

SUR LE CARACTÈRE FONCTIONNELLE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET

NOBUYUKI NINOMIYA

Plaçons-nous dans l'espace euclidien R^n à $n(\geq 3)$ dimensions. Soit $\mathfrak{F}$ dans la suite l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues données sur la frontière F d'un domaine D . Alors, comme bien connu, la solution $H_f^p(M)$ du problème généralisé de Dirichlet pour D et f de $\mathfrak{F}$ est linéaire et non-négative, quel que soit un M fixé de D , considérée comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$. Inversement, étant donnée une fonction $A_M(f)$ dans D bien déterminée pour toute f de $\mathfrak{F}$ qui est linéaire et non-négative, quel que soit un M fixé de D , considérée comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$, sous quelles conditions $A_M(f)$ représente-t-elle la solution $H_M^p(f)$ du problème généralisé de Dirichlet pour D et f ? Quant à ce problème, on connaît les résultats récents obtenus par M. M. Keldych et M. M. Inoue.

Rappel du théorème de M. Keldych¹⁾: Soient D un domaine borné, F sa frontière, et $A_M(f)$ une fonctionnelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

- (1) $A_M(f)$ est linéaire comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.
- (2) $\min_{Q \in F} f(Q) \leq A_M(f) \leq \max_{Q \in F} f(Q)$ en tout M de D .
- (3) Si le problème classique de Dirichlet est soluble pour D et f , $A_M(f)$ est égale à cette solution.
- (4) $A_M(f)$ est harmonique dans D .

Alors, $A_M(f)$ est déterminée de la seule manière pour toute f de $\mathfrak{F}$.

Rappel du théorème de M. Inoue²⁾: Soient D un domaine de frontière F bornée et $A_M(f)$ une fonctionnelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

- (1) $A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.

1) M. Keldych, Sur le problème de Dirichlet, C.R. Acad. Sci. URSS, **32**, 1941, pp. 308 - 309.

2) M. Inoue, Sur la détermination fonctionnelle de la solution du problème de Dirichlet, Memoirs Fac. Sci. Kyushu Univ., **5**, 1950, pp. 69 - 74.

- (2) $A_M([\nu_Q]_n) \leq \nu_M(Q)$ en tout point-frontière Q et pour tout n assez grand.
- (3) $A_M(\nu_M) \geq u(M)$ pour toute fonction u harmonique dans D dont la p.g.l. en tout point-frontière Q est au plus égale à $\nu_M(Q)$.

Où $\nu_M(Q) = \frac{1}{MQ}$ et $[\nu_Q]_n = \min [\nu_Q, n]$. Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^p(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

Dans cette note, on énoncera quelques remarques pour leurs théorèmes. Soient désormais D un ensemble ouvert dont la frontière F est un compact de capacité positive, ε_M la masse unité placée en un point M , λ une distribution sphérique¹⁾, et α ²⁾ la distribution positive donnée par $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \lambda_i$, où $\{\lambda_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) est la séquence de toute distribution sphérique de rayon nombre rationnel et centrée en point rationnel et $\{a_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) est une séquence de nombres positifs telle que $U^\alpha(Q)$ ³⁾ soit continu en tout Q de R^n . Alors, on a;

Théorème 1. Soit $A_M(f)$ une fonctionnelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

- (a) $A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.
- (b) Pour toute f_λ de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel de toute λ sphérique, $A_M(f_\lambda)$ est majorée par $U^\lambda(M)$.
- (c) Pour toute f de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel continu d'une distribution positive portée par CD , $A_M(f)$ est égale à la valeur de ce potentiel en M .

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^p(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effet, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F , au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

1) Une distribution positive de masse totale unité avec la densité constante portée par une surface sphérique.

2) Cette α a été construite par M.H. Cartan, et la distribution obtenue par le balayage (intérieur ou extérieur) de celle-ci sur un ensemble quelconque est caractéristique. (H. Cartan, Théorie générale du balayage en potentiel newtonien, Ann. Univ. Grenoble, Sec. Sci. Math. Phys., 22, 1946, voir n° 21 et n° 22).

3) Soit $U^\mu(Q) = \int \phi(QP) d\mu(P)$ le potentiel d'une distribution μ de masse. La fonction fondamentale est $\phi(r) = \frac{1}{r^{n-2}}$ ($n \geq 3$).

$$A_M(f) = \int_F f(Q) d\nu_M(Q).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D . En vertu de la condition (c) posée à $A_M(f)$, si un potentiel $U^\mu(Q)$ d'une distribution μ positive portée par CD est continu en tout Q de R^n , on a

$$\begin{aligned} \int_F U^\mu(Q) d\nu_M(Q) &= U^\mu(M), \quad \text{c'est-à-dire,} \\ \int U^{\nu_M}(Q) d\mu(Q) &= \int U^{\varepsilon_M}(Q) d\mu(Q), \end{aligned}$$

ce qui entraîne la coïncidence d'entre les deux potentiels $U^{\nu_M}(Q)$ et $U^{\varepsilon_M}(Q)$ en tout Q de CD sauf sur un ensemble de capacité nulle. Car, étant donné un ensemble borné et borélien quelconque de capacité positive, on peut toujours trouver une distribution positive portée par celui-ci dont le potentiel est continu en tout point de R^n . Naturellement, les deux coïncident en tout point extérieur de D . D'autre part, en vertu de la condition (b) posée à $A_M(f)$, on a pour toute λ sphérique

$$\begin{aligned} \int_F U^\lambda(Q) d\nu_M(Q) &\leq U^\lambda(M), \quad \text{c'est-à-dire,} \\ \int U^{\nu_M}(Q) d\lambda(Q) &\leq \int U^{\varepsilon_M}(Q) d\lambda(Q), \end{aligned}$$

ce qui entraîne en tout Q de R^n l'inégalité

$$U^{\nu_M}(Q) \leq U^{\varepsilon_M}(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. Le théorème montre que dans le théorème de M. Keldych l'harmonicité de $A_M(f)$ est inutile sous la condition (b).

Théorème 2. Soit $A_M(f)$ une fonctionnelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

- (a) $A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.
- (b) Pour toute f_λ de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel de toute λ sphérique, $A_M(f_\lambda)$ est majorée par $U^\lambda(M)$.
- (c) Pour une f_0 de $\mathfrak{F}$ donnée par le potentiel $U^0(Q)$, $A_M(f_0)$ est

égale à la solution du problème généralisé de Dirichlet pour f_0 et D (c'est-à-dire, le potentiel $U^w(M)$ de la distribution α' obtenue par le balayage de α sur CD).

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^p(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effet, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F , au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

$$A_M(f) = \int_F f(Q) d\nu_M(Q).$$

Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D . Pour cela, il suffit¹⁾ de montrer que l'on a pour toute distribution λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q) d\nu_M(Q) = \int_F U^\lambda(Q) d\mu_M(Q).$$

Comme on l'a déjà dit, la condition (b) posée à $A_M(f)$ entraîne en tout Q de R^n l'inégalité

$$U^{\nu_M}(Q) \leq U^{\varepsilon_M}(Q).$$

Par suite, on a en tout Q de D

$$U^{\nu_M}(Q) \leq U^{\mu_M}(Q).$$

Car, $U^{\mu_M}(Q)$ est la plus grande minorante harmonique de $U^{\varepsilon_M}(Q)$ dans D . D'autre part, la même inégalité a lieu en tout Q de CD sauf sur un ensemble de points-frontières irréguliers pour le problème de Dirichlet. En définitive, on a en tout Q de R^n

$$U^{\nu_M}(Q) \leq U^{\mu_M}(Q).$$

Par conséquent, on a pour toute λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q) d\nu_M(Q) \leq \int_F U^\lambda(Q) d\mu_M(Q)$$

et encore on a

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 3.

$$A_M(f_0) = \int_F U^\alpha(Q) d\nu_M(Q) \leq \int_F U^\alpha(Q) d\mu_M(Q) = U^{\alpha'}(M).$$

Donc, on a

$$\int_F U^\alpha(Q) d\nu_M(Q) = \int_F U^\alpha(Q) d\mu_M(Q),$$

ce qui entraîne pour toute λ_i sphérique de rayon nombre rationnel et centrée en point rationnel

$$\int_F U^{\lambda_i}(Q) d\nu_M(Q) = \int_F U^{\lambda_i}(Q) d\mu_M(Q).$$

Alors, on a facilement pour toute λ sphérique

$$\int_F U^\lambda(Q) d\nu_M(Q) = \int_F U^\lambda(Q) d\mu_M(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. Le théorème montre que dans le théorème de M. Inoue la condition (2) équivaut à la condition (b) et la condition (3) peut être remplacée par la condition (c) plus facile à comprendre.

Remarque. Le théorème 2 diffère du théorème 1 au sens essentiel. En effet, on sait¹⁾ que la fonction continue donnée sur la frontière d'un ensemble D ouvert quelconque par le potentiel $U^\alpha(Q)$ n'est soluble pour le problème classique de Dirichlet pour D que si D est régulier pour le problème de Dirichlet.

Voici une amélioration du théorème de M. Keldych.

Théorème 3. Soit $A_M(f)$ une fonctionnelle bien déterminée pour un M de D et toute f de $\mathfrak{F}$ satisfaisante aux conditions suivantes.

- (a) $A_M(f)$ est linéaire et non-négative comme fonctionnelle de f donnée sur $\mathfrak{F}$.
- (b) $A_M(f) \leq \max_{Q \in F} f(Q)$ en tout M de D .
- (c) Pour toute f de $\mathfrak{F}$ donnée par un potentiel continu d'une distribution positive portée par CD , $A_M(f)$ est égale à la valeur de ce potentiel en M .
- (d) Pour une f_0 de $\mathfrak{F}$ donnée par le potentiel $U^\alpha(Q)$, $A_M(f_0)$ est une fonction harmonique ou sousharmonique dans D .

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 22.

Alors, $A_M(f)$ coïncide nécessairement avec $H_M^n(f)$ pour toute f de $\mathfrak{F}$.

En effet, d'après la condition (a) posée à $A_M(f)$, on peut trouver une seule distribution ν_M positive portée par F , au moyen de laquelle $A_M(f)$ s'écrit sous la forme

$$A_M(f) = \int_F f(Q) d\nu_M(Q).$$

Alors, d'après la condition (b) posée à $A_M(f)$, la masse totale de ν_M est toujours au plus égale à l'unité. Pour prouver le théorème, il suffit donc de montrer que ν_M est d'accord avec la distribution μ_M obtenue par le balayage de la masse unité ε_M sur la frontière F de D . Comme on l'a déjà dit, la condition (c) posée à $A_M(f)$ entraîne la coïncidence d'entre les deux potentiels $U^{\mu'}(Q)$ et $U^{\nu_M}(Q)$ en tout Q de CD sauf sur un ensemble de capacité nulle. Par suite, on a, quelle que soit une distribution μ positive d'énergie finie,

$$\int_F U^{\mu'}(Q) d\nu_M(Q) = U^{\mu'}(M),$$

où μ' désigne la distribution obtenue par le balayage de μ sur CD . Car, μ' étant d'énergie finie aussi, elle ne peut charger aucune masse sur un ensemble de capacité nulle. Soit τ la distribution de mesure au sens de Lebesgue dans une petite sphère centrée en un point-frontière P régulier pour le problème de Dirichlet. Soulignons que le potentiel $U^\tau(Q)$ est continu en tout Q de R^n et admet un maximum absolu strict en le centre P de cette sphère. Alors, on a en tout M de D

$$\int_F U^\tau(Q) d\nu_M(Q) = U^\tau(M).$$

Comme $M \rightarrow P$, on a

$$\begin{aligned} U^\tau(P) &= \lim_{M \rightarrow P} U^\tau(M) = \lim_{M \rightarrow P} \int_F U^\tau(Q) d\nu_M(Q) \\ &\leq \lim_{M \rightarrow P} \int_F U^\tau(Q) d\nu_M(Q) \leq \overline{\lim}_{M \rightarrow P} \int_F U^\tau(Q) d\nu_M(Q) \leq U^\tau(P). \end{aligned}$$

Donc, on a

$$\lim_{M \rightarrow P} \int_F U^\tau(Q) d\nu_M(Q) = U^\tau(P).$$

En tenant compte de $\nu_M(F) \leq 1$, cela montre que, si M tend vers un point-frontière P régulier quelconque, ν_M converge vaguement vers ε_P . Encore, en tenant compte de $\min_{Q \in F} U^r(Q) \cdot \nu_M(F) \leq U^r(M)$, on sait évidemment que, si M tend vers l'infini, $\nu_M(F)$ tend vers nulle. Par suite, si P est un point-frontière régulier, on a

$$\lim_{M \rightarrow P} \int_F U^a(Q) d\nu_M(Q) = U^a(P)$$

et encore

$$\lim_{M \rightarrow P} \int_F U^{a'}(Q) d\nu_M(Q) = U^{a'}(P).$$

La fonction $f^*(Q) = U^a(Q) - U^{a'}(Q)$ définie sur F est nécessairement nulle en tout Q régulier et positive en tout Q irrégulier¹⁾. Posons

$$V(M) = \int_F f^*(Q) d\nu_M(Q) = A_M(f_0) - U^{a'}(M),$$

alors, elle est harmonique ou sousharmonique, non-négative et bornée supérieurement dans D . De plus, si M tend vers un point-frontière P régulier, elle tend nécessairement vers nulle, et, si M tend vers l'infini, elle l'est aussi. Par conséquent, on a $V(M) \leq 0$ dans D . Donc, on a $V(M) = 0$ dans D . Ainsi, on sait que ν_M ne charge aucune masse sur un ensemble de points-frontières irréguliers de D . Alors, la relation

$$\int_F U^{a'}(Q) d\nu_M(Q) = U^{a'}(M)$$

ayant lieu pour toute λ sphérique équivaut à

$$\int_F U^\lambda(Q) d\nu_M(Q) = U^\lambda(M) = \int_F U^\lambda(Q) d\mu_M(Q).$$

Donc, on a $\nu_M = \mu_M$.

Remarque. On pourra montrer analoguement que, lorsque $n = 2$, les trois théorèmes rapportés plus haut sont établis aussi pour tout

1) H. Cartan, loc. cit., voir n° 22.

ensemble D ouvert et borné en considérant des potentiels logarithmiques du type $\int \log \frac{1}{r} d\mu$.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received May 26, 1952)