gamma(x_0) \cdot (X^* - X)) \\ &= f(V_\gamma(x_0) \cdot X) + f^*(V_\gamma(x_0) \cdot (X^* - X)). \end{aligned}$$

En prenant un point $y' \in f^*(V_\gamma(x_0) \cdot (X^* - X))$, il existe un point $x' \in V_\gamma(x_0) \cdot (X^* - X)$ tel que $y' = f^*(x')$. D'après la définition de $f^*(x')$, il existe un système caractéristique $\{x_\alpha\}$ formé de points de X tel qu'il converge vers le point x' et $f^*(x')$ est un point adhérent de $\{f(x_\alpha)\}$. Or, $V_\gamma(x_0)$ étant ouvert et $x' \in V_\gamma(x_0)$, il y a un voisinage $V_\beta(x')$ tel que $V_\beta(x') \subset V_\gamma(x_0)$ et dans lequel $\{x_\alpha\}$ est résiduel avec lui-même. Par conséquent, $\{f(x_\alpha)\}$ est résiduel avec lui-même dans $f(V_\gamma(x_0)) = f(V_\gamma(x_0) \cdot X)$; il vient donc $y' \in \overline{f(V_\gamma(x_0) \cdot X)}$ et par suite il en résulte que $f^*(V_\gamma(x_0) \cdot (X^* - X)) \subset \overline{f(V_\gamma(x_0) \cdot X)}$. Par conséquent, on a selon (2)

$$(3) \quad f^*(V_\gamma(x_0) \cdot X^*) \subset \overline{f(V_\gamma(x_0) \cdot X)}.$$

Or, étant $\omega(f(x_0)) = 0$, on peut faire correspondre à chaque λ un

1) Si $\mathfrak{Y}$ vérifie la condition (T_2^*) , comme on peut le facilement vérifier, l'ensemble des points adhérents du système $\{f(x_\alpha)\}$ est formé d'un seul point. Dans ce cas la fonction $f^*(x)$ est uniquement définie.

suffixe μ tel que $\overline{U_\mu(y)} \subset U_\lambda(y)$, quel que soit $y \in \mathfrak{Y}$, et il y a pour ce μ un suffixe γ tel que $f(V_\gamma(x_0) \cdot X) \subset U_\mu(y)$ pour un point y convenablement choisi. D'après (3), on a $f^*(V_\gamma(x_0) \cdot X^*) \subset \overline{U_\mu(y)}$ et il vient donc $f^*(V_\gamma(x_0) \cdot X^*) \subset U_\lambda(y)$. λ étant arbitraire, on a $\omega(f^*(x_0)) = 0$ et il en résulte que $f^*(x)$ est quasi-continue au point x_0 .

Finalement, il est évident, selon la démonstration du théorème 28, que $X^* = \bar{X} - \sum_{\lambda \in \mathfrak{A}} F_\lambda$ où F_λ est un ensemble fermé et défini dans le théorème 28; ce qui montre que le théorème est vrai, c.q.f.d.

A la fin de ce paragraphe, nous considérons une fonction dite *fonction* $\frac{1}{\alpha}$.

Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces possédant le même caractère $\mathfrak{A}$ et soit $y = f(x)$ une fonction continue de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Soit α un suffixe donné d'avance.

Quels que soient deux points x_1 et x_2 de l'image inverse $f^{-1}(y)$ d'un point y quelconque, s'il existe la relation

$$x_1 \in S_\alpha(x_2),$$

la fonction $y = f(x)$ est dite *fonction* $\frac{1}{\alpha}$.

Ceci étant posé, on a le

Théorème 30. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces possédant le même caractère monotone $\mathfrak{A}$. De plus, soit $\mathfrak{X}$ à caractère compact et soit $\mathfrak{Y}$ un espace vérifiant la condition (T_2^*) .*

Si $y = f(x)$ est une fonction $\frac{1}{\alpha}$, il existe un suffixe β dépendant du suffixe α tel que, quels que soient deux points x_1 et x_2 tels que $x_1 \in S_\alpha(x_2)$, il se trouve que

$$f(x_1) \in S_\beta(f(x_2)).$$

Démonstration. Supposons par impossible que, quel que soit β , il existe deux points x'_β et x''_β tels que

$$(*) \quad x'_\beta \in S_\alpha(x''_\beta) \quad \text{et} \quad f(x'_\beta) \in S_\beta(f(x''_\beta)).$$

$\mathfrak{X}$ étant à caractère compact, le système $\{x'_\beta\}$ possède un sous-système $\{x'_{\varphi(\beta)}\}$, ($\varphi(\beta) \geq \beta$), qui converge vers un point x' . Par conséquent, en posant $\bar{x}'_\beta = x'_{\varphi(\beta)}$, le système $\{\bar{x}'_\beta\}$ converge vers le point x' . D'autre part, le sous-système $\{x''_{\varphi(\beta)}\}$ de $\{x''_\beta\}$ étant confinal avec $\{x''_\beta\}$, si l'on pose $\bar{x}''_\beta = x''_{\varphi(\beta)}$, le système caractéristique $\{\bar{x}''_\beta\}$ s'at-

troupe vers un point x'' , puisque $\mathfrak{X}$ est à caractère compact. Or, en posant $y' = f(x')$ et $y'' = f(x'')$, on aura $y' = y''$; Car, $\mathfrak{Y}$ vérifiant la condition (T_2^*) , si l'on suppose que $y' \neq y''$, il existe un suffixe r tel que, quel que soit un point y , le voisinage $U_\gamma(y)$ est disjoint d'un au moins des $U_\gamma(y')$ et $U_\gamma(y'')$. Or, $U_\gamma(y')$ et $U_\gamma(y'')$ étant ouverts et $f(x)$ étant continue, il y a deux voisinages $V_\delta(x')$ et $V_\delta(x'')$ tels que

$$f(V_\delta(x')) \subset U_\gamma(y') \quad \text{et} \quad f(V_\delta(x'')) \subset U_\gamma(y''), \quad \text{où } \delta \geq r.$$

Comme $\{\bar{x}_\beta'\}$ est résiduel avec lui-même dans $V_\delta(x')$ et $\{\bar{x}_\beta''\}$, final avec lui-même dans $V_\gamma(x'')$, il existe un suffixe $\varepsilon \geq \delta$ tel que

$$\bar{x}_\varepsilon' \in V_\delta(x') \quad \text{et} \quad \bar{x}_\varepsilon'' \in V_\delta(x'').$$

Par conséquent, on a $f(x'_{\varphi(\varepsilon)}) \in U_\gamma(y')$ et $f(x''_{\varphi(\varepsilon)}) \in U_\gamma(y'')$, et donc, selon la définition de r , $U_\gamma(y)$ ne contient pas l'un au moins des $f(x'_{\varphi(\varepsilon)})$ et $f(x''_{\varphi(\varepsilon)})$; d'où $f(x'_{\varphi(\varepsilon)}) \notin S_\gamma(f(x''_{\varphi(\varepsilon)}))$. Cependant, étant $\varphi(\varepsilon) \geq \varepsilon \geq \delta \geq r$, on a $f(x'_{\varphi(\varepsilon)}) \in S_{\varphi(\varepsilon)}(f(x''_{\varphi(\varepsilon)}))$; ce qui contredit à la propriété (*), il vient donc $y' = y''$.

Puis, nous allons démontrer que $x' \neq x''$. En effet, si $x' = x''$, il résulte que $\{\bar{x}_\beta'\}$ est résiduel avec lui-même dans $V_\alpha(x')$ et $\{\bar{x}_\beta''\}$, final avec lui-même dans $V_\alpha(x'') = V_\alpha(x')$. Par conséquent, il existe un suffixe β tel que $\bar{x}_\beta' \in V_\alpha(x')$ et $\bar{x}_\beta'' \in V_\alpha(x'')$. Donc les deux points $x'_{\varphi(\beta)}$ et $x''_{\varphi(\beta)}$ appartiennent à $V_\alpha(x')$, et il vient $x'_{\varphi(\beta)} \in S_\alpha(x''_{\varphi(\beta)})$. Ce fait contredit à la formule (*); on a donc $x' \neq x''$.

Des résultats obtenus plus haut, on a $x' \neq x''$ et $f(x') = f(x'')$. Or, $f(x)$ étant une fonction $\frac{1}{\alpha}$, il résulte que $x' \in S_\alpha(x'')$; ce revient à dire qu'il y a un point x tel que $x' + x'' \in V_\alpha(x)$. $V_\alpha(x)$ étant ouvert, il existe un suffixe r de façon que $V_\gamma(x') + V_\gamma(x'') \subset V_\alpha(x)$. Par conséquent, comme on le voit, il y a deux points $\bar{x}_\beta'$ et $\bar{x}_\beta''$ tels que $\bar{x}_\beta' \in V_\gamma(x')$ et $\bar{x}_\beta'' \in V_\gamma(x'')$. Il en résulte que $\bar{x}_\beta' + \bar{x}_\beta'' \in V_\alpha(x)$ et par suite que $x'_{\varphi(\beta)} \in S_\alpha(x''_{\varphi(\beta)})$. Ce qui contredit à la formule (*), c.q.f.d.

§ 6. Les espaces à structure uniforme.

Un espace quantitatif est dit à structure uniforme, lorsqu'il existe un règlement déterminant une relation par rapport aux proximités parmi des points convenablement choisis¹⁾.

Nous considérons tout d'abord un théorème qui se rattache à l'espace à structure uniforme introduit par M. Weil²⁾.

Quant à 1) et 2), voir les notes au bas de la page suivante.

L'espace introduit par M. Weil est l'un dans lequel la famille des voisinages vérifie les trois conditions suivantes :

(U₁) Quels que soient un point x et un suffixe α , le voisinage $V_\alpha(x)$ est ouvert et $x = \bigcap_{\alpha \in \mathcal{V}} V_\alpha(x)$.

(U₂) Quels que soient deux suffixes α et β , il y a un suffixe γ tel que, quel que soit x ,

$$V_\gamma(x) \subset V_\alpha(x) \cdot V_\beta(x).$$

(U₃) A chaque suffixe α on peut faire correspondre un suffixe β tel que

$$V_\beta(x) \cdot V_\beta(y) \neq \emptyset \rightarrow V_\beta(y) \subset V_\alpha(x),$$

quels que soient x et y .

Comme on le sait, tel espace est complètement régulier et l'inverse de cette proposition est aussi vraie. Cependant, nous pouvons démontrer que l'espace quantitatif, additif et satisfaisant aux conditions (U₁) et (U₃) est encore complètement régulier ; à savoir, nous pouvons démontrer le

Théorème 1. *Un espace quantitatif, additif et satisfaisant aux conditions (U₁) et (U₃) est complètement régulier.*

Pour démontrer ce théorème, nous donnerons tout d'abord deux lemmes utiles.

Lemme 1. *A un suffixe α on peut faire correspondre un suffixe β tel que, quel que soit un ensemble E , l'inclusion suivante se trouve :*

$$\overline{S_\beta(S_\beta(E))} \subset S_\alpha(E).$$

Démonstration. D'après (U₃), on peut faire correspondre à un

1) Par exemple, $V_\alpha(x)$ étant un voisinage d'un point x , il existe alors un suffixe β déterminé par α et par x tel que, en symboles logiques :

- | | | |
|-----|--|---------------------|
| (A) | $\{V_\beta(x) \cdot V_\beta(y) \neq \emptyset\} \rightarrow \{V_\beta(y) \subset V_\alpha(x)\},$ | quel que soit y ; |
| (B) | $\{V_\beta(x) \cdot V_\beta(y) \neq \emptyset\} \rightarrow \{y \in V_\alpha(x)\},$ | quel que soit y ; |
| (C) | $\{y \in V_\beta(x)\} \rightarrow \{V_\beta(y) \subset V_\alpha(x)\},$ | quel que soit y ; |
| (D) | $\{x \in V_\beta(y)\} \rightarrow \{V_\beta(y) \subset V_\alpha(x)\},$ | quel que soit y ; |
| (E) | $\{x \in V_\beta(y)\} \rightarrow \{x \in V_\alpha(y)\},$ | quel que soit y , |

et les cinq relations (a), (b), ..., (e) obtenues par l'échange de x et de y dans les cinq relations (A), (B), ..., (E) respectivement.

Voir notre article : Sur les espaces à structure uniforme. Jour. of the Faculty of Sci. Hokkaido Imp. Univ., Ser. I Vol. X (1943).

2) A. Weil : Sur les espaces à structure uniforme etc., Actualites Sci. et ind., (Paris), No. 551 (1938).

suffixe α un suffixe $\varphi(\alpha)$ tel que

$$(1) \quad V_{\varphi(\alpha)}(x) \cdot V_{\varphi(\alpha)}(y) \neq \phi \rightarrow V_{\varphi(\alpha)}(y) \subset V_{\alpha}(x),$$

quels que soient x et y . De même, d'après (U_3) , au suffixe $\varphi(\alpha)$ correspond un suffixe β tel que, quels que soient x et y ,

$$(2) \quad V_{\beta}(x) \cdot V_{\beta}(y) \neq \phi \rightarrow V_{\beta}(y) \subset V_{\varphi(\alpha)}(x).$$

Ceci étant établi, soit x un point de $\overline{S_{\beta}(S_{\beta}(E))}$ et en tenant compte de la définition de l'ensemble stelliforme $S_{\beta}(S_{\beta}(E))$, il existe deux points y et z tels qu'ils vérifient les trois relations suivantes :

$$(3) \quad V_{\beta}(x) \cdot V_{\beta}(y) \neq \phi,$$

$$(4) \quad V_{\beta}(y) \cdot V_{\beta}(z) \neq \phi,$$

$$(5) \quad V_{\beta}(z) \cdot E \neq \phi.$$

Or, selon (3) et (2) on a, par l'échange de x et y ,

$$(6) \quad V_{\beta}(x) \subset V_{\varphi(\alpha)}(y),$$

et en posant $x = z$ dans (2) et en vertu de (4), on a

$$(7) \quad V_{\beta}(y) \subset V_{\varphi(\alpha)}(z).$$

D'après (3), (6) et (7), on a évidemment $V_{\varphi(\alpha)}(y) \cdot V_{\varphi(\alpha)}(z) \neq \phi$. Par suite, en posant $x = z$ dans (1), on a $V_{\varphi(\alpha)}(y) \subset V_{\alpha}(z)$. Donc il vient selon (6)

$$(8) \quad x \in V_{\alpha}(z).$$

D'autre part, en posant $x = y = z$ dans (2) et (1), on a $V_{\beta}(z) \subset V_{\varphi(\alpha)}(z) \subset V_{\alpha}(z)$; Il en résulte selon (5) que

$$(9) \quad V_{\alpha}(z) \cdot E \neq \phi.$$

Par conséquent, d'après (8) et (9) on a $x \in S_{\alpha}(E)$; Ce qui montre que $\overline{S_{\beta}(S_{\beta}(E))} \subset S_{\alpha}(E)$, c.q.f.d.

Lemme 2. Soit G un ensemble ouvert et non-vidé et soit $x \in G$. Il existe alors un suffixe α déterminé par G et x tel que

$$S_{\alpha}(S_{\alpha}(x)) \subset G.$$

Démonstration. G étant ouvert et $x \in G$, il existe un voisinage

$V_\gamma(x)$ contenu dans G . Cela posé, d'après (U_3) on peut faire correspondre au suffixe γ un suffixe β tel que

$$V_\beta(x) \cdot V_\beta(y) \neq \phi \rightarrow V_\beta(y) \subset V_\gamma(x),$$

quels que soient x et y . Il en résulte, en tenant compte de la définition de $S_\beta(V_\beta(x))$, que $S_\beta(V_\beta(x)) \subset V_\gamma(x)$; d'où $S_\beta(x) \subset V_\gamma(x)$. Par suite, il existe un suffixe α déterminé par le lemme 1 tel que $S_\alpha(S_\alpha(x)) \subset S_\beta(x)$; il vient donc $S_\alpha(S_\alpha(x)) \subset V_\gamma(x) \subset G$, c.q.f.d.

Ces préliminaires étant établis, nous allons donner la

Démonstration du théorème: Soit x_0 un point et soit F un ensemble fermé ne contenant pas le point x_0 . Il y a alors un voisinage $V_{\alpha_0}(x_0)$ disjoint de F ; $V_{\alpha_0}(x_0)$ étant ouvert, il y a du lemme 2 un suffixe α_1 tel que

$$(1) \quad S_{\alpha_1}(S_{\alpha_1}(x_0)) \subset V_{\alpha_0}(x_0).$$

Puis, quels que soient un ensemble E et un suffixe α_n , ($n \geq 1$), il y a du lemme 1 un suffixe α_{n+1} déterminé par α_n (et indépendant de E) tel que

$$(2) \quad \overline{S_{\alpha_{n+1}}(S_{\alpha_{n+1}}(E))} \subset S_{\alpha_n}(E).$$

Posons
$$G_1 = S_{\alpha_1}(S_{\alpha_1}(x_0)),$$

et à un nombre rationnel diadique $r = \frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2}} + \dots + \frac{1}{2^{n_k}}$, où n_i est un nombre naturel et $n_1 < n_2 < \dots < n_k$, faisons correspondre un ensemble ouvert G_r comme suit:

$$G_r = S_{\alpha_{n_k}}(S_{\alpha_{n_{k-1}}}(\dots (S_{\alpha_{n_2}}(S_{\alpha_{n_1}}(x))) \dots)).$$

Or, r' étant un nombre rationnel diadique $r' = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \dots + \frac{1}{2^{m_l}}$ tel que $r' > r$, il existe évidemment un nombre naturel i de façon que:

$$i \leq k, i \leq l \text{ et } n_1 = m_1, n_2 = m_2, \dots, n_{i-1} = m_{i-1}, n_i > m_i.$$

Par suite, en remarquant que $n_i \geq m_i + 1$ et en tenant compte de la définition du suffixe α_n , on a

$$G_{r'} \supset S_{\alpha_{n_i}}(E) \supset \overline{S_{\alpha_{n_i}}(S_{\alpha_{n_i}}(E))}$$

où $E = S_{\alpha_{m_{i-1}}}(S_{\alpha_{m_{i-2}}}(\dots (S_{\alpha_{m_1}}(x_0)) \dots))$. De plus, on a du lemme 1

$$S_{a_{n_i}}(S_{a_{n_i}}(E)) \supset \overline{S_{a_{n_{i+1}}}(S_{a_{n_{i+1}}}(S_{a_{n_i}}(E)))}.$$

De même, en employant le lemme 1 à plusieurs reprises, on a finalement :

$$G_{r'} \supset S_{a_{n_k}}(S_{a_{n_k}}(S_{a_{n_{k-1}}}(S_{a_{n_{k-2}}}(\dots (S_{a_{n_{i+1}}}(S_{a_{n_i}}(E)) \dots))) \supset \bar{G}_r.$$

Puis, nous définirons des ensembles ouverts G_t , $(-\infty < t < \infty)$, comme suit :

$$\begin{aligned} G_t &= \sum_{r \leq t} G_r && \text{pour } 0 < t \leq 1, \\ G_t &= R && \text{pour } 1 < t, \\ G_t &= \phi && \text{pour } t \leq 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, on peut facilement vérifier que, quels que soient $t < t'$,

$$\bar{G}_t \subset G_{t'}.$$

Ceci étant posé, nous définirons une fonction $f(x)$ définie sur l'espace considéré telle que :

$$f(x) = \text{borne inférieure des } t \text{ tels que } x \in G_t.$$

Alors, comme on peut le vérifier, $f(x)$ est une fonction continue définie sur l'espace entier telle que $f(x_0) = 0$, $f(x) = 1$ pour tout $x \in F$ et $0 \leq f(x) \leq 1$, quel que soit $x \in R$. Ainsi, la démonstration est établie, c.q.f.d.

Convergence d'un système de fonctions. Tout d'abord, nous posons les définitions :

Soit $\mathfrak{X}$ un espace topologique et soit $\mathfrak{Y}$ un espace quantitatif. Soient $y = \varphi(x)$ et $\mathfrak{F} = \{f(x)\}$ une fonction et une famille de fonctions définies de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$.

Si l'on peut faire correspondre à un point x_0 et à un suffixe λ arbitraire une fonction $f_{(x_0, \lambda)}(x)$ de $\mathfrak{F}$ de façon que :

$$f_{(x_0, \lambda)}(x_0) \in U_\lambda(\varphi(x_0)),$$

alors nous dirons que la famille $\mathfrak{F}$ converge vers la fonction $\varphi(x)$ au point x_0 .

De plus, si la fonction $f_{(x_0, \lambda)}(x)$ vérifie cette condition qu'il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que

$f(x) \in U_\lambda(\varphi(x))$, quel que soit $x \in V(x_0)$,

nous dirons que la famille $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers la fonction $\varphi(x)$ au point x_0 . En particulier, si la fonction $f_{(x_0, \lambda)}(x)$ est indépendante du point x_0 , en d'autres termes, si, pour un suffixe λ arbitraire, il existe une fonction de $\mathfrak{F}$, soit $f_\lambda(x)$, telle que

$f_\lambda(x) \in U_\lambda(\varphi(x))$, quel que soit x ,

alors nous dirons que la famille $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers la fonction $\varphi(x)$.

Cela posé, nous avons les

Théorème 2. Soit $\mathfrak{Y}$ un espace vérifiant la condition (B) et soit $\mathfrak{F} = \{f(x)\}$ une famille de fonctions continues de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Si la famille $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers une fonction $\varphi(x)$ à un point x_0 , alors $\varphi(x)$ est continue au point x_0 .

Démonstration. D'après la condition (B), pour le point $\varphi(x_0)$ et un suffixe λ il existe un suffixe μ tel que

$$(1) \quad U_\mu(\varphi(x_0)) \cdot U_\mu(y) \neq \emptyset \rightarrow y \in U_\lambda(\varphi(x_0)),$$

quel que soit y . Encore, selon l'hypothèse que $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers la fonction φ au point x_0 , il existe pour le suffixe μ une fonction $f_{(x_0, \mu)}(x)$ et un voisinage $V_1(x_0)$ de façon que

$$(2) \quad f_{(x_0, \mu)}(x) \in U_\mu(\varphi(x)),$$

quel que soit $x \in V_1(x_0)$. D'autre part, $U_\mu(\varphi(x_0))$ étant ouvert et $f_{(x_0, \mu)}(x_0) \in U_\mu(\varphi(x_0))$, il existe un voisinage $U_1(f_{(x_0, \mu)}(x_0))$ tel que

$$(3) \quad U_1(f_{(x_0, \mu)}(x_0)) \subset U_\mu(\varphi(x_0)).$$

De plus, $f_{(x_0, \mu)}(x)$ étant continue au point x_0 , il y a pour le voisinage $U_1(f_{(x_0, \mu)}(x_0))$ un voisinage $V_2(x_0)$ tel que

$$(4) \quad f_{(x_0, \mu)}(V_2(x_0)) \subset U_1(f_{(x_0, \mu)}(x_0)).$$

$\mathfrak{X}$ étant un espace additif, il y a un voisinage $V(x_0)$ contenu dans le produit $V_1(x_0) \cdot V_2(x_0)$. Cela posé, si l'on prend un point $x \in V(x_0)$, alors en tenant compte de (2), (4) et (3), on a selon (1)

$$\varphi(x) \in U_\lambda(\varphi(x_0)).$$

Ce qui montre que $\varphi(x)$ est continue au point x_0 , c.q.f.d.

L'inverse du théorème 2 en un sens, c'est le

Théorème 3. Soit $\mathfrak{Y}$ un espace vérifiant la condition (d) et soit $\mathfrak{F} = \{f(x)\}$ une famille de fonctions continues définies de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$. Si $\mathfrak{F}$ converge vers une fonction $\varphi(x)$ et celle-ci est continue à un point x_0 , alors $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers la fonction $\varphi(x)$ au point x_0 .

Démonstration. D'après (d), il existe pour $U_\lambda(\varphi(x_0))$ un suffixe μ tel que

$$(1) \quad y \in U_\mu(\varphi(x_0)) \rightarrow U_\mu(\varphi(x_0)) \subset U_\lambda(y), \text{ quel que soit } y.$$

$\mathfrak{F}$ convergeant vers $\varphi(x)$, pour μ et x_0 il existe une fonction $f_{(x_0, \mu)}(x)$ telle que

$$(2) \quad f_{(x_0, \mu)}(x_0) \in U_\mu(\varphi(x_0)).$$

$U_\mu(\varphi(x_0))$ étant ouvert, il existe un voisinage $U_\nu(f_{(x_0, \mu)}(x_0))$ tel que

$$(3) \quad U_\nu(f_{(x_0, \mu)}(x_0)) \subset U_\mu(\varphi(x_0)).$$

D'autre part, $f_{(x_0, \mu)}(x)$ étant continue au point x_0 , il y a un voisinage $V_1(x_0)$ de façon que

$$(4) \quad f_{(x_0, \mu)}(V_1(x_0)) \subset U_\nu(f_{(x_0, \mu)}(x_0)).$$

De plus, $\varphi(x)$ étant continue au point x_0 , il y a un $V_2(x_0)$ tel que

$$(5) \quad \varphi(V_2(x_0)) \subset U_\mu(\varphi(x_0)).$$

Or, x étant un point d'un voisinage $V(x_0)$ contenu dans la partie commune $V_1(x_0) \cdot V_2(x_0)$, alors on a $U_\mu(\varphi(x_0)) \subset U_\lambda(\varphi(x))$ selon (5) et (1), et $f_{(x_0, \mu)}(x) \in U_\mu(\varphi(x_0))$ selon (4) et (3). Par conséquent, on a

$$f_{(x_0, \mu)}(x) \in U_\lambda(\varphi(x)),$$

quel que soit $x \in V(x_0)$. Ce qui montre que la famille $\mathfrak{F}$ converge uniformément vers la fonction $\varphi(x)$ au point x_0 , c.q.f.d.

Théorème 4. Soit $\mathfrak{X}$ un espace jouissant de la condition (C). Soit F un ensemble à caractère compact en soi dans $\mathfrak{X}$ et soit $\mathfrak{F} = \{G\}$ une famille d'ensembles ouverts, qui couvre F . Alors, il existe un suffixe α déterminé par F et $\mathfrak{F}$ tel que, quel que soit un point $x \in F$, le voisinage $V_\alpha(x)$ est contenu dans un ensemble G de $\mathfrak{F}$.

Démonstration. Supposons au contraire que le théorème ne soit pas vrai, c.-à-d. que pour chaque suffixe α il existe un point $x_\alpha \in F$

tel que le voisinage $V_\alpha(x_\alpha)$ n'est contenu dans aucun ensemble de $\mathfrak{F}$. Or, si l'on considère l'ensemble des points $\{x_\alpha\}$ comme un système caractéristique, F étant à caractère compact en soi, il existe un point adhérent de lui, qui appartient à F , soit x . Etant $x \in F$, il existe un ensemble ouvert G de $\mathfrak{F}$ de façon que $x \in G$; il existe donc un voisinage $V_\alpha(x)$ tel que

$$(1) \quad V_\alpha(x) \subset G.$$

D'autre part, en vertu de la condition (C) il existe pour $V_\alpha(x)$ un suffixe β déterminé par x et α tel que, quel que soit y ,

$$(2) \quad y \in V_\beta(x) \rightarrow V_\beta(y) \subset V_\alpha(x).$$

Cependant, x étant un point adhérent du système $\{x_\alpha\}$, il y a un suffixe $\gamma \geq \beta$ tel que

$$(3) \quad x_\gamma \in V_\beta(x).$$

Etant $\gamma \geq \beta$, on a $V_\gamma(x_\gamma) \subset V_\beta(x_\gamma)$; il vient donc $V_\beta(x_\gamma) \subset V_\alpha(x)$ selon (3) et (2). Par conséquent, on a $V_\gamma(x_\gamma) \subset G$ selon (1). Nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Du théorème on a les

Corollaire 1. Soit F un ensemble à caractère compact en soi dans $\mathfrak{X}$ et soit $\mathfrak{Y}$ un espace quantitatif. Soit $y = f(x)$ une fonction quasi-continue de F dans $\mathfrak{Y}$. Alors la fonction f est uniformément quasi-continue sur F .

Démonstration. $f(x)$ étant quasi-continue sur F , à un suffixe λ et à un point $x \in F$ correspondent un suffixe α et un point $y^* \in \mathfrak{Y}$ tels que

$$(4) \quad f(V_\alpha(x) \cdot F) \subset U_\lambda(y^*).$$

A chaque point $x \in F$ faisons correspondre le voisinage $V_\alpha(x)$ ainsi définis, alors la famille des voisinages $\{V_\alpha(x)\}$ couvre l'ensemble F . Par suite, il y a du théorème un suffixe β dépendant de F et de $\{V_\alpha(x)\}$ tel que le voisinage $V_\beta(x)$ d'un point $x \in F$ est contenu dans un ensemble $V_\alpha(x')$ de $\{V_\alpha(x)\}$, où $x' \in F$. Donc en tenant compte de la formule (4), on a

$$f(V_\beta(x) \cdot F) \subset f(V_\alpha(x') \cdot F) \subset U_\lambda(y^*).$$

Ce qui montre que $f(x)$ est uniformément quasi-continue sur F , c.q.f.d.

Corollaire 2. Soit F un ensemble à caractère compact en soi dans $\mathfrak{X}$ et soit $\mathfrak{F} = \{M\}$ une famille d'ensembles fermés $M \subset F$ de façon que la partie commune à tous les ensembles M est vide. Alors, il existe un suffixe α tel que, quel que soit $x \in F$, le voisinage $V_\alpha(x)$ est disjoint d'un au moins des ensembles de $\mathfrak{F}$.

Démonstration. En posant $G_M = \mathfrak{X} - M$ pour chaque ensemble $M \in \mathfrak{F}$, chaque G_M est ouvert et la somme de tous les ensemble G_M couvre F . Donc il existe en vertu du théorème un suffixe α tel que le voisinage $V_\alpha(x)$ d'un point $x \in F$ est contenu dans un ensemble G_M . Donc $V_\alpha(x)$ est disjoint d'un ensemble au moins de $\mathfrak{F}$, c.q.f.d.

Corollaire 3. (Lemme de Lebesgue). Supposons de plus que $\mathfrak{X}$ est monotone. Soit F un ensemble à caractère compact en soi et soit $\mathfrak{F} = \{F_i\}$ une famille de nombre fini d'ensembles fermés F_i , ($i = 1, 2, \dots, n$). Alors, il existe un suffixe α tel que, quel que soit $x \in F$, la partie commune aux ensembles F_i possédant au moins un point commun à $V_\alpha(x)$ est non-vide.

Démonstration. Si $\prod_{i=1}^n F_i \neq \phi$, le lemme est évidemment vrai. Donc nous supposons à présent que $\prod_{i=1}^n F_i = \phi$. Désignons par $\mathfrak{F}^*$ la famille de tous les paires de nombre fini $(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_j})$ d'ensembles de $\mathfrak{F}$. Soit $(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_j})$ un élément de $\mathfrak{F}^*$ tel que $\prod_{k=1}^j F_{i_k} = \phi$ et nous l'appelons le premier espèce. Alors, pour un élément de premier espèce de $\mathfrak{F}^*$, il existe selon le lemme 2 un suffixe $\beta = \beta(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_j})$ déterminé par lui de façon que, pour chaque point $x \in F$, le voisinage $V_\beta(x)$ disjoint d'un au moins des ensembles $F_{i_1}, \dots, F_{i_j}$ appartenant à l'élément. Or, $\mathfrak{F}^*$ est de puissance finie, il existe donc un suffixe α supérieur à tous les suffixes $\beta(F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_j})$ définis plus haut, puisque le caractère $\mathfrak{A}$ de l'espace est filtrant à droite.

Par la définition de α , il est clair qu'un élément $\{F_{i_1}, F_{i_2}, \dots, F_{i_j}\}$ de $\mathfrak{F}^*$ dont chaque ensemble F_{i_k} possède au moins un point commun à $V_\alpha(x)$ n'est pas de premier espèce, c.q.f.d.

Séparabilité. Théorème 5. Soit R un espace séparable d'ordre $\aleph_\xi^{(1)}$ ($= \mathfrak{A}$) et vérifiant la condition (D). Si l'on excepte de R un ensemble de 1-re catégorie convenablement choisi, le sous-espace restant

1) Un ensemble E est dit séparable d'ordre $\aleph_\xi$, lorsqu'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ de puissance $\leq \aleph_\xi$ tel que $\bar{D} = E$.

est parfaitement séparable d'ordre $\aleph_0$.

Démonstration. R étant séparable d'ordre $\aleph_0$, il existe un ensemble D de puissance $\aleph_0$ tel que $R = \bar{D}$. Soit $D = \sum_{\tau \in T} x_\tau$, où T est un ensemble de puissance $\aleph_0$. Cela posé, à chaque point x_τ nous faisons correspondre la famille des voisinages $\{V_\alpha(x_\tau)\}$, ($\alpha \in \mathbb{N}$), et posons $G_\alpha = \sum_{\tau \in T} V_\alpha(x_\tau)$ et $F_\alpha = R - G_\alpha$. Alors, étant $D \subset G_\alpha$, G_α est ouvert et partout dense dans R et F_α est donc non-dense; par suite $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}} F_\alpha$ est de 1-re catégorie. Posons $R^* = R - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} F_\alpha$ et nous allons démontrer que R^* est parfaitement séparable d'ordre $\aleph_0$.

Considérons la famille $\{V_\alpha(x_\tau)\}$ dont la puissance est $\aleph_0$. x étant un point quelconque de R^* , on a $x \in \bigcap_{\alpha} G_\alpha$. D'où $x \in G_\alpha$ pour tout α . Il existe par suite un ensemble ouvert $V_\alpha(x_\tau)$ contenant le point x et donc il existe un voisinage $V_\beta(x)$ contenu dans $V_\alpha(x_\tau)$.

Réciproquement, $V_\alpha(x)$ étant un voisinage de $x \in R^*$, d'après la condition (D) il y a un suffixe β tel que

$$(*) \quad x \in V_\beta(y) \rightarrow V_\beta(y) \subset V_\alpha(x),$$

quel que soit y .

Or, étant $x \in \bigcap_{\alpha} G_\alpha$, il est évident que $x \in G_\beta$, il existe donc un voisinage $V_\beta(x_\tau) \ni x$, où $x_\tau \in D$. Par conséquent, en tenant compte de la formule (*), il vient $x \in V_\beta(x_\tau) \subset V_\alpha(x)$.

Des résultats obtenus plus haut on peut dire que R^* est parfaitement séparable d'ordre $\aleph_0$, c.q.f.d.

Théorème 6. Soit R un espace vérifiant la condition (D). Si pour chaque suffixe α il existe une filet- $\frac{1}{\alpha}$ de puissance $\leq \aleph_0$, l'espace R est séparable d'ordre $\aleph_0$ où $\aleph_0 = \bar{\aleph}$.

Démonstration. Pour un suffixe α désignons par D_α une filet- $\frac{1}{\alpha}$ de puissance $\leq \aleph_0$. Alors la somme $D = \sum_{\alpha} D_\alpha$ est aussi de puissance $\leq \aleph_0$. Il s'agit de démontrer que $\bar{D} = R$. Maintenant, supposons par contre qu'il existe au moins un point x n'appartenant pas à $\bar{D}$; alors $\bar{D}$ étant fermé, il existe un voisinage $V_\alpha(x)$ disjoint de $\bar{D}$. Or,

1) Un ensemble E est dit parfaitement séparable d'ordre $\aleph_0$, lorsqu'on peut sans altérer la fermeture dans E , adopter pour les différents points x de E des voisinages appartenant à une même famille d'ensembles ouverts, cette famille, indépendant de x , ayant une puissance $\leq \aleph_0$.

pour ce α il existe selon la condition (D) un suffixe β satisfaisant à la formule (*) dans la démonstration du théorème 5; par suite, on a $S_\beta(x) \subset V_\alpha(x)$. Il en résulte que $S_\beta(x) \cdot D_\beta = \phi$; par suite on peut dire que D_β n'est pas du filet $\frac{1}{\beta}$. Ce qui est une contradiction, c.q.f.d.

Corollaire 1. *Un ensemble borné est séparable d'ordre $\aleph_\xi$.*

En effet, si un ensemble E est borné, pour chaque suffixe α il existe une filet $\frac{1}{\alpha}$ de puissance $\aleph_\xi$ dans E . L'ensemble E est donc séparable d'ordre $\aleph_\xi$.

Corollaire 2. *Un ensemble à caractère compact est séparable d'ordre $\aleph_\xi$.*

En effet, un ensemble à caractère compact est borné selon le théorème 20 dans §5.

Connexité. Nous considérons à cette place-ci un espace R vérifiant la condition (B_1) :

Soit $V_\alpha(x)$ un voisinage arbitraire d'un point x . Alors il existe deux suffixes β et γ déterminés par α et x tels que

$$V_\beta(x) \cdot V_\gamma(y) \neq \phi \rightarrow y \in V_\alpha(x),$$

quel que soit y .

Théorème 7. *Pour qu'un espace quantitatif vérifie la condition (B_1) , il faut et il suffit que, quel que soit un ensemble E , la fermeture de E coïncide avec la partie commune aux fermetures de $O_\alpha(E)$, en posant $O_\alpha(E) = \sum_{x \in E} V_\alpha(x)$.*

Démonstration. Nécessité: E un ensemble arbitraire. Par définition de $O_\alpha(E)$, il est évident que $E \subset O_\alpha(E)$, quel que soit α , et donc $\bar{E} \subset \prod_\alpha \overline{O_\alpha(E)}$. Par suite, il s'agit de démontrer que $\bar{E} \supset \prod_\alpha \overline{O_\alpha(E)}$. Or, si x est un point n'appartenant pas à $\bar{E}$, $\bar{E}$ étant fermé, il existe un voisinage $V_\alpha(x)$ sans point commun avec E ; donc selon la condition (B_1) il existe deux suffixes β et γ tels que $V_\beta(x) \cdot V_\gamma(y) \neq \phi \rightarrow y \in V_\alpha(x)$ quel que soit y ; de la contraposition de cette implication, on a $y \notin V_\alpha(x) \rightarrow V_\beta(x) \cdot V_\gamma(y) = \phi$, et donc $V_\beta(x) \cdot O_\gamma(E) = \phi$. Il en résulte que $x \notin \overline{O_\gamma(E)}$. C'est la conséquence que nous avons en vue.

Suffisance: Soit x un point et soit $V_\alpha(x)$ un voisinage de x . Si l'on pose $F = R - V_\alpha(x)$, F est fermé et ne contient pas le point x . Or, par l'hypothèse posée, on a $F = \prod_\alpha \overline{O_\alpha(F)}$; Etant $x \notin F$, il existe un

suffixe r tel que $x \in \overline{O_r(F)}$, et par suite il existe aussi un suffixe β tel que $V_\beta(x) \cdot O_r(F) = \phi$; Ce qui montre que si $y \in F = R - V_\alpha(x)$, alors $V_\beta(x) \cdot V_r(y) = \phi$; C'est la contraposition de la condition (B_1) , c.q.f.d.

De la démonstration de suffisance du théorème, on peut immédiatement déduire le

Corollaire. *Un espace vérifiant la condition (B_1) est régulier.*

Théorème 8. *Un espace R monotone et satisfaisant aux conditions (T_1) et (B_1) vérifie la condition (T_2^*) .*

Démonstration. Un ensemble formé d'un seul point est fermé, puisque l'espace vérifie la condition (T_1) . Donc en tenant compte du corollaire précédent, pour deux points distincts x et y il existe deux suffixes β et r tels que $V_\beta(x) \cdot V_r(y) = \phi$. Par suite, en posant $F_1 = R - V_\beta(x)$ et $F_2 = R - V_r(y)$, ils sont fermés et satisfont aux conditions :

$$F_1 + F_2 = R, \quad x \in F_1 \quad \text{et} \quad y \in F_2.$$

D'après le théorème 7, il vient $F_1 = \bigcap_{\alpha} \overline{O_\alpha(F_1)}$ et $F_2 = \bigcap_{\alpha} \overline{O_\alpha(F_2)}$. Par conséquent, étant $x \in F_1$ et $y \in F_2$, il existe quatre suffixes β_1, r_1, β_2 et r_2 tels que $V_{\beta_1}(x) \cdot O_{r_1}(F_1) = \phi$ et $V_{\beta_2}(y) \cdot O_{r_2}(F_2) = \phi$. D'autre part, l'espace étant monotone, pour ces suffixes β_1, r_1, β_2 et r_2 il existe un suffixe α tel que $V_\alpha(z) \subset V_{\beta_1}(z) \cdot V_{r_1}(z) \cdot V_{\beta_2}(z) \cdot V_{r_2}(z)$, quel que soit $z \in R$. Considérons pour ce α un voisinage $V_\alpha(z)$ d'un point z quelconque. Alors, $F_1 + F_2$ étant l'espace tout entier, z appartient à l'un ou l'autre des F_1 et F_2 ; par conséquent, si $z \in F_1$, il est évident que $V_\alpha(x) \cdot V_\alpha(z) = \phi$. De même, si $z \in F_2$, il vient $V_\alpha(y) \cdot V_\alpha(z) = \phi$, c.q.f.d.

Théorème 9. *Soit R un espace à caractère compact et vérifiant la condition (B_1) et soient F_1 et F_2 deux ensembles fermés non-vides et dis-joints. Alors, il existe un suffixe α tel que $O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2) = \phi$.*

Démonstration. Supposons par impossible que $O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2) \neq \phi$, quel que soit $\alpha \in \mathfrak{A}$. Prenons un point $x_\alpha \in O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2)$ et considérons le système caractéristique $\{x_\alpha\}$. R étant à caractère compact, il existe au moins un point adhérent de $\{x_\alpha\}$, soit x . D'autre part, si $\beta \geq \alpha$, il vient $O_\beta(F_1) \cdot O_\beta(F_2) \subset O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2)$; par conséquent, on a $x_\beta \in O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2)$. De là on peut dire que le système $\{x_\alpha\}$ est résiduel dans $O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2)$, quel que soit α . Il vient donc $x \in \bigcap_{\alpha} \overline{O_\alpha(F_1) \cdot O_\alpha(F_2)}$. Par suite il vient $x \in F_1 \cdot F_2$ selon le théorème 7; nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Théorème 10. Soit R un espace monotone, à caractère compact et satisfaisant aux conditions (T_1) et (B_1) , et soit $\{F_\alpha\}$ une famille d'ensembles fermés et non-vides tels que

- 1) $F_\beta \subset F_\alpha$ si $\beta \geq \alpha$,
- 2) F_α est enchaîné $\frac{1}{x}$.

Alors la partie commune $\prod_\alpha F_\alpha$ est connexe.

Démonstration. D'après le théorème 11 dans §5, la partie commune $F = \prod_\alpha F_\alpha$ est non-vide et fermé. R étant à caractère compact, F est à caractère compact en soi.

Maintenant, supposons par contre que F ne soit pas connexe, c.-à-d. que F soit décomposable en deux ensembles fermés non-vides et disjoints tels que $F = F^{(1)} + F^{(2)}$ et $F^{(1)} \cdot F^{(2)} = \phi$. Il est évident que $F^{(1)}$ et $F^{(2)}$ sont à caractère compact en soi. Par conséquent, il y a du théorème 9 un suffixe λ tel que

$$(1) \quad O_\lambda(F^{(1)}) \cdot O_\lambda(F^{(2)}) = \phi.$$

En posant $G = O_\lambda(F^{(1)}) + O_\lambda(F^{(2)})$, G est ouvert et $F \subset G$; par conséquent, si l'on pose $H_\alpha = F_\alpha - G$, H_α est fermé et à caractère compact en soi et $H_\beta \subset H_\alpha$ si $\beta \geq \alpha$. En outre, étant $\prod_\alpha H_\alpha = \prod_\alpha (F_\alpha - G) = \prod_\alpha F_\alpha - G = \phi$, il existe du théorème 11 dans §5 un suffixe μ tel que $H_\mu = \phi$, c.-à-d. que

$$(2) \quad F_\mu \subset O_\lambda(F^{(1)}) + O_\lambda(F^{(2)}).$$

Par suite, en posant $F_\alpha^{(i)} = F_\alpha \cdot O_\lambda(F^{(i)})$, ($i = 1, 2$), pour $\alpha \geq \mu$, il vient

$$(3) \quad F_\alpha = F_\alpha^{(1)} + F_\alpha^{(2)}, \quad F_\alpha^{(1)} \cdot F_\alpha^{(2)} = \phi \quad \text{et} \quad F^{(i)} \subset F_\alpha^{(i)}, \quad (i = 1, 2),$$

Dans ce cas on peut démontrer que $F_\alpha^{(i)}$ est fermé et à caractère compact en soi. Pour ce but il est suffisant de démontrer que $F_\alpha^{(1)}$ est fermé. Or, il est clair que $F_\alpha \subset O_\lambda(F^{(1)}) + O_\lambda(F^{(2)})$ pour $\alpha \geq \mu$. Il vient selon (1) et (2)

$$\begin{aligned} \overline{F_\alpha^{(1)}} &= \overline{F_\alpha \cdot O_\lambda(F^{(1)})} \subset \overline{F_\alpha} \cdot \overline{O_\lambda(F^{(1)})} \\ &= F_\alpha \cdot \overline{O_\lambda(F^{(1)})} \subset (O_\lambda(F^{(1)}) + O_\lambda(F^{(2)})) \cdot \overline{O_\lambda(F^{(1)})} = O_\lambda(F^{(1)}). \end{aligned}$$

Il en résulte que, étant $\overline{F_\alpha^{(1)}} \subset F_\alpha$, on a $\overline{F_\alpha^{(1)}} \subset F_\alpha \cdot O_\lambda(F^{(1)}) = F_\alpha^{(1)}$; ce qui montre que $F_\alpha^{(1)}$ est fermé. De même, $F_\alpha^{(2)}$ est fermé. Par conséquent, selon la formule (3) on peut dire que F_α , ($\alpha \geq \mu$), n'est pas connexe. En vertu du théorème 22 dans §5, il existe un suffixe β tel

que F_α , ($\alpha \geq \mu$), n'est pas enchainé- $\frac{1}{\beta}$. R étant monotone, on peut choisir un suffixe γ tel que $\gamma \geq \mu$ et $\gamma \geq \beta$; Alors, l'ensemble F_γ n'est pas à forte raison enchainé- $\frac{1}{\gamma}$. Nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Prolongement de fonctions bicontinues. Nous donnerons à la fin une généralisation du théorème de Lavrentieff proprement dit :

Théorème 11. Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ deux espaces monotones et à caractère complet satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1) Ils possèdent le même caractère $\aleph$.
- 2) Ils satisfont à la condition (D).
- 3) Quel que soit un suffixes λ , il y a deux suffixes μ et ν dépendants de λ tels que $\overline{V_\mu(x)} \subset V_\lambda(x)$ et $\overline{U_\nu(y)} \subset U_\lambda(y)$, quels que soient deux points $x \in \mathfrak{X}$ et $y \in \mathfrak{Y}$.

Sous ces conditions, toute homéomorphie entre deux ensembles X et Y situés dans les espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ respectivement se laisse prolonger sur deux ensembles G_α situés dans ces espaces.

Démonstration. Soit $y = f(x)$ une fonction bicontinue, définie sur X telle que $Y = f(X)$ et soit $x = g(y)$ la fonction inverse de f . D'après le théorème 29 dans §5, on peut prolonger la fonction f d'une façon quasi-continue à une fonction f^* définie sur un ensemble $X^* \supset X$ qui est un G_α en vertu de ce fait qu'un ensemble fermé est un G_α selon la condition (D)¹⁾. De plus la fonction f^* est, en effet, continue sur X^* , puisque $\mathfrak{Y}$ vérifie la condition (D)²⁾. De même manière, on peut prolonger la fonction g à une fonction continue g^* , définie sur un ensemble $Y^* \supset Y$ qui est un G_α .

Puis, dans l'espace composé $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ posons

$I =$ l'ensemble des points $(x, f^*(x))$, x parcourant X^* ,

$J =$ l'ensemble des points $(g^*(y), y)$, y parcourant Y^* ,

et désignons respectivement par M et N les projections de la partie commune $I \cdot J$ sur l'axe $\mathfrak{X}$ et sur l'axe $\mathfrak{Y}$. Alors, la fonction f^* est manifestement une homéomorphie entre M et N .

Finalement, il reste de démontrer que M et N sont des G_α . Comme on le sait, I étant un ensemble fermé dans $X^* \times \mathfrak{Y}$ et X^*

1) T. Inagaki, loc. cit., pp. 190 - 191.

2) T. Inagaki, loc. cit., pp. 203 - 204.

un G_a dans $\mathfrak{X}$, I est un G_a dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. De même, J est un G_a dans $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$. D'autre part, en désignant par $h(x) = (x, f^*(x))$ la fonction biunivoque de X^* sur I , selon le théorème 26 dans §5 $h(x)$ est une quasi-homéomorphie entre X^* et I . Or, $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ étant additifs et vérifiant la condition (D), l'espace composé $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ l'est également¹⁾ et par conséquent $h(x)$ est en effet une homéomorphie entre X^* et I . Cela posé, $I \cdot J$ étant un G_a dans I , l'image inverse $M = h^{-1}(I \cdot J)$ est un G_a dans X^* , et donc M est un G_a dans $\mathfrak{X}$, puisque X^* est un G_a dans $\mathfrak{X}$. De même, N est un G_a dans $\mathfrak{Y}$, c.q.f.d.

(Suivre)

Table des matières.

	Page
Introduction... ..	149
§5. Les espaces quantitatifs	150
§6. Les espaces à structure uniforme	170

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received February 5, 1953)

1) T. Inagaki, loc. cit., p. 224.