# SUR LES ESPACES LINEAIRES LOCALEMENT CONVEXES

OSAMU TAKENOUCHI

E soit un espace linéaire topologique. Nous entendons par là, un espace linéaire par rapport au corps C de nombres réels ou complexes qui est en même temps un espace topologique et les opérations fondamentales $x + y$, $\lambda x (x, y \in \mathrm{E}, \lambda \in \mathrm{C})$ sont tous deux continues comme applications de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E et de $\mathrm{C} \times \mathrm{E}$ dans E.

Dans un tel espace, tout voisinage V de 0 doit satisfaire à la condition que "pour chaque $x \in \mathrm{E}$, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $\lambda x \in \mathrm{V}$". Pour un ensemble convexe et cerclé, cette dernière condition est la même que "V engendre E". Si on peut prendre le système fondamental des voisinages de 0 formé seulement d'ensembles convexes et cerclés, on dit que cet espace est *localement convexe*. Nous étudierons, dans cette note, la structure générale d'espaces linéaires topologiques, localement convexes et séparés[1].

La théorie des espaces de cette catégorie s'est développée assez rapidement dans ces dernières années. Surtout le travail de MM. L. Schwartz et J. Dieudonné [8][2] donne occasion à notre étude. Ils ont proposé quelques problèmes concernant les espaces $(\mathfrak{F})$ et $(\mathfrak{LF})$[3], mais la plupart n'est pas encore rèsolué. Nos résultats (en particulier ceux qui sont donnés dans §4 et §7 ci-dessous) suggère que l'un de leurs problèmes ([8], §15, problème 14, p. 99) ne puisse pas étre résolu seul en modifiant la définition de la limite inductive. Premièrement, l'espace de Banach (non-séparable) est la limite inductive (par une définition pareille à eux[4]) de ses sous-espaces propres, et par conséquent le phénomène pathologique là-indiqué est assez général. D'autre part un espace linéaire complet et bornologique (v. la définition donnée au §1) est toujours représentable comme la limite inductive (en notre sens, v. §1) des espaces de Banach et dans ce cas on peut prendre ces espaces tels qu'un ensemble borné arbitraire est toujours contenu dans un des constituants. Et la théorie va naturelle si cette dernière

1) Nous ne considérons qu'espace separé, bien que cet adjectif soit généralement supprimé.

2) Les numéros entre les crochets renvoient à bibliographie à la fin de cette note.

3) v. [8], §15, p. 97 - 100. v. aussi A. Grothendieck [4]. Voir la note faite à la fin de cette note.

4) v. [8], §3, p. 66 - 67.

condition est remplie. Nous ne pouvons pas résoudre complètement leur problème, mais je crois avoir obtenu une certaine solution.

§1 est le paragraphe préliminaire. Quelques notions, en particulier celles de la limite projective et de la limite inductive, sont données. La notion de la limite projective est due à A. Weil [9] (v. S. Lefschetz [7], p. 54 " inverse limit "), mais notre notion de la limite inductive est plus générale que celle de L. Schwartz et J. Dieudonné [8]. Nous avons suivi pour la définir la méthode générale de S. Lefschetz [7], p. 57 (" direct limit "), et, de plus nous pouvons introduire une topologie. À propos de cette topologie, nous ne pouvons pas insister en général qu'elle soit séparée, et, d'autre part, pour la limite projective nous ne pouvons pas constater en général que l'espace résultant est non-trivial. Dans § 2 nous donnons le théorème que tout espace linéaire topologique localement convexe peut être considéré comme une limite projective des espaces de Banach, et §3 est la considération d'espaces conjugués en tenant compte de cette représentation. L'espace conjugué est, comme l'espace conjugué de la limite projective, représentable par une limite inductive, mais cette correspondance n'est pas assez satisfaisante puisqu'on ne peut pas constater cette relation en incluant la topologie. La correspondance de la limite inductive à son espace conjugué, va bien, au contraire, si on y ajoute la condition qu'un ensemble borné soit contenu toujours dans un des constituants. Un espace qui est représentable comme une limite inductive des espaces de Banach est nécessairement bornologique (v. la fin du §1), et, d'autre part, un espace bornologique est toujours représenté comme une limite inductive des espaces de Banach, et, en plus, cette représentation peut se faire satisfaite à la condition supplémentaire cidessus. Ce sont des résultats du §4. §5 est l'étude d'espaces conjugués des conjugués. Ici aussi l'espace tonnelé (v. la définition dans §1) ou bornologique joue un rôle essentiel. Dans §6, nous donnons la relation entre le produit direct et la somme directe des espaces—à savoir, l'espace conjugué de celui-là prend la forme de celui-ci, et, aussi, inversement, un cas particulier de la correspondance entre la limite projective et la limite inductive, mais dans ce cas cette correspondance est assez satisfaisante, et, ensuite, le résultat que le produit direct des espaces de Banach est toujours un espace tonnelé, il est même un espace bornologique si la puissance du produit n'est pas plus grande que celle de l'ensemble de nombres réels. §7 donne quelques exemples. L'un d'eux assure qu'un sous-espace fermé d'un espace bornologique n'est pas necessairement bornologique, comme indiqué à N. Bourbaki [3], p. 11 par l'exemple de A. Grothendieck [5][1].

Je remerci profondément Prof. H. Nakano de l'enseignement sur plusieurs points et aussi M. K. Hayashi qui a bien volulu m'aider et m'a fait faire ce travail.

### §1. Préliminaire.[2] Les limites projectives et inductives

Soit E un espace linéaire localement convexe. Nous dirons qu'un ensemble convexe et cerclé U *absorbe* un ensemble A quelconque s'il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que $A \subset \lambda U$. Un ensemble qui est absorbé par tous les voisinages convexes et cerclés de 0 est appelé un *ensemble borné,* et un ensemble convexe et cerclé qui absorbe tous les ensembles bornés est un *ensemble bornivore.* Un ensemble bornivore n'est pas toujours un voisinage de 0. Si c'est le cas, nous dirons que cet espace est un *espace bornologique.* Un espace donné devient toujours un espace bornologique par l'augmentation de voisinage de 0. Une autre notion est celle de l'espace tonnelé. Un ensemble convexe, cerclé et fermé est dit un *tonneau* s'il engendre cet espace, et si tout tonneau est un voisinage de 0, cet espace est nommé un *espace tonnelé.* Les relations entre ces dêux classes des espaces sont données dans N. Bourbaki [3]. L'espace bornologique est, s'il est complet, un espace tonnelé, mais, en général, il n'est pas toujours tonnelé. Un de tels exemples est donné par l'espace E de Hilbert non-complet, c'est-à-dire E est le sous-espace de $(l_2)$ formé par des suites qui n'ont qu'un nombre fini de non-zero composants. Si on prend comme U l'ensemble des suites dont le premier composant est un nombre de module $\leqslant 1$, le second un nombre de module $\leqslant \frac{1}{2}$, et ainsi de suite, alors il est manifeste que U est un tonneau dans E, mais il n'est pas un voisinage de 0. Nous allons montrer plus loin que le produit direct (d'une puissance arbitraire) des espaces complets et tonnelés est toujours tonnelé, mais jusqu'à présent, nous pouvons démontrer seulement que le produit direct d'espaces bornorlogiques est encore un espace bornologique, si la puissance du produit n'est pas plus grande que celle de l'ensemble des nombres réels.

Ici nous expliquons la notion de limites projective et inductive des espaces linéaires localement convexes.

---

1) On ne peut pas comprendre de sa note quelle sorte d'exemple est douné.

2) Quelques notions dans la suite sont dues à N. Bourbaki [3].

Soit $\Gamma$ un ensemble ordonné filtrant. À chaque $\gamma \in \Gamma$, faisons correspondre un espace linéaire localement convexe E tel que, si $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, il existe une application linéaire et continue $f_{\alpha\beta}$ de $E_\beta$ dans $E_\alpha$, qui satisfait, pour les indices arbitraires $\alpha, \beta, \gamma$ tels que $\alpha < \beta < \gamma$, à $f_{\alpha\gamma}(x_\gamma) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(x_\gamma))$ pour tout $x_\gamma \in E_\gamma$, ou simplement $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \cdot f_{\beta\gamma}$. Les systèmes $(x_\gamma ; \gamma \in \Gamma)$ des éléments tels que

(i) $x_\gamma \in E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, et

(ii) $x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta)$, si $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$

forment dans le produit direct des $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ un sous-espace fermé $'E$ qui est appelé la *limite projective* des espaces $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$. Cet ensemble pourrait être réduit à un seul élément $(0 ; \gamma \in \Gamma)$, mais la topologie est toujours introduite comme le sous-espace du produit direct $P_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$, et, muni de cette topologie, il est aussi un espace linéaire localement convexe. Un système fondamental des voisinages des 0 est obtenu comme il suit. Prenons un indice $\alpha \in \Gamma$, et dans $E_\alpha$ un voisinage $V_\alpha$ de 0, et soit $'V_\alpha$ le sous-ensemble de $'E$ qui est formé de tous les éléments dont les $\alpha$-composants sont contenus dans $V_\alpha$. Alors l'ensemble de tous les $'V_\alpha$ obtenus de cette manière forme un système fondamental des voisinages de 0 (v. A. Weil [9], p. 23, S. Lefschetz [7], p. 31). Il est souvent nécessaire de considérer la *limite projective au sens abstrait*, c'est-à-dire, sa topologie laissée à coté. Nous remarquons ici que le produit direct des espaces peut être aussi considéré comme la limite projective de produits d'un nombre fini des espaces. L'application $f_\alpha$ qui fait correspondre à chaque $(x_\gamma ; \gamma \in \Gamma)$ de la limite projective ou encore du produit direct son $\alpha$-composant $x_\alpha$ sera dite la projection. C'est une application continue, et, dans le cas du produit direct, c'est même une application ouverte.

Soit à nouveau $\Gamma$ un ensemble ordonné filtrant. À chaque $\gamma \in \Gamma$ faisons correspondre un espace linéaire localement convexe $E_\gamma$ tel que, si $\alpha < \beta$ $(\alpha, \beta \in \Gamma)$, il existe une application linéaire, continue et biunivoque de $E_\alpha$ dans $E_\beta$ qui satisfait à $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \cdot f_{\alpha\beta}$ pour $\alpha < \beta < \gamma$. Un indice $\alpha (\in \Gamma)$ et un élément $x_\alpha$ de $E_\alpha$ quelconque définissent un sous-ensemble résiduel $\Gamma'$ de $\Gamma$ tel que

(i) $\alpha \in \Gamma'$

(ii) pour chaque $\gamma \in \Gamma'$, il correspond un $x_\gamma \in E_\gamma$, et l'élément qui correspond à l'indice $\alpha$ est $x_\alpha$ donné d'avance,

(iii) si $\beta < \gamma$ $(\beta, \gamma \in \Gamma')$, $x_\gamma = f_{\beta\gamma}(x_\beta)$.

En utilisant ces propriétés, on peut introduire les opérations $x_\alpha + y_\beta$, $\lambda x_\alpha$ entre les éléments de $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ comme ceci. Soient $\Gamma'$ et $\Gamma''$ les sous-ensembles résiduels de $\Gamma$ correspondants à $x_\alpha$ et $y_\beta$, alors $\Gamma''' = \Gamma' \cap \Gamma''$ est aussi un sous-ensemble résiduel. Pour un $\gamma \in \Gamma'''$, soient $x_\gamma$ et $y_\gamma$ les éléments correspondants. Alors on pose $z_\gamma (= x_\gamma + y_\gamma) = x_\alpha + y_\beta$. La multiplication par un nombre quelconque peut être introduite d'une manière évidente. L'espace linéaire $^\circ$E qui est obtenu ainsi est la *limite inductive au sens abstrait* des espaces $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$. On voit que chaque $E_\gamma$ est contenu dans $^\circ$E comme un sous-espace (au sens abstrait), et nous désignerons cette application identique dite *l'injection* par $f_\gamma$. Nous introduisons maintenant dans $^\circ$E la topologie localement convexe la plus fine qui rend toutes les applications $f_\gamma$ continues. Si cette topologie est *séparée*, la *limite inductive* des espaces $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ est obtenue. Il y a un cas où nous pouvons insister l'existence de la limite inductive. C'est le cas où tous les $f_{\alpha\beta} (\alpha < \beta)$ sont les applications homéomorphique (cas de L. Schwartz et J. Dieudonné), car alors la topologie induite dans $E_\gamma$ par $^\circ$E est identique à sa propre topologie. (C'est démontré par une même manière que celle de L. Schwartz et J. Dieudonné [8], p. 69). Semblablement au cas du produit direct nous pouvons considérer la somme directe comme une limite inductive. La *somme directe au sens abstrait* des espaces linéaires localement convexes $E_\xi (\xi \in \Xi)$ est par définition l'ensemble des systèmes des éléments $(x_\xi;\ \xi \in \Xi)$ qui n'ont qu'un nombre fini de non-zéro composants. Comme l'ensemble $\Gamma$ des sous-ensembles finis de $\Xi$ devient un ensemble ordonné filtrant si on introduit un ordre parmis ces éléments par la relation d'inclusion, et, comme, si on pose, pour $\gamma \in \Gamma$, $E_\gamma = P_{\xi \in \gamma} E_\xi$, il existe une application linéaire et homéomorphique de $E_\alpha$ dans $E_\beta (\alpha < \beta)$, à savoir l'application $(x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \cdots\cdots, x_{\xi_n}) \to (x_{\xi_1}, x_{\xi_2}, \cdots\cdots, x_{\xi_n}, 0, 0, \cdots\cdots, 0)$, $(\alpha = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\} \subset \beta)$. On peut former la limite inductive au sens abstrait de $E_\gamma (\gamma \in \Gamma)$, et c'est manifestement identique à la somme directe de $E_\xi (\xi \in \Xi)$. Maintenant introduisons dans cet espace la topologie définie plus haut (qui a un sens dans ce cas par la remarque faite ci-dessus) et ainsi nous avons la *somme directe*. Comme nous allons voir plus loin, le produit direct et la somme directe se correspondent l'un à l'autre sous le procédé de formation de leur espace conjugué. La limite inductive en général est obtenue de la somme directe par une formation d'un espace quotient (v. S. Lefschetz [7], p. 57–58 ; dans notre cas la considération topologique est aussi inclue). À la fin, nous remarquons que la limite inductive des espaces bornologiques est bornologique, et la limite inductive des espaces tonnelés est tonnelé.

## §2. La structure des espace linéaire localement convexe.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe un théorème qui est notre point de depart et qui nous assure que tous les espaces considérés sont toujours représentables comme un sous-espace de la limite projectives des espaces de Banach.

**Théorème 1.** *Soit* E *un espace linéaire localement convexe quelconque. Alors il est un sous-espace dense de la limite projective des espaces de Banach proprement choisis.*

*Démonstration.* Soit $\{V_\gamma\}$ un système fondamental des voisinages ouverts, convexes et cerclés de 0 dans E. La pseudo-norme qui définit $V_\gamma$ soit $N_\gamma$, c'est-à-dire $V_\gamma = \{x;\ N_\gamma(x) < 1\}$, alors il est clair que

(i) $V_\alpha \supset V_\beta$ est équivalent à $N_\alpha(x) \leqslant N_\beta(x)$ pour tout $x \in E$,

(ii) pour deux pseudo-normes $N_\alpha$ et $N_\beta$ il existe une troisième $N_\gamma$ telle que $N_\alpha(x) \leqslant N_\gamma(x)$, $N_\beta(x) \leqslant N_\gamma(x)$.

Par conséquent, si on introduit un ordre dans l'ensemble des indices $\Gamma = \{\gamma\}$ d'une manière suivante:

$$\alpha \prec \beta \text{ signifie } N_\alpha(x) \leqslant N_\beta(x) \text{ pour tout } x \in E, \text{ ou encore, } V_\alpha \supset V_\beta,$$

$\Gamma$ devient un ensemble ordonné filtrant.

Posons

$$M_\gamma = \{x;\ N_\gamma(x) = 0\}.$$

Alors c'est un sous-espace fermé de E. Dans l'espace quotient $\bar{E}_\gamma$ de l'espace E par $M_\gamma$:

$$\bar{E} = E/M_\gamma,$$

on peut introduire la pseudo-norme d'une manière evidente, (en effet, la valeur de $N_\gamma$ ne dépend que de la classe suivant $M_\gamma$) et cela est une norme en plus. La complétion $E_\gamma$ de $\bar{E}_\gamma$ par rapport à cette norme est un espace de Banach (muni de cette norme). Les espaces $\bar{E}_\gamma$ et $E_\gamma$ sont, dans la suite, toujours considérés comme les espaces normés ainsi définis.

L'homomorphisme canonique $f_\gamma$ de E sur $\bar{E}_\gamma = E/M_\gamma$ est évidemment une application linéaire et continue. L'image d'un élément $x \in E$

par $f_\gamma$ sera notée $\bar{x}_\gamma$. Une application de $\bar{\mathrm{E}}_\beta$ sur $\bar{\mathrm{E}}_\alpha$, $f_{\alpha\beta}$ est definie, pour $\alpha < \beta$, par

$$\bar{x}_\alpha = f_{\alpha\beta}(\bar{x}_\beta) \quad (x \in \mathrm{E}).$$

C'est aussi une application linéaire et continue, et, par conséquent, on peut le prolonger à une application de $\mathrm{E}_\beta$ dans $\mathrm{E}_\alpha$, que nous écrirons $f_{\alpha\beta}$ indifféremment. Les propriétés suivantes de cette $f_{\alpha\beta}$ prolongée sont évidentes:

(i) $f_{\alpha\beta}$ est une application linéaire et continue.

(ii) pour $\alpha < \beta < \gamma$, $f_{\alpha\beta} \cdot f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$,

(iii) pour $\alpha < \beta$, $f_{\alpha\beta} \cdot f_\beta = f_\alpha$.

Grâce à la deuxième propriété, nous pouvons former la limite projective $'\mathrm{E}$ des espaces de Banach $\mathrm{E}_\gamma$.

Prenons un élément $x \in \mathrm{E}$. Alors le système $(\bar{x}_\gamma;\ \gamma \in \Gamma)$ définit un élément de $'\mathrm{E}$ à cause de (iii), et, en définissant cet élément comme l'image de $x$, une application $f$ de E dans $'\mathrm{E}$ est définie. C'est une application linéaire biunivoque, comme on le voit facilement. Nous allons démontrer que c'est un homéomorphisme.

Premièrement, nous remarquons qu'un système fondamental des voisinages de 0 est donné par tous les $'\mathrm{V}_\alpha$ $(\alpha \in \Gamma)$ définis comme ci-dessous:

$$'\mathrm{V}_\alpha = \{'x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma);\ N_\alpha(x_\alpha) < 1\}.$$

Pour le voir, prenons un voisinage $'\mathrm{U}_\alpha$ de 0 de la forme

$$'\mathrm{U}_\alpha = \{'x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma);\ x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha\}$$

(ici $\alpha \in \Gamma$ et $\mathrm{U}_\alpha$ est un voisinage arbitraire de 0 dans $\mathrm{E}_\alpha$). Comme tous les voisinages de cette forme constituent un système fondamental des voisinages de 0, il suffit de prouver qu'un $'\mathrm{U}_\alpha$ arbitraire contient toujours un $'\mathrm{V}_\beta$. Correspondant à $\mathrm{U}_\alpha$ qui définit $'\mathrm{U}_\alpha$, un voisinage $\mathrm{W}_\alpha$ de 0 tel que $\mathrm{W}_\alpha + \mathrm{W}_\alpha \subset \mathrm{U}_\alpha$ existe. $f_\alpha^{-1}(\mathrm{W}_\alpha)$ est un voisinage de 0 dans E, et par suite, un $\mathrm{V}_\beta$ $(\beta \in \Gamma)$ est contenu dans lui: $\mathrm{V}_\beta \subset f_\alpha^{-1}(\mathrm{W}_\alpha)$. Considérons $'\mathrm{V}_\beta$, et soit $'x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma) \in {'\mathrm{V}_\beta}$. Il s'en suit que $N_\beta(x_\beta) < 1$, et, par conséquent, E contient une suite de tels éléments $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots$ que

$$N_\beta(x^{(\nu)}) = N_\beta(\overline{x_\beta^{(\nu)}}) < 1, \quad \lim_{\nu \to \infty} N_\beta(\overline{x_\beta^{(\nu)}} - x_\beta) = 0.$$

La première relation signifie $x^{(\nu)} \in V_\beta$, d'où $\overline{x_\alpha^{(\nu)}} = f_\alpha(x^{(\nu)}) \in f_\alpha(V_\beta) \subset W_\alpha$, et la seconde nous conduit à $\lim_{\nu\to\infty} N_\alpha(\overline{x_\alpha^{(\nu)}} - x_\alpha) = 0$ par la continuité de $f_{\alpha\beta}$. Comme $W_\alpha$ est un voisinage de 0 dans $E_\alpha$, $x_\alpha - \overline{x_\alpha^{(\nu)}} \in W_\alpha$ à un nombre fini de $\overline{x_\alpha^{(\nu)}}$ près. On en conclut que

$$x_\alpha = \overline{x_\alpha^{(\nu)}} + (x_\alpha - \overline{x_\alpha^{(\nu)}}) \in W_\alpha + W_\alpha \subset U_\alpha,$$

et, puisqu'on a pris $'x \in 'V_\beta$ arbitrairement, la relation $'V_\beta \subset 'U_\alpha$ est établie.

Cela étant, il est clair que $f(V_\alpha) = 'V_\alpha \cap f(E)$, d'où suit évidemment que $f$ est un homéomorphisme.

À la fin, nous allons voir que $f(E)$ est dense dans $'E$. Pour cet objet, prenons un élément $'x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma) \in 'E$. Alors, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, un $x(\gamma) \in E$ peut être pris de la façon suivante:

$$(*) \qquad N_\gamma(\overline{x_\gamma^{(\gamma)}} - x_\gamma) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Évidemment, le système d'éléments $f(x^{(\gamma)})$ $(\gamma \in \Gamma)$ converge vers $'x$ suivant l'ordre de $\Gamma$, car les inégalités $(*)$ indiquent pour tout $\alpha < \gamma$

$$x^{(\alpha)} - 'x \in 'V_\alpha \subset 'V_\gamma.$$

Alors, si on identifie les espaces E et $f(E)$, on peut dire que E est un sous-espace dense dans $'E$, c.q.f.d.[1]

Ici nous remarquons, que le système d'éléments $x^{(\gamma)}$ $(\gamma \in \Gamma)$ construit à la fin de cette démonstration constitue un système de Cauchy suivant l'ordre de $\Gamma$ dans E. En effet si on prend un voisinage arbitraire $V_\gamma$ de 0,

$$\begin{aligned} N_\gamma(x^{(\alpha)} - x^{(\beta)}) &= N_\gamma(\overline{x_\gamma^{(\alpha)}} - \overline{x_\gamma^{(\beta)}}) \\ &\leqslant N_\gamma(\overline{x_\gamma^{(\alpha)}} - x_\gamma) + N_\gamma(\overline{x_\gamma^{(\beta)}} - x_\gamma) \\ &\leqslant N_\alpha(\overline{x_\alpha^{(\alpha)}} - x_\alpha) + N_\beta(\overline{x_\beta^{(\beta)}} - x_\beta) \\ &< 1 \end{aligned}$$

1) Nous voyons de cette démonstration que l'image de E par chaque projection $f_\gamma$ dans $E_\gamma$ est dense dans $E_\gamma$ (v. le corollaire 2 ci-dessous). D'autre part, dans le cas plus général où E est réprésenté comme une limite projective ou son sous-espace dense des espaces linéaires localement convexes, on peut faire satisfaite cette condition dans cette représentation en restreignant des espaces composants á ses sous-espaces sans changement de la limite. De plus, nous verrons plus loin qu'il est commode pour nous de supposer que cette condition est remplie dans notre représentation (v. théorème 3, etc.). Cette condition, quoiqu'elle ne soit pas explicitement écrite dans la proposition du théorème, dans quelques cas, nous supposons qu'elle est toujours remplies dans la suite.

pour tous $\alpha, \beta \in \Gamma$ tels que $\gamma < \alpha, \beta$, ou $x^{(\alpha)} - x^{(\beta)} \in V_\gamma$. Cette remarque entraîne le

**Théorème 2.** *Si l'espace* E *est complet,* E *est représentable comme une limite projective des espaces de Banach.*

**Corollaire 1.** *Tout l'espace linéaire localement convexe possède toujours un complété, et c'est identique à une limite projective des espaces de Banach* 'E.

*Démonstration.* Une limite projective des espaces de Banach est toujours complète comme un sous-espace fermé du produit direct des espaces complets. Alors, si on représente E comme un sous-espace dense d'une limite projective des espaces de Banach 'E, ce 'E est certainement le complété de E.

**Corollaire 2.** La représentation du théorème 1 peut être sousmis à la condition que dans chaque espace composant $E_\gamma$ l'image de E par la projection $f_\gamma$ est dense par rapport à la topologie de $E_\gamma$. Si E est complet, il est une limite projective des espaces normés $\bar{E}_\gamma$ et $f_\gamma$ est l'application sur $\bar{E}_\gamma$.

**Corollaire 3.** Si l'espace E est un espace ($\mathfrak{F}$) de L. Schwartz et J. Dieudonné ([8]), il est représentable comme une limite projective d'une suite des espaces de Banach.

**Corollaire 4.** *Soit l'espace* E *une limite projective des espaces linéaires localement convexes* $E_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ *ou même un sous-espace d'elle. Alors pour qu'un ensemble* $B \subset E$ *soit borné dans* E *il faut et il suffit que, pour chaque* $\gamma \in \Gamma$, *l'ensemble de* $\gamma$*-composant de tous les éléments de* B, *c'est-à-dire la* $\gamma$*-projection de* B, *soit un ensemble borné dans* $E_\gamma$.

*Démonstration.* Comme chaque projection $f_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ est une application continue, $f_\gamma(B)$ est un ensemble borné pour chaque $\gamma \in \Gamma$ si B est borné dans E. Inversement, soit tout $f_\gamma(B)$ borné dans $E_\gamma$ correspondant. Alors, pour un voisinage arbitraire $U_\gamma$ de 0 dans $E_\gamma$, un nombre $\lambda > 0$ existe tel que

$$f_\gamma(B) \subset \lambda U_\gamma$$

ou

$$B \subset \lambda f_\gamma^{-1}(U_\gamma).$$

Or un système fondamental de voisinage dans E est formé par l'ensemble de la forme $f_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ et, au moyen de la dernière relation ci-dessus, il existe, pour tous les voisinage U de 0 dans E, un nombre $\lambda > 0$ de telle sorte que

$$B \subset \lambda U,$$

ou, autrement dit, B est un ensemble borné, c.q.f.d.

## §3. La structure d'espace conjugué.

Une des deux relations entre les limites projective et inductive obtenues par passage de l'un de ces espaces à son conjugué est donnée. Cette relation n'est pas assez satisfaisante car nous ne pouvons pas établir notre théorème en incluant la relation topologique. Un exemple donné plus loin (v. §7) expliquera cette circonstance.

**Théorème 3.** *Soit* E *une limite projective des espaces linéaires localement convexes* $E_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ *ou son sous-espace dense tel que l'image de* E *par la projection* $f_\gamma$ *est dense dans* $E_\gamma$.[1] *Alors l'espace conjugué de* E *est la limite inductive au sens abstrait des espaces* $E'_\gamma$.

Pour sa démonstration, nous allons établir une lemme:

**Lemme 1.** *Soient* E, F *les espaces linéaires localement convexes. S'il existe une application linéaire continue* $f$ *de* E *dans* F, *sa adjointe* $f'$ *définie par*

$$\langle x, f'(y') \rangle = \langle f(x), y' \rangle \quad (x \in E,\ y' \in F')$$

*donne une application linéaire et continue. La condition supplémentaire que* $f(E)$ *soit dense dans* F *entraîne la biunicité de* $f'$.

*Démonstration.* Comme les applications $x \to f(x)$, $f(x) \to \langle f(x), y' \rangle$ sont linéaires et continues, l'existence d'un tel élément $f'(y') \in E'$ est évidente. $f'$ est manifestement une application linéaire de $F'$ dans $E'$ et nous voyons qu'elle est continue, comme suivant. Prenons un ensemble borné B dans E, alors $f(B)$ est aussi un ensemble borné dans F. Parce que la relation $f'(y') \in B^\circ$ ou $|\langle x, f'(y')\rangle|$ $(= |\langle f(x), y'\rangle|)$ $\leqslant 1$ pour tout $x \in B$ est équivalente à $y' \in (f(B)^\circ)$, on a

$$B^\circ \cap f'(F) = f'(f(B)^\circ).$$

La continuité est évidente en raison de cette formule.

1) v. la note 1) á la page 64.

Si en plus la condition que $f(\mathrm{E})$ soit dense dans F est ajoutée, deux éléments différents $y'$, $z'$ de F′ doivent avoir les valeurs différentes sur $f(\mathrm{E})$. Soit $f(x)$ l'un de tels éléments. Alors

$$\langle f(x),\, y'\rangle \neq \langle f(x),\, z'\rangle \quad \text{ou} \quad \langle x,\, f'(y')\rangle \neq \langle x,\, f'(z')\rangle$$

montre que $f'(y') \neq f'(z')$, ou, il revient au même que $f'$ est une application biunivoque, c.q.f.d.

*Démonstration du théorème.* Pour la considération d'espace conjugué, il suffit de ne traiter que le cas où l'espace E même est une limite projective. S'il n'en est pas ainsi, on peut le ramener à ce cas grâce à notre hypothèse que l'espace considéré soit dense dans un tel espace.

Pour $\alpha,\, \beta \in \Gamma$, $\alpha < \beta$, soit $f_{\alpha\beta}$ l'application définissante de $\mathrm{E}_\beta$ dans $\mathrm{E}_\alpha$. Comme $f_\alpha(\mathrm{E}) \subset f_{\alpha\beta}(\mathrm{E}_\beta)$, $f_{\alpha\beta}(\mathrm{E}_\beta)$ est dense dans $\mathrm{E}_\alpha$, et, par conséquent, l'adjointe $f'_{\alpha\beta}$ est une application linéaire, continue et biunivoque. La même raison et la relation $f_{\alpha\beta}\cdot f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ entraînent

$$f'_{\beta\gamma}\cdot f'_{\alpha\beta} = f'_{\alpha\gamma}$$

pour $\alpha < \beta < \gamma$. Ces propriétés nous admet à former la limite inductive au sens abstrait $^\circ\mathrm{E}'$ de ces espaces $\mathrm{E}'_\gamma$. Nous n'avons qu'a démontrer que cet espace peut être identifié à la totalité des fonctionnelles linéaires continues sur E.

(i) Prenons une fonctionnelle $x'$ de E′, sa continuité assure l'existence d'un $\alpha \in \Gamma$ et un voisinage $\mathrm{V}_\alpha$ de 0 dans $\mathrm{E}_\alpha$ tels que

$$\{x\,;\ |\langle x,\, x'\rangle| \leqslant 1\} \supset \{x\,;\ x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma),\ x_\alpha \in \mathrm{V}_\alpha\}.$$

En conséquence, elle définit une fonctionnelle linéaire continue $x'_\alpha$ sur $\mathrm{E}_\alpha$ par la formule

$$\langle x,\, x'\rangle = \langle f_\alpha(x),\, x'_\alpha\rangle.$$

Les indices $\alpha \in \Gamma$ qui possèdent cette propriété forment un sous-ensemble résiduel $\Gamma'$ de $\Gamma$, et pour chaque couple $\alpha,\, \beta \in \Gamma'$, $\alpha < \beta$, la formule

$$\begin{aligned}\langle x,\, x'\rangle &= \langle f_\alpha(x),\, x'_\alpha\rangle = \langle f_{\alpha\beta}(f_\beta(x)),\, x'_\alpha\rangle \\ &= \langle f_\beta(x),\, f'_{\alpha\beta}(x'_\alpha)\rangle\end{aligned}$$

indique

$$x'_\beta = f'_{\alpha\beta}(x'_\alpha),$$

puisque $f_\beta(E)$ est dense dans $E_\beta$. Il s'en suit, qu'un élément $x'$ de $E'$ définit uniquement un ${}^\circ x' \in {}^\circ E'$. Désignons par $f$ cette correspondance :

$$ {}^\circ x' = f(x'). $$

C'est manifestement une application linéaire.

(ii) Inversement, soit ${}^\circ x' \in {}^\circ E'$. Correspondant à ${}^\circ x'$ un sous-ensemble résiduel $\Gamma'$ de $\Gamma$ est defini de telle façon que, pour chaque $\gamma \in \Gamma'$, un élément $x'_\gamma \in E'_\gamma$ existe qui satisfait à $g_\gamma(x'_\gamma) = {}^\circ x'$ ou $g_\gamma$ désigne l'injection de $E'_\gamma$ dans ${}^\circ E'$. Deux de tels éléments $x'_\alpha$, $x'_\beta$ ($\alpha, \beta \in \Gamma'$, $\alpha < \beta$) sont rattachés par

$$ x'_\beta = f'_\beta(x'_\alpha). $$

À cause de cette condition, un élément $x = (x_\gamma;\ \gamma \in \Gamma) \in E$ étant pris, les valeurs $\langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle$ ($\gamma \in \Gamma'$) ne dépendent pas d'indices spécifiés. En effet, pour $\alpha, \beta \in \Gamma'$, soit $\gamma \in \Gamma'$, $\alpha, \beta < \gamma$. Alors

$$ \begin{aligned} \langle x_\alpha, x'_\alpha \rangle &= \langle f_{\alpha\gamma}(x_\gamma), x'_\alpha \rangle = \langle x_\gamma, f'_{\alpha\gamma}(x'_\alpha) \rangle = \langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle \\ &= \langle x_\beta, x'_\beta \rangle. \end{aligned} $$

Conséquemment, une fonctionnelle linéaire sur E est définie par

$$ \langle x, x' \rangle = \langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle \quad (\gamma \in \Gamma'), $$

et de plus elle est continue comme on le voit de l'identité

$$ \begin{aligned} \{x;\ |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1\} &= \{x;\ |\langle f_\gamma(x), x'_\gamma \rangle| \leqslant 1\} \\ &= f_\gamma^{-1}\{x_\gamma;\ |\langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle| \leqslant 1\}. \end{aligned} $$

Maintenant, il est clair que $x' \in E'$ et $f(x') = {}^\circ x'$, ou $f$ est une application linéaire et biunivoque de $E'$ sur ${}^\circ E'$, c.q.f.d.

Nous savons peu sur ce qui concerne à la topologie d'espace conjugué, ni on peut insister la correspondance établie dans ce théorème en incluant la relation topologique, sauf un résultat presque évident :

**Théorème 4.** *Un système fondamental des voisinages de* 0 *dans* $E'$ *est formé par la famille de tout ensemble* $U'$ *tel que*

(i) $U'$ *est un ensemble convexe cerclé et faiblement fermé, ou, autrement dit, il existe un ensemble* $B \subset E$ *tel que* $B^\circ = U'$.

(ii) *pour chaque* $\gamma \in \Gamma$, *l'ensemble* $U' \cap E'_\gamma$, *précisément,* $f_\gamma'^{-1}(U' \cap f'_\gamma(E'_\gamma))$ *est un voisinage de* 0 *dans* $E'_\gamma$.

*Démonstration.* En appliquant la formule établie dans la démonstration du lemme 1,

$$f_\gamma'^{-1}(U' \cap f_\gamma'(E_\gamma')) = (f_\gamma(B))^\circ.$$

Le premier membre étant un voisinage de 0 dans $E_\gamma'$, il absorbe tous les ensembles de la forme $U_\gamma^\circ$ où $U_\gamma$ est un voisinage convexe, cerclé et fermé de 0 dans $E_\gamma$. La formule $\lambda(f_\gamma(B))^\circ \supset U_\gamma^\circ\,(\lambda > 0)$ entraîne

$$f_\gamma(B) \subset (f_\gamma(B))^{\circ\circ} \subset \lambda U_\gamma^{\circ\circ} = \lambda U_\gamma,$$

et par suite $f_\gamma(B)$ est borné pour chaque $\gamma \in \Gamma$. Alors le corollaire 4 dans §2 peut être appliqué pour établir que B est un ensemble borné d'où U′ est un voisinage de 0 dans E′.

L'énoncé inverse que tous les ensembles de la forme $B^\circ$ où B est un ensemble borné satisfont aux conditions du théorème étant évident, le théorème est démontré.

Des théorèmes 1 et 3 nous pouvons établir le

**Théorème 5.** *Soit* E *un espace linéaire localement convexe quelconque. Alors l'espace conjugué* E′ *de est une limite inductive au sens abstrait des espaces de Banach proprement choisis.*

## §4. La structure des espaces bornologiques et de leurs conjugués

Nous venons de voir, dans le paragraphe précédent, que la correspondance de la limite projective à la limite inductive en prenant l'espace conjugué n'est pas assez satisfaisante. La correspondance de la limite inductive à la limite projective, au contraire, va bien si on y ajoute quelques conditions. À savoir les deux théorèmes suivants sont vérifiés.

**Théorème 6.** *Soit* E *une limite inductive des espaces linéaire localement convexes* $E_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. *Alors l'espace conjugué de* E *est la limite projective au sens abstrait des espaces* $E_\gamma'$.

*Démonstration.* Les notations sont les mêmes à ceux dans §1. Chaque application adjointe $f_{\alpha\beta}'$ donne une applications continues de $E_\beta'$ dans $E_\alpha'$, et, en outre, elles satisfont aux relations

$$f_{\alpha\gamma}' = f_{\alpha\beta}' \cdot f_{\beta\gamma}' \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta < \gamma.$$

Par conséquent, on peut former la limite projective au sens abstrait $'E'$ de ces espaces $E'_\gamma$.

Pour tout élément $x' \in E'$, posons $'x' = (f'_\gamma(x')\,;\ \gamma \in \Gamma)$ où $f'_\gamma$ est l'application adjointe de $f_\gamma$. Il définit manifestement un élément de $'E'$, et, par ce procédé, une application linéaire $f$ de $E'$ dans $'E'$ est définie. Cette application est biunivoque, comme on le voit facilement, et, pour assurer que $f$ établit l'isomorphisme entre $E'$ et $'E'$, il suffit de démontrer que $f$ est une application *sur* $'E'$.

Pour cet objet, prenons un élément $'x' = (x'_\gamma;\ \gamma \in \Gamma) \in {}'E'$. Un $x \in E$ est, par définition, contenu dans un des $E_\gamma$ et dans tous les $E_\gamma$ qui le suivent. Pour ces $\gamma$, c'est-à-dire, ceux pour lesquelles $E_\gamma$ contiennent $x$, les formes

$$\langle x_\gamma,\ x'_\gamma \rangle$$

(où $x_\gamma$ est l'élément $x$ considéré comme un élément de $E_\gamma$) ont une même valeur. Car, soient $\alpha, \beta$ les indices qui ont la propriété ci-dessus, et soit $\gamma$ un des indices tels que $\alpha, \beta < \gamma$, alors

$$\begin{aligned}\langle x_\alpha,\ x'_\alpha \rangle &= \langle x_\alpha,\ f'_{\alpha\gamma}(x'_\gamma) \rangle = \langle f_{\alpha\gamma}(x_\alpha),\ x'_\gamma \rangle \\ &= \langle x'_\gamma,\ x'_\gamma \rangle \\ &= \langle x_\beta,\ x'_\beta \rangle.\end{aligned}$$

Conséquement, une fonctionnelle linéaire sur E est définie par

$$\langle x,\ x' \rangle = \langle x_\gamma,\ x'_\gamma \rangle$$

pour une telle valeur de $\gamma$ pour laquelle $x$ est contenu dans $E_\gamma$. C'est une fonctionnelle continue car l'ensemble U :

$$U = \{x\,;\ |\langle x,\ x' \rangle| \leqslant 1\}$$

est un voisinage de 0 dans E comme nous voyons dans la suite. L'identité

$$f_\gamma^{-1}(U) = \{x_\gamma\,;\ f_\gamma(x_\gamma) \in U\} = \{x_\gamma\,;\ |\langle x_\gamma,\ x'_\gamma \rangle| \leqslant 1\}$$

montre que $f_\gamma^{-1}(U)$ est, en raison de la continuité de $x'_\gamma$, un voisinage de 0 dans $E_\gamma$. En outre, parce que U est un ensemble convexe et cerclé, U est nécessairement un voisinage de 0 dans E à cause de la définition de la topologie dans E. Et ce démontre que $x'$ est continue ou $x' \in E'$. Maintenant, il est clair que, pour cet $x' \in E'$, $f(x') = {}'x'$, ou, encore dit, $f$ est une application sur $'E'$, c.q.f.d.

**Théorème 7.** *Soit* E *un espace linéaire localement convexe qui est représenté comme la limite inductive au sens abstrait des espaces linéaires localement convexes* $E_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ *de telle façon que, pour tout* $\gamma$, *l'injection* $f_\gamma$ *est continue. Supposons au surplus, qu'il satisfait à la condition suivante: pour qu'un ensemble* B *de* E *soit borné il faut et il suffit qu'il soit contenu dens un des constituants* $E_\gamma$ *et borné dans lui. Alors l'espace conjugué de* E *est un sous-espace de la limite projective des espaces* $E'_\gamma$.

*Démonstration.* Le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 6 établit l'existence de l'application $f$ linéaire et biunivoque de E′ dans 'E′. Dans le cas du théorème, nous allons démontrer que $f$ est bicontinue.

(i) Prenons un voisinage 'U′ de 0 dans 'E′. Alors il existe un indice $\alpha \in \Gamma$ et un voisinage $U'_\alpha$ de 0 dans $E'_\alpha$ tels que

$$\{x'\,;\ x' \in E',\ f(x') \in {}'U'\} \supset f_\alpha'^{-1}(U'_\alpha).$$

$U'_\alpha$ contient l'ensemble polaire d'un ensemble borné $B_\alpha$ dans $E_\alpha$, c'est-à-dire:

$$U'_\alpha \supset B_\alpha^\circ.$$

Posons

$$B = f_\alpha(B_\alpha),$$
$$U' = B^\circ.$$

Un élément $x' \in U'$, $x' = (x'_\gamma\,;\ \gamma \in \Gamma)$ satisfait toujours à

$$|\langle x_\alpha,\ x'_\alpha \rangle| = |\langle f_\alpha(x_\alpha),\ x' \rangle| \leqslant 1$$

pour $x_\alpha \in B_\alpha$, comme $f_\alpha(x_\alpha) \in B$, et, alors,

$$x'_\alpha \in B_\alpha^\circ \subset U'_\alpha$$

ou

$$x' \in f_\alpha'^{-1}(x'_\alpha) \subset f_\alpha'^{-1}(U'_\alpha) \subset \{x'\,;\ f(x') \in {}'U'\}.$$

U′ étant un voisinage de 0 dans E′, la continuite de $f$ est démontrée.

(ii) Inversement, prenons un voisinage U′ de 0 dans E′, et un ensemble borné B dans E tel que

$$U' \supset B^\circ.$$

L'hypothèse du théorème assure l'existence d'un indice $\alpha \in \Gamma$ et d'un ensemble borné $B_\alpha$ dans $E_\alpha$ tel que

$$f_\alpha(B_\alpha) = B.$$

Soit $'x' = (x'_\gamma;\ \gamma \in \Gamma) \in f(E')$ qui a son $\alpha$-composant dans $B_\alpha^\circ$:

$$x'_\alpha \in B_\alpha^\circ.$$

L'élément $x = f_\alpha(x_\alpha) \in B$ satisfait à

$$\begin{aligned} |\langle x, f^{-1}('x')\rangle| &= |\langle f_\alpha(x_\alpha), f^{-1}('x')\rangle| \\ &= |\langle x_\alpha, f'_\alpha(f^{-1}('x))\rangle| \\ &= |\langle x_\alpha, x'_\alpha\rangle| \\ &\leqslant 1, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$f^{-1}('x') \in B^\circ \subset U'$$

ou

$$'x' \in f(U').$$

L'ensemble

$$\{'x';\ 'x' = (x'_\gamma;\ \gamma \in \Gamma),\ x'_\alpha \in B_\alpha^\circ\} \cap f(E')$$

étant un voisinage de 0 dans $f(E')$, ce qu'on vient de voir montre que $f(U')$ est un voisinage de 0 dans $f(E')$, ou, en d'autre terme, $f$ est une application ouverte.

Par conséquent, $f$ est une application homéomorphique de E′ dans E′, ou E′ peut être identifié à un sous-espace de 'E′, c.q.f.d.

Une application importante de ces deux théorèmes tout à l'heure établis est celle pour l'étude d'espace conjugué d'un espace bornologique. En premier il faut établir le

**Théorème 8.** *Soit* E *un espace bornologique. Alors il est la limite inductive des espaces normés proprement choisis. Bien plus, la condition suivante est satisfaite dans cette représentation: un ensemble* B *de* E *est borné si et seulement s'il est contenu dans un des constituants* $E_\gamma$ *et borné dans lui. Si* E *est, en outre, un espace complet, alors on peut prendre des espaces de Banach, pour ses constituants.*

*Démonstration.* La totalité des ensembles bornés, convexes, cerclés et fermés dans E soit $\{B_\gamma\}$. On introduit une relation d'ordre dans l'ensemble des indices $\Gamma = \{\gamma\}$ telle que

$$\alpha < \beta \quad \text{signifie} \quad B^{\bullet}_\alpha \subset B_\beta (\alpha, \beta \in \Gamma).$$

Alors, $\Gamma$ devient un ensemble ordonné filtrant.

Soit $E_\gamma$ le sous-espace engendré par $B_\gamma$:

$$E_\gamma = \{\lambda x ; \lambda : \text{nombre quelconque}, \ x \in B_\gamma\}.$$

Il est une conséquence évidente de la manière d'introduction d'ordre dans $\Gamma$ que

$$\alpha < \beta \quad \text{induit} \quad B_\alpha \subset B_\beta .$$

Nous écrirons $f_{\alpha\beta}$ l'application identique de $E_\alpha$ dans $E_\beta$. Les relations

$$f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \cdot f_{\alpha\beta} \quad \text{pour} \quad \alpha < \beta < \gamma$$

sont évidentes.

La pseudo-norme $N_\gamma(x)$ qui est introduite par la relation que

$$x \in B_\gamma \quad \text{est équivalente à} \quad N_\gamma(x) \leqslant 1$$

satisfait dans $E_\gamma$ à la condition suivante:

$$x \in E_\gamma \text{ et } x \neq 0 \quad \text{entraîne} \quad 0 < N_\gamma(x) < \infty,$$

et nous munissons $E_\gamma$ de cette norme $N_\gamma(x)$. $E_\gamma$ devient ainsi un espace normé, et les applications $f_{\alpha\beta}$, considérées comme l'applications entre ces espaces normés, sont continues. En conséquence, la limite inductive au sens abstrait des espaces $E_\gamma \, (\gamma \in \Gamma)$ est formée et elle se notera comme ${}^cE$.

L'élément $x \in E$ doit être contenu dans un des $E_\gamma \, (\gamma \in \Gamma)$ et par suite dans tous les $E_\gamma$ qui sont plus grands que lui. Par conséquent, il définit un élément ${}^cx$ de ${}^cE$, et, en écrivant cette correspondance comme ${}^cx = f(x)$, $f$ devient une application linéaire et biunivoque de E sur ${}^cE$. Comme au §1, nous désignons la contraction de $f$ sur $E_\gamma$ par $f_\gamma$.

La topologie qui est introduite dans ${}^cE$ comme la topologie localement convexe la plus fine qui rend toutes les applications $f_\gamma$ continue est séparée. En effet, nous montrons que l'application de E sur ${}^cE$ muni de cette topologie est ouverte. Soit U un voisinage convexe et cerclé de 0 dans E, alors on peut laisser correspondre à chaque $E_\gamma$

un nombre positif $\lambda_\gamma$ tel que $B_\gamma \subset \lambda_\gamma U$. $U_\gamma = U \cap E_\gamma$ est un voisinage de 0 dans $E_\gamma$ car

$$\{x_\gamma;\ x_\gamma \in E_\gamma,\ N_\gamma(\dot{x}_\gamma) \leqslant 1\} = B_\gamma \subset \lambda_\gamma U_\gamma$$

et, en outre,

$$U_\gamma = f_\gamma^{-1}(f(U)).$$

Par conséquent, comme $f(U)$ est manifestement un ensemble convexe et cerclé, $f(U)$ est un voisinage de 0 dans $E'$ par la topologie susdite.

Ce fait nous permet de considérer ${}^cE$ comme la limite inductive (v. la définition de la limite inductive donnée au §1). L'application $f$ qui est démontrée comme ouverte est du reste continue. Pour le montrer, prenons un voisinage convexe et cerclé de 0 ${}^cU$ dans ${}^cE$. Alors l'image réciproque $U = f^{-1}({}^cU)$ est un ensemble bornivore, car, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, $U_\gamma = f_\gamma^{-1}({}^cU) = U \cap E_\gamma$ est un voisinage de 0 dans $E_\gamma$ et par suite, un ensemble borné quelconque doit être contenu, comme il est toujours contenu dans un des $B_\gamma$, dans un certain ensemble homothétique à U. Or l'espace E étant un espace bornologique, U est un voisinage de 0 dans E, comme nous avons voulu le voir.

Tous ces faits que nous venons de prouver nous montre que E peut être identifié à la limite inductive ${}^cE$ des espaces normés $E_\gamma$. On peut dire de plus. Comme un ensemble borné dans E est toujours contenu dans un des $B_\gamma$, il est contenu dans un des $E_\gamma$ et borné dans lui. Inversement, un ensemble qui est contenu dans un des $E_\gamma$ et borné dans lui est contenu dans l'ensemble de la forme $\lambda B_\gamma\,(\lambda > 0)$ et, par conséquent, il est borné dans E.

Reste à démontrer que, si E est complet, tous les espaces normés $E_\gamma$ sont les espaces de Banach. Le lemme suivant dû à N. Bourbaki [3] démontre cela.

**Lemme 2.** *Dans un espace complet* E, *le sous-espace*, $E_0$, *qui est le plus petit sous-espace contenant un ensemble borné, convexe, cerclé et fermé* B, *devient, en introduisant la norme $N$ definie par* B, *un espace complet, ou autrement dit, un espace de Banach.*

*Démonstration.* $N$ définit dans $E_0$ une norme comme nous l'avons remarqué plus haut. Il suffit de démontrer que $E_0$, muni de cette norme $N$, est complet.

Soit $\{x_n\}\,(x_n \in E_0)$ une suite de Cauchy par rapport à $N$. Nous pouvons admettre que $N(x_n) < 1$ ($n = 1, 2, \cdots\cdots$). Prenons un voisinage U de 0 dans E, alors il existe un $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset U$. De notre hypothèse, il existe un nombre naturel $n_0 = n_0(U)$ tel que

$$N(x_n - x_m) \leqslant \lambda \quad \text{pour tous les} \quad n, m \geqslant n_0$$

ou

$$(*) \qquad x_n - x_m \in \lambda B \subset U.$$

Par conséquent, $\{x_n\}$ forme une suite fondamentale par rapport à la topologie de E, donc il converge vers un élément $x_0$ de E qui est, puisque B est fermé, contenu dans B. En passant à la limite $m \to \infty$ dans $(*)$, nous avons

$$x_n - x_0 \in \lambda B$$

ou encore

$$N(x_n - x_0) \leqslant \lambda \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant n_0.$$

Ici $\lambda$ pouvant être pris arbitrairement petit, cette relation démontre que $\{x_n\}$ converge dans $E_0$ par rapport à la topologie définie par $N$, et le fait que $E_0$ est complet est démontré.

D'après les théorèmes 6, 7 et 8, nous pouvons insister le

**Théorème 9.** *Soit* E *un espace bornologique. Alors l'espace conjugué* E′ *de* E *est une limite projective des espaces de Banach proprement choisis.*

### §5. La structure d'espace conjugués des conjugués des espaces bornologiques ou tonnelés

Il est bien connu que l'espace conjugué de conjugué E″ d'un espace linéaire localement convexe E contient l'espace original au sens abstrait, mais la topologie induite sur E par celle de E″ n'est pas nécessairement identique à celle de E. Pour cela, il suffit que l'espace E est un espace bornologique ou tonnelé. D'autre part, nous avons bien vu, que l'espace conjugué d'un espace quelconque est représentable comme une limite inductive au sens abstrait des espaces de Banach (v. théorème 5), mais nous ne connaissons pas comment on peut décrire ces circonstances en incluant la topologie, ni, en général, nous ne pouvons insister qu'un ensemble borné soit contenu dans un des constituants de E′. Cette dernière condition, qui a une signification profonde en relation avec la topologie de $E''$, est satisfaite aussi dans le cas où E est un espace bornologique où tonnelé. C'est-à-dire le

**Théoreme 10.** *Soit* E *un espace bornologique ou tonnelé, qui est représenté comme un sous-espace dense de la limite projective des espaces de Banach* $E_\gamma$.[1] *Le conjugué de* E *est alors la limite inductive au sens abstrait des espaces* $E'_\gamma$. *Pour qu'un ensemble* $B' \subset E'$ *soit borné dans* $E'$, *il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un des constituant* $E'_\gamma$ *et borné dans lui.*

*Démonstration.* Soit $B'$ un ensemble borné dans $E'$. Alors $B'^\circ$ est un voisinage de 0 dans E, comme il est manifestement un ensemble bornivore et aussi un tonneau, et, par suite, il contient un des voisinages convexes cerclés de 0 $\{V_\gamma\}$ qui forment un système fondamental des voisinages de 0. Maintenant E est la limite projective des espaces $E_\gamma$, $E_\gamma$ étant défini par l'intermédiaire de $V_\gamma$. Par conséquent, $V_\gamma^\circ$ est contenu parfaitement dans $E'_\gamma$, et $B'$ $(\subset B'^{\circ\circ} \subset V_\gamma^\circ)$ est aussi contenu et borné dans lui.

Inversement, un ensemble $B'$ qui est contenu dans un des $E'_\gamma$ et borné dans lui est, comme il est contenu dans un ensemble homothétique à $V_\gamma$, borné dans $E'$, c.q.f.d.

Le fait que $E''$ admet une représentation comme une limite projective similaire à la représentation de E est fondé sur ce théorème. À savoir, le

**Théorème 11.** *Soit* E *nn espace linéaire localement convexe qui soit représenté comme un sous-espace dense d'une limite projective des espaces de Banach* $E_\gamma$.[1] *Alors* $E''$ *est un sous-espace de la limite projective des espaces* $E''_\gamma$.

*Démonstration.* Dû à théorème 3, $E'$ est la limite inductive au sens abstrait de $E'_\gamma$. Dans cette représentation, l'injection $f'_\gamma$ de $E'_\gamma$ dans $E'$ est, car il est l'application adjointe de $f_\gamma$, manifestement continu. En outre, le thèorème précédent montre qu'un ensemble B dans $E'$ est borné si et seulement s'il est contenu dans un des constituants et borné dans lui. Par conséquent, puisque toutes les hypothèses du théorème 7 sont satisfaites, $E''$ est un sous-espace de la limite projective de $E''_\gamma$, c.q.f.d.

Ici, la limite projective de $E''_\gamma$ est la totalité des fonctionnelles linéaires bornées sur $E'$, et la question si $E''$ est identique à elle réduit à la question si sur $E'$ la fonctionnelle linéaire et bornée est

1) v. la note 1) à la page 64.

toujours continue. Nous ne savons pas si cette circonstance peut être généralement vérifiées, même dans le cas le plus simple où E est un espace ($\mathfrak{F}$).

## §6. Le produit direct et la somme directe des espaces linéaires localement convexes

Comme nous avons vu, la correspondance entre la limite inductive et la limite projective en prenant l'espace conjugué est plus loin d'être considérée parfaite. La correspondance entre le produit direct et la somme directe, au contraire, est suffisamment complète, quoiqu'elle soit un cas particulier de celle entre la limite projective et la limite inductive. Comme une limite projective est un sous-espace fermé d'un produit direct et une limite inductive est un espace quotient d'une somme directe, la relation dans le cas générale est celle de la correspondance entre le sous-espace fermé et l'espace quotient quand on passe de l'un à l'autre en prenant l'espace conjugué. Alors les considérations dans ce paragraphe aura une signification sur ce point de vue.

**Théorème 12.** *Soit* E *le produit direct des espaces linéaires localement convexes* $E_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. *Alors l'espace conjugué de* E *est la somme directe des espaces* $E'_\xi$.

*Démonstration.* Soit $\Gamma$ la famille de sous-ensemble fini de $\Xi$. $\Gamma$ devient un ensemble ordonné filtrant si on introduit la relation d'ordre telle que $\alpha \prec \beta$ signifie $\alpha \subset \beta$ en tant qu'ensemble. Pour $\gamma \in \Gamma$ posons comme $E_\gamma$ le produit direct des espaces $E_{\xi_1}, E_{\xi_2}, \cdots\cdots, E_{\xi_n}$ où $\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\}$. Si $\alpha \prec \beta$, $E_\alpha$ est un produit partiel de $E_\beta$, et, par conséquent, la projection de $E_\beta$ sur $E_\alpha$ est une application linéaire et continue de $E_\beta$ sur $E_\alpha$. La limite projective des espaces $E_\gamma$, qui peut se former ainsi, est identique au produit direct de $E_\xi$ $(\xi \in \Xi)$ comme nous l'avons remarqué dans §1.

L'espace conjugué de E est représentable, par conséquent, comme la limite inductive au sens abstrait des espaces $E'_\gamma$. Or il est facile de voir que l'espace conjugué de $E_\gamma$ est le produit direct de $E_{\xi_1}, E_{\xi_2}, \cdots\cdots, E'_{\xi_n}$ $(\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\})$. Il s'ensuit que $E'$ est, en faisant abstraction de la topologie, la somme directe de $E'_\xi$ $(\xi \in \Xi)$.

Alors nous n'avons qu'à démontrer que la topologie de $E'$ est identique à celle de la somme directe de $E'_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. La topologie de la somme directe étant la plus fine parmi les topologies localement convexes qui rendent tous les $f'_\gamma$ continue, il suffit de démontrer qu'elle est moins fine que celle de E'. Ou, autrement dit, tout voisinage de la somme directe est un voisinage de E'.

Soit U' un voisinage convexe et cerclé. Alors, $E'_\gamma \cap U'$ ou, précisément, $U'_\gamma = f'^{-1}_\gamma\{f'_\gamma(E'_\gamma) \cap U'\}$ est un voisinage de 0 dans $E'_\gamma$. Nous prenons, en particulier, $\gamma = \xi$, c'est-à-dire, $\gamma$ constitué par un seul élément $\xi$. Pour cet ensemble, il correspond dans $E_\xi$ un ensemble borné $B_\xi$ tel que

$$U'_\xi \supset B^\circ_\xi.$$

Soit B le produit de tous ces $B_\xi$ ($\xi \in \Xi$). C'est manifestement un ensemble borné dans E, et nous allons voir que

$$U' \supset B^\circ;$$

ce qui établira notre assertion. Tout ce que nous voulons de démontrer est que

$(*)$ $\quad B^\circ \cap E'_\gamma =$ l'ensemble convexe le plus petit qui contient tous les $B^\circ_\xi$ ($\xi \in \gamma$)

pour tout $\gamma \in \Gamma$. (Ici $B^\circ_\xi$ est formé dans $E'_\xi$).

Prenons un $x' \in B^\circ \cap E'_\gamma$. Comme $E'_\gamma$ est le produit direct de $E'_{\xi_1}$, $E'_{\xi_2}$, ……, $E'_{\xi_n}$ ($\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n\}$), nous pouvons écrire cet $x'$ comme $x' = (x'_{\xi_1}, x'_{\xi_2}, \ldots\ldots, x'_{\xi_n})$, $x'_{\xi_i} \in E'_{\xi_i}$. Étant donné un $\varepsilon > 0$ arbitrairement, il existe un $z_{\xi_i} \in B_{\xi_i}$ pour chaque $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$, tel que

$$\sup_{x_{\xi_i} \in B_{\xi_i}} |\langle x_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle| - \varepsilon/n < \langle z_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle.$$

Parce que l'élément $y = (y_\xi;\ \xi \in \Xi)$ où $y_\xi = z_\xi$ ($\xi \in \gamma$), $y_\xi = 0$ ($\xi \bar{\in} \gamma$) est manifestement contenu dans B,

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \langle y, x'\rangle &= \textstyle\sum_{i=1}^n \langle z_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle \\ &\geqslant \textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{x_{\xi_i} \in B_{\xi_i}} |\langle x_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle| - \varepsilon. \end{aligned}$$

De cette inégalité, comme $\varepsilon$ étant arbitraire,

$$\textstyle\sum_{i=1}^n \sup_{x_{\xi_i} \in B_{\xi_i}} |\langle x_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle| \leqslant 1.$$

Par conséquent, on peut prendre les nombres $\lambda_i \geqslant 0$ ($i = 1, 2, \ldots\ldots, n$) tels que

$$\sup_{x_{\xi_i} \in B_{\xi_i}} |\langle x_{\xi_i}, x'_{\xi_i}\rangle| \leqslant \lambda_i, \quad \textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Alors

$$x' \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B^{\circ}_{\xi_i}$$
$$\subset \text{l'ensemble indiqué dans le deuxième membre de } (*).$$

L'implication inverse est plus simple. Il est clair que pour $\xi \in \Xi$

$$B^{\circ} \cap E'_{\xi} = B^{\circ}_{\xi},$$

et $B^{\circ} \cap E'_{\gamma}$ contient tous les $B^{\circ}_{\xi}$ $(\xi \in \gamma)$. Par suite, comme il est un ensemble convexe, il contient l'ensemble convexe le plus petit contenant ces $B^{\circ}_{\xi}$, c.q.f.d.

**Théorème 13.** *Soit* E *la somme directe des espaces linéaires localement convexes* $E_{\xi}$ $(\xi \in \Xi)$. *Alors l'espace conjugué de* E *est le produit direct des espace* $E'_{\xi}$.

*Démonstration.* Nous avons remarqué plus haut (§1), que, $\gamma$ étant un sous-ensemble fini arbitraire de $\Xi$, E est considérés comme la limite inductive des espaces $E_{\gamma}$, si nous posons $E_{\gamma}$ le produit direct de $E_{\xi}$ $(\xi \in \gamma)$. Par conséquent, si on peut démontrer qu'un ensemble borné dans E est toujours contenu dans un des $E_{\gamma}$, notre proposition est une conséquence de théorèmes 6 et 7 et de la remarque faite au §1 concernant le produit direct.

Alors, prenons un ensemble borné B dans E. S'il ne soit pas contenu dans un des $E_{\gamma}$, il existerait une suite $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots$ des ensembles finis de $\Xi$, telle que

$$\gamma_1 \subsetneqq \gamma_2 \subsetneqq \cdots\cdots,$$
$$\{0\} \neq B \cap E_{\gamma_1} \subsetneqq B \cap E_{\gamma_2} \subsetneqq \cdots\cdots.$$

Soit $H = \cup \gamma_{\nu}$. On range les éléments de $H$ comme une suite $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$, telle que les premiers appartiennent à $\gamma_1$, les deuxièmes à $\gamma_2$ et ainsi de suite. En changeant la notation et abandonnant des éléments surplus, s'il est nécessaire[1], nous pouvons admettre que $\gamma_{\nu} = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_{\nu}\}$. Pour chaque $\xi_{\nu}$, on définit l'ensemble $B_{\xi_{\nu}} \subset E_{\xi_{\nu}}$ comme l'image de $B \cap E_{\gamma_{\nu}}$ par la projection de $E_{\gamma_{\nu}} = \mathbf{P}_{\mu=1}^{\nu} E_{\xi_{\gamma}}$ sur $E_{\xi_{\nu}}$. C'est manifestement un ensemble borné dans $E_{\xi_{\nu}}$. Soit donné, correspondant à chaque $\xi \in \Xi$, un voisinage $U_{\xi}$ convexe, cerclé et fermé. Alors il existe, pour chaque $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$, un nombre $\lambda_{\nu} > 0$ assujetti aux

1) À savoir, si on prend à nouveau $\gamma_1, \gamma_2 - \gamma_1, \gamma_3 - \gamma_2, \cdots\cdots$ comme les indices, ce qui ne changera rien les circonstances, nos conditions sont remplies.

conditions que $B_{\xi_\nu} \subset \lambda_\nu U_{\xi_\nu}$ et, pour aucun $0 \leqslant \lambda < \lambda_\nu$, $B_{\xi_\nu} \not\subset \lambda U_{\xi_\nu}$. Nous définissons U comme le plus petit ensemble convexe contenant tous les $U_\xi$ ($\xi \neq \xi_\nu$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) et $(1/\nu)\lambda_\nu U_{\xi_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$). Alors cet U est un voisinage de 0 dans E. Pour un $\gamma_\mu$,

$$U \cap E_{\gamma_\mu} = \text{l'ensemble le plus petit qui contient tous les } (1/\nu)\lambda_\nu U_{\xi_\nu} \ (\nu = 1, 2, \cdots\cdots, \mu),$$

et, par conséquent, aucun multiple de U par un nombre $\lambda$ $(0 \leqslant \lambda < \mu)$ contient l'ensemble $B \cap E_{\gamma_\mu}$. Ou, encore dit, aucun multiple de U ne contient pas l'ensemble B, et c'est absurde.

Nous avons vu que si on considère E comme la limite inductive des $E_\gamma$, un ensemble borné arbitraire B de E est contenu dans un des $E_\gamma$ et borné dans lui. Par conséquent, le conjugué de E est justement la limite projective de $E'_\gamma$. Mais comme $E'_\gamma$ est le produit direct de $E'_{\xi_1}, E'_{\xi_2}, \cdots\cdots, E'_{\xi_n}$ ($\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\}$), $E'$ est le produit direct de $E'_\xi$ ($\xi \in \Xi$), c.q.f.d.

Il n'est sans intérêt de savoir quelle propriété de chaque espace composant est conservée sous le procédé de la formation du produit derect. Comme nous avons dit, les deux théorèmes suivants sont vérifiés.

**Théorème 14.** *Le produit direct des espaces complets et tonnelés est encore un espace tonnelé.*

*Démonstration.* Comme le produit direct E est aussi un espace complet, un tonneau U dans E est un ensemble bornivore (v. N. Bourbaki [3], théorème 2, pp. 8–9). Alors $U^\circ$ est un ensemble borné dans $E'$ et il est contenu dans un des $E'_\gamma$, les constituants de $E'$, si on considère celui-ci comme la limite inductive (v. la démonstration du théorème 13). Soit $\gamma_0$ la valeur d'un tel $\gamma$, et $U^\circ = B'_{\gamma_0}$. Considérons le polaire $B'^\circ_{\gamma_0}$ dans $E_{\gamma_0}$. C'est manifestement un tonneau dans $E_{\gamma_0}$, et, parce que $E_{\gamma_0}$ est, comme le produit direct d'un nombre fini des espaces tonnelés, un espace tonnelé, $B'^\circ_{\gamma_0}$ est un voisinage de 0 dans $E_{\gamma_0}$. Il est clair que

$$U = U^{\circ\circ} = B'^\circ_{\gamma_0} \times P_{\xi \notin \gamma_0} E_\xi,$$

et, par conséquent, U est un voisinage de 0 dans E.

**Théorème 15.** *Le produit direct de puissance $\leqslant \aleph_c$ des espaces bornologique est encore un espace bornologique, où $\aleph_c$ désigne la puissance de l'ensemble des nombres réels.*

*Démonstration.* Soit U un ensemble bornivore dans E. Alors la proposition suivante subsiste généralement: sauf un certain nombre fini d'indices $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n$, $\overline{E}_\xi$ est complètement contenu dans U, où $\overline{E}_\xi$ est l'ensemble de tous les éléments de E dont les composants sont tous zeros sauf le $\xi$-ième. En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut prendre un nombre dénombrable des indices $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots$, tels que $\overline{E}_{\xi_\nu} \not\subset U$, ou, autrement dit, il existe des éléments $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots\cdots \in E$, tels que

$$x^{(\nu)} \,\overline{\in}\, U,$$
$$x^{(\nu)} = (x_\xi^\nu;\ \xi \in \Xi) \quad \text{où} \quad x_\xi^\nu = 0\ (\xi \neq \xi_\nu).$$

Alors l'ensemble de $\nu x^{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) forme évidemment un ensemble borné mais aucun multiple de lui est contenu dans U, ce qui est absurde. Nous voulons démontrer qu'alors $\overline{E}_H$ ($H = \Xi - \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\}$) est complètement contenu dans U. Si cela est établi, le fait que U est un voisinage de 0 est démontré comme suivant. Comme $U \cap \overline{E}_\gamma$ ($\gamma = \{\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_n\}$) est un ensemble bornivore dans $\overline{E}_\gamma$, il contient un voisinage $V_\gamma$ convexe, cerclé et ouvert de 0 dans $E_\gamma$. Alors

$$\begin{aligned} U &\supset \text{le plus petit ensemble convexe qui contient } U \cap \overline{E}_\gamma \text{ et } \overline{E}_H \\ &\supset \text{le plus petit ensemble convexe qui contient } V_\gamma \text{ et } \overline{E}_H \\ &= V_\gamma \times \mathbf{P}_{\xi \in H} E_\xi . \end{aligned}$$

Par conséquent, U est un voisinage de 0 dans E.

Pour démontrer que $U \supset \overline{E}_H$, on peut admettre, sans aucune restriction de la généralité, que $\Xi$ est l'ensemble des nombres réels $0 \leqslant \xi \leqslant 1$ et que $\overline{E}_\xi \subset U$ pour chaque $\xi \in \Xi$ et qu'enfin $U = \cap_{\lambda < 1} \lambda U$. Sous cette hypothèse il faut que l'ensemble bornivore U est identique à E. Nous allons démontrer cette proposition par absurde. Soit $x = (x_\xi;\ \xi \in \Xi)$ un élément de E qui n'est pas contenu dans U. L'un au moins des éléments $x_{1,1}, x_{1,2}$, définis par

$$x_{1,1} = (y_\xi;\ \xi \in \Xi) \quad \text{où} \quad y_\xi = 2x_\xi\ (0 \leqslant \xi \leqslant \tfrac{1}{2}),\ y_\xi = 0\ (\tfrac{1}{2} < \xi \leqslant 1)$$
$$x_{1,2} = (y_\xi;\ \xi \in \Xi) \quad \text{où} \quad y_\xi = 0\ (0 \leqslant \xi < \tfrac{1}{2}),\ y_\xi = 2x_\xi\ (\tfrac{1}{2} \leqslant \xi \leqslant 1)$$

n'est pas contenu dans U. En général, soit $x_{\nu,\mu} = (y_\xi;\ \xi \in \Xi)$ l'élément défini par

$$y_\xi = 0 \quad (0 \leqslant \xi < (\mu - 1)/2^\nu \ \text{ et aussi } \ \mu/2^\nu < \xi \leqslant 1)$$
$$y_\xi = 2^\nu x_\xi\ ((\mu - 1)/2^\nu \leqslant \xi \leqslant \mu/2^\nu).$$

Si $x_{\nu,\mu}\bar{\in}U$, l'un au moins de $x_{\nu+1,2\mu-1}$ et $x_{\nu+1,2\mu}$ n'est pas contenu dans U. On peut avancer ainsi, et une suite des éléments $x_{1,\mu_1}, x_{2,\mu_2}, \cdots\cdots, x_{\nu,\mu_\nu}, \cdots\cdots$ est obtenue telle que

$$\begin{aligned} x_{\nu,\mu_\nu} &\bar{\in} U && (\nu = 1, 2, \cdots\cdots) \\ \mu_{\nu+1} &= 2\mu_\nu - 1 \quad \text{ou} \quad 2\mu_\nu. \end{aligned}$$

Il existe un seul nombre contenu dans tous les intervalles $(\mu_\nu - 1)/2^\nu \leqslant \xi \leqslant \mu_\nu/2^\nu$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$), soit $\xi_0$. Alors les éléments $\bar{x}_{\nu,\mu_\nu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) définie par

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\nu,\mu_\nu} &= x_{\nu,\mu_\nu} - 2^\nu x_0 \quad \text{où} \\ x_0 &= (y_\xi;\ \xi \in \Xi) \quad \text{est tel que} \quad y_\xi = 0\ (\xi \neq \xi_0),\ y_{\xi_0} = x_{\xi_0} \end{aligned}$$

ne sont pas contenus dans U non plus (par l'hypothèse que $U = \cap_{\lambda<1}\lambda U$). L'ensemble de tous les éléments $\nu\bar{x}_{\nu,\nu_\mu}$ ($\nu = 1, 2, \cdots\cdots$) forme un ensemble borné, parce que l'ensemble de $\xi$-composants de ces éléments est manifestement un ensemble fini. Mais aucun multiple de U ne contient pas cet ensemble, ce qui est absurde. Notre théorème est ainsi etabli.

## §7. Exemples

Le théorème suivant sert à établir quelques exemples.

**Théorème 16.** *Soit* E *un espace de Banach, et* $B_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$ *une famille des sous-espaces de* E, *telle que*

(i) *correspondant à* $\alpha, \beta \in \Gamma$ *un* $\gamma \in \Gamma$ *existe tel que* $E_\alpha, E_\beta \subset E_\gamma$,

(ii) *un sous-espace séparable de* E *est toujours contenu dans un des* $E_\gamma$.

*Alors* E *est la limite inductive de ces espaces* $E_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$.

*Démonstration.* La limite inductive de $E_\gamma$, qui peut se former sous notre hypothèse, est isomorphique au sens abstrait avec E, mais la topologie d'elle serait plus fine que celle de E. Nous allons démontrer que la topologie de E comme la limite inductive de $E_\gamma$ est moins fine que celle de E donnée d'avance, ce qui assurera notre proposition.

Soit $f$ une fonctionnelle linéaire sur E qui est continue par rapport à la topologie de la limite inductive. Soit $x_1, x_2, \cdots\cdots$ une suite arbitraire convergente vers 0 dans E. Notre hypothèse (ii) entraîne qu'alors $x_1, x_2, \cdots\cdots$ sont tous contenus dans un même $E_\gamma$ et convergent vers 0 dans lui. Comme nous avons remarqué dans §1, la topologie induite sur chaque $E_\gamma$ de la limite inductive est, dans notre cas, identique à la topologie de $E_\gamma$, ou, autrement dit, une suite convergente dans $E_\gamma$ est convergente dans E par rapport à la topologie de la limite inductive. Par conséquent, $f(x_n)$ converge vers 0, ce qui revient à dire que la fonctionnelle linéaire $f$ est non seulement continue par rapport à la topologie de la limite inductive mais aussi par rapport à la topologie de E comme espace normé. On en déduit que l'espace conjugué de E est le même par rapport à chacune des deux topologies considérées sur E, et cet espace sera noté comme $E'$ indifférement.

On sait que la topologie de E comme un espace normé est définie par la convergence uniforme sur chaque ensemble faiblement compact dans $E'$ d'après le théorème de L. Alaoglu [1] et la réflexivité de la topologie dans un espace normé. Cette topologie est, d'autre part, la topologie la plus fine parmi des topologies sur E qui font $E'$ comme l'espace conjugué, c'est le théorème de G. W. Mackey [6] et R. Arens [2]. Par suite la topologie sur E de la limite inductive est moins fine que celle donnée d'avance comme espace normé, c.q.f.d.

Nous allons supposer dans la suite que E n'est pas séparable mais chaque $E_\gamma$ est séparable dans lui. On est naturellement conduit à considérer l'espace conjugué de E. Il est isomorphique au sens abstrait, d'après le théorème 6, à la limite projective des espaces $E'_\gamma$. Mais la topologie est essentiellement différente. La topologie de $E'$ comme l'espace conjugué de E est définie par une norme et par rappart à laquelle $E'$ est complet, bornologique et aussi tonnelé. Mais la topologie de $E'$ comme la limite projective de $E'_\gamma$ ne rend pas $E'$, quoiqu'il soit complet par cette topologie, ni bornologique ni tonnelé. Nous voyons ainsi :

I. *Il y a des espaces linéaires localement convexes complets qui ne sont pas ni des espaces bornologiques ni des espaces tonnelés.*

Comme le produit direct de $E'_\gamma$ est un espace tonnelé, et la limite projective de $E'_\gamma$ est son sous-espace fermé, on a :

II. *Il y a des espaces linéaires localement convexes, tonnelés et complets qui possèdent un sous-espace fermé non-tonnelé.*

Troisième exemple est[1] :

III. *Il y a des espaces linéaires localement convexes, bornologiques et complets qui possèdent un sous-espace fermé non-bornologique.*

Pour construire cet exemple, prenons un espace E pour lequel la puissance de l'ensemble des indices $\Gamma$ considérés ci-dessus peut être pris $\leqslant \aleph_c$. Quelques-uns de tels espaces sont les espaces $(l^p)$ formés

1) v. A. Grothendieck [5], N. Bourbaki [3], p. 11.

sur un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_c$ ou l'exemple de L. Schwartz et J. Dieudonné [3]. Alors le produit direct de $E'_\gamma$ est, comme le produit direct de puissance $\leqslant \aleph_c$ des espaces de Banach, un espace bornologique, mais son sous-espace fermé, la limite projective de $E'_\gamma$ est non-bornologique.

*Note ajoutée pendant la correction des épreuves.* Rècemment A. Grothendieck annonce qu'il existe un exemple qui résout tous les problèmes de L. Schwartz et J. Dieudonné [8], §15 négativement. Voir: A. Grothendieck: Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques, Comptes Rendus Acad. Sci., tom. 233 (1951), p. 839 - 841.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] L. ALAOGLU: Weak topologies of normed linear spaces, Ann. Math., tom. 41 (1940), p. 252 - 267.

[2] R. ARENS: Duality in linear spaces, Duke Math. Journ., tom. 14 (1947), p. 787 - 794.

[3] N. BOURBAKI: Sur certains espaces vectoriels topologiques, Ann. Inst. Fourier, tom. 2 (1950), p. 5 - 16.

[4] A. GROTHENDIECK: Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces ($\mathfrak{F}$), Comptes Rendus Acad. Sci., tom. 230 (1950), p. 1561 - 1563.

[5] A. GROTHENDIECK: Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), Comptes Rendus Acad. Sci., tom. 231 (1950), p. 940 - 941.

[6] G. W. MACKEY: On convex topological linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., tom. 60 (1946), p. 520 - 537.

[7] S. LEFSCHETZ: Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., tom. 27 (1942), Amer. Math. Soc., New York.

[8] L. SCHWARTZ et J. DIEUDONNÉ: La dualité dans les espace ($\mathfrak{F}$) et ($\mathfrak{L}\mathfrak{F}$), Ann. Inst. Fourier, tom. 1 (1949), p. 61 - 101.

[9] A. WEIL: L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités sci. ind., tom. 869 (1940), Hermann, Paris.



DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
UNIVERSITY OKAYAMA


(*Received May 29, 1952*)