SUR DEUX THÉORÈMES CONCERNANT UN ENSEMBLE PARTIELLEMENT ORDONNÉ

Takeshi INAGAKI

Dans son ouvrage illustre " Was sind und was sollen die Zahlen ? ", en utilisant la notion dite *chaîne*, R. Dedekind a extrait d'un ensemble infini un ensemble bien ordonné du type ω. Il me semble que cette notion chaîne est très importante sous le rapport de l'ensemble bien ordonné; donc, en nous appuyant sur l'idée due à R. Dedekind, dans cet article nous voudrons d'abord montrer un théorème qui extrait un ensemble bien ordonné d'un ensemble partiellement ordonné inductif au sens faible sous certaines conditions nécessaires, et puis nous donnerons de ce théorème l'un qui se rattache à celui de M. Zorn et à l'axiome du choix dû à E. Zermelo.

Nous insérons tout d'abord les définitions nécessaires:

Un ensemble partiellement ordonné E est dit *inductif au sens faible* lorsque, quel que soit un sous-ensemble ordonné A de E, il existe alors la borne supérieure de A, désignée par *Sup.* A, s'il existe au moins un majorant[1] de A.

Un ensemble partiellement ordonné E est dit inductif, lorsque, quel que soit un sous-ensemble ordonné A de E, il existe toujours *Sup.* A.

Ceci étant posé, nous commencerons par la considération générale: Soit E un ensemble non-vide et soit $\mathfrak{P}$ une propriété qu'un ensemble peut posséder. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de tous les sous-ensembles de E jouissant de la propriété $\mathfrak{P}$, et un élément de $\mathfrak{F}$ est appelé ensemble-$\mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{F}$ remplit les deux conditions suivantes:

1° $E \in \mathfrak{F}$,

2° *La partie commune aux éléments du nombre arbitraire de* $\mathfrak{F}$ *appartient à* $\mathfrak{F}$,

nous dirons que $\mathfrak{P}$ est *multiplicatif*. Dans ce cas, il existe, quel que soit $x \in E$, au moins un élément de $\mathfrak{F}$ contenant x selon 1°. Donc, la partie commune à tous les éléments de cette sorte est le plus petit ensemble-$\mathfrak{P}$ contenant x, et nous la désignerons par $\mathfrak{K}(x)$ dans ce qui suit.

---

1) S'il existe pour tout $a \in A$ un point $e \in E$ tel que $e \geqq a$, le point e est appelé *un majorant* de A et de plus A est dit *majoré* par e.

D'après cette notation, on a facilement le

Lemme 1. *(1)* $x \in \mathfrak{K}(x)$.

(2) *Si* $y \in \mathfrak{K}(x)$, *alors* $\mathfrak{K}(y) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$.

(3) $\mathfrak{K}(y) \subset \mathfrak{K}(x)$ *équivaut à l'inclusion* $\mathfrak{K}(y) \subseteqq \mathfrak{K}(x) - \{x\}$[1].

Supposons maintenant qu'il existe une fonction f de E dans E lui-même telle que, quel que soit $x \in E$, on a l'égalité

$$(*) \qquad \mathfrak{K}(x) = \{x\} + \mathfrak{K}(f(x)).$$

Nous pouvons alors vérifier le

Lemme 2. *Si l'égalité* $(*)$ *se trouve, on a*

(1) $f(\mathfrak{K}(x)) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$,

(2) $f(\mathfrak{K}(x)) \subseteqq \mathfrak{K}(f(x))$.

Démonstration. (1) : Soit y un point quelconque de $\mathfrak{K}(x)$. Alors on a selon le lemme 1 $\mathfrak{K}(y) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$ et $f(y) \in \mathfrak{K}(f(y))$, et en vertu de l'égalité $(*)$ on a à nouveau $\mathfrak{K}(f(y)) \subseteqq \mathfrak{K}(y)$. Donc on a immédiatement $f(y) \in \mathfrak{K}(x)$.

(2) : En rapprochant (1), l'égalité $(*)$ et le lemme 1, on a

$$f(\mathfrak{K}(x)) = f(\{x\} + \mathfrak{K}(f(x))) = f(x) + f(\mathfrak{K}(f(x))) \subseteqq f(x) + \mathfrak{K}(f(x)) = \mathfrak{K}(f(x)).$$

Ce qui nous donne l'inclusion (2) que nous avions en vue, c.q.f.d.

Des lemmes 1 et 2, on peut déduire le

Lemme 3. *Pour que l'égalité* $(*)$ *se trouve, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies*:

(1) $\{x\} + \mathfrak{K}(f(x))$ *est un ensemble-*$\mathfrak{P}$,

(2) $f(\mathfrak{K}(x)) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$.

Démonstration. Il est évident du lemme 2 que ces conditions sont nécessaires.

Réciproquement, si l'on suppose que l'ensemble $\{x\} + \mathfrak{K}(f(x))$ soit un ensemble-$\mathfrak{P}$, on a évidemment $\mathfrak{K}(x) \subseteqq \{x\} + \mathfrak{K}(f(x))$ selon la définition de $\mathfrak{K}(x)$. D'autre part, $\mathfrak{K}(x)$ contient le point x selon le lemme 1, et donc $f(x) \in \mathfrak{K}(x)$ selon l'hypothèse (2). Par suite, en vertu du lemme 1 on a $\mathfrak{K}(f(x)) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$, donc $\{x\} + \mathfrak{K}(f(x)) \subseteqq \mathfrak{K}(x)$.

---

1) $\{x\}$ désigne l'ensemble formé d'un seul point x.

Des résultats obtenus plus haut, on a immédiatement l'égalité $(*)$, c.q.f.d.

Ces préliminaires étant posés, nous allons maintenant prouver le théorème intéressant qui suit:

Théorème 1. (*Théorème à extraire un ensemble bien ordonné*).

Soit E un ensemble partiellement ordonné inductif au sens faible. S'il existe une fonction f de E dans E lui-même telle que, pour tout $x \in E$, elle satisfait à la condition

$$x \leqq f(x),$$

alors nous pouvons extraire, pour chaque $a \in E$, un sous-ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(a)$ remplissant les trois conditions suivantes:

(α) $a \in \mathfrak{K}(a)$.

(β) $f(\mathfrak{K}(a)) \subseteqq \mathfrak{K}(a)$.

(γ) *Quel que soit un sous-ensemble ordonné A de $\mathfrak{K}(a)$, s'il existe Sup. A, alors il appartient aussi à $\mathfrak{K}(a)$.*

Démonstration. Si un sous-ensemble $\mathfrak{K}$ de E jouit des propriétés suivantes:

($\mathfrak{P}_1$) $f(\mathfrak{K}) \subseteqq \mathfrak{K}$,

($\mathfrak{P}_2$) *Quel que soit un sous-ensemble ordonné A de $\mathfrak{K}$, s'il existe Sup. A, alors il appartient aussi à $\mathfrak{K}$,*

nous dirons alors que l'ensemble $\mathfrak{K}$ possède la propriété $\mathfrak{P}$.

D'après cette définition, comme on peut sans peine le vérifier, la propriété $\mathfrak{P}$ est multiplicative, et E lui-même est un ensemble-$\mathfrak{P}$. Par conséquent, pour chaque point a de E, il existe le plus petit ensemble $\mathfrak{K}(a)$ jouissant de la propriété $\mathfrak{P}$ et contenant a.

Ceci étant posé, nous voudrons démontrer maintenant que $\mathfrak{K}(a)$ vérifie les conditions citées plus haut, en divisant la démonstration en plusieurs lemmes:

Lemme 4. *Si $x \in \mathfrak{K}(a)$, alors $a \leqq x$.*

Démonstration. Il est évident que l'ensemble $\mathfrak{K}$ de tous les points x de E tels que $a \leqq x$ vérifie les conditions (α), (β) et (γ); donc, selon la définition de $\mathfrak{K}(a)$, $\mathfrak{K}$ contient $\mathfrak{K}(a)$ comme un sous-ensemble. Par suite, si $x \in \mathfrak{K}(a)$, alors $a \leqq x$, c.q.f.d.

Lemme 5. *L'égalité suivante se trouve*:

$$\mathfrak{K}(a) = \{a\} + \mathfrak{K}(f(a)).$$

Démonstration. On a d'abord $f(\mathfrak{K}(a)) \subseteqq \mathfrak{K}(a)$, selon la définition de $\mathfrak{K}(a)$. Par suite, en tenant compte du lemme 3, il nous reste seulement à démontrer que $\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$.

Or, en tenant compte du lemme 3 et du lemme 1, on a

$$\begin{aligned} f(\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))) &= f(a) + f(\mathfrak{K}(f(a))) \subseteqq f(a) + \mathfrak{K}(f(a)) \\ &= \mathfrak{K}(f(a)) \subseteqq \{a\} + \mathfrak{K}(f(a)), \end{aligned}$$

donc $\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$ vérifie la condition $(\mathfrak{P}_1)$.

De plus, soit A un sous-ensemble ordonné de $\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$ et supposons que sa borne supérieure *Sup.* A se trouve. Dans ce cas, les deux cas suivants sont possibles:

Premier cas où A se compose du point a seul: Dans ce cas, il est évident que *Sup.* $A = a \in \{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$.

Deuxième cas où A contient un point x distinct de a: Dans ce cas, il est évident selon le lemme 4 que $f(a) \leqq x$, et par suite on a $a < x$, puisque $a \leqq f(a)$. Il en résulte clairement que *Sup.* $A =$ *Sup.* $(A - \{a\})$. En outre, étant $A - \{a\} \subseteqq \mathfrak{K}(f(a))$ et $\mathfrak{K}(f(a))$ un ensemble-$\mathfrak{P}$, il vient *Sup.* $(A - \{a\}) \in \mathfrak{K}(f(a))$; on a donc *Sup.* $A \in \{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$, et ce qui montre que l'ensemble $\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$ vérifie la condition $(\mathfrak{P}_2)$. Par conséquent, l'ensemble $\{a\} + \mathfrak{K}(f(a))$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$ selon le lemme 4, c.q.f.d.

Définition. Un point n de $\mathfrak{K}(a)$ est dit *normal*, s'il vérifie les conditions suivantes:

(n_1) *n est comparable à tout point x de $\mathfrak{K}(a)$, c'est-à-dire que, quel que soit $x \in \mathfrak{K}(a)$, l'un et l'un seul des trois cas suivants se trouve*:

$$n < x, \quad n = x, \quad n > x.$$

(n_2) *Si $x \in \mathfrak{K}(a)$ et $x < n$, alors $f(x) \leqq n$.*

Par exemple, a et $f(a)$ etc. sont normaux. De plus, en tenant compte de la propriété de la fonction f, il se trouve que:

$$\text{si} \quad x \in \mathfrak{K}(a) \quad \text{et} \quad x \leqq n, \quad \text{alors} \quad f(x) \leqq f(n).$$

Lemme 6. *Soit n un point normal de $\mathfrak{K}(a)$. On a alors, quel que soit $x \in \mathfrak{K}(a)$,*

$$x \leqq n \quad ou \quad f(n) \leqq x.$$

Démonstration. En désignant par $\mathfrak{K}$ l'ensemble de tous les points de $\mathfrak{K}(a)$ qui satisfont à la condition citée plus haut, il est claire que

$a \in \mathfrak{K}$ et $\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{K}(a)$. Par suite, pour démontrer ce lemme il suffit de montrer que $\mathfrak{K}$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$.

Or, d'une part si $x \in \mathfrak{K}$, on a naturellement $x \in \mathfrak{K}(a)$, et par suite, il vient $f(x) \in \mathfrak{K}(a)$ puisque $\mathfrak{K}(a)$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$. En outre, selon la définition de $\mathfrak{K}$, on a ou bien $x \leqq n$ ou bien $f(n) \leqq x$. D'autre part, si $x < n$, on a évidemment $f(x) \leqq n$ selon la condition (n_2), et si $x = n$, on a $f(x) = f(n)$, et enfin si $f(n) \leqq x$, on a clairement $f(n) \leqq f(x)$. Par conséquent, on peut dire que si $x \in \mathfrak{K}$, alors $f(x) \in \mathfrak{K}$, à savoir que $\mathfrak{K}$ vérifie la condition $(\mathfrak{P}_1)$, De plus, soit $A = \{x_\lambda\}$ un sous-ensemble ordonné de $\mathfrak{K}$ et supposons que *Sup.* A existe. Alors, d'une part si $x_\lambda \leqq n$ pour tout x_λ, on a évidemment *Sup.* $A \leqq n$, et d'autre part s'il existe un x_λ tel que $n < x_\lambda$, on a $f(n) \leqq x_\lambda$ en tenant compte de la définition de $\mathfrak{K}$; donc on a $f(n) \leqq$ *Sup.* A. Or, en tenant compte du fait que *Sup.* $A \in \mathfrak{K}(a)$, il en résulte dans les deux cas considérés que *Sup.* $A \in \mathfrak{K}$, à savoir $\mathfrak{K}$ vérifie la condition $(\mathfrak{P}_2)$. Par conséquent, $\mathfrak{K}$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$, c.q.f.d.

Lemme 7. *Si n est normal de $\mathfrak{K}(a)$, alors $f(n)$ l'est aussi.*

Démonstration. D'abord, étant $n \in \mathfrak{K}(a)$, on a $f(n) \in \mathfrak{K}(a)$. D'ailleurs, n étant normal de $\mathfrak{K}(a)$; si $x \in \mathfrak{K}(a)$, on a selon le lemme 6 ou bien $x \leqq n$ ou bien $f(n) \leqq x$. Dans le premier cas, on a $x \leqq f(n)$ selon la propriété de la fonction f. Par suite, quel que soit $x \in \mathfrak{K}(a)$, x est comparable à $f(n)$, donc $f(n)$ vérifie la condition (n_1). De plus, si $x \in \mathfrak{K}(a)$ et $x < f(n)$, on a $x \leqq n$ selon le lemme 6, donc on a $f(x) \leqq f(n)$ en tenant compte de la condition (n_2). Donc $f(n)$ est normal de $\mathfrak{K}(a)$, c.q.f.d.

Lemme 8. *Soit $A = \{n_\lambda\}$ un sous-ensemble ordonné et formé de points normaux de $\mathfrak{K}(a)$. S'il existe Sup. A, il est aussi un point normal de $\mathfrak{K}(a)$.*

Démonstration. D'après la définition de $\mathfrak{K}(a)$, il est évident que *Sup.* $A \in \mathfrak{K}(a)$. Or, n_λ étant normal, il est comparable à x, quel que soit $x \in \mathfrak{K}(a)$. Par suite, si $n_\lambda \leqq x$ pour tout n_λ, on a évidemment *Sup.* $A \leqq x$, et s'il existe un n_λ tel que $x < n_\lambda$, on a clairement $x <$ *Sup.* A. Il en résulte que *Sup.* A est comparable à x, c'est-à-dire que *Sup.* A vérifie la condition (n_1).

Ensuite, soient $x \in \mathfrak{K}(a)$ et $x <$ *Sup.* A. Dans ce cas, si $n_\lambda \leqq x$ pour tout n_λ, on a *Sup.* $A \leqq x$; ce qui contredit à la supposition $x <$ *Sup.* A, donc il existe un n_{λ_0} tel que $x < n_{\lambda_0}$. Puisque le n_{λ_0} est normal, on a $f(x) \leqq n_{\lambda_0}$ selon la propriété (n_2), et donc $f(x) \leqq$ *Sup.* A.

Il en résulte que *Sup.* A vérifie la condition (n_2), c.q.f.d.

Lemme 9. *Tout point de* $\mathfrak{K}(a)$ *est normal.*

Démonstration. En désignant par $\mathfrak{N}$ l'ensemble de tous les points normaux de $\mathfrak{K}(a)$, il est évident que $a \in \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N} \subseteqq \mathfrak{K}(a)$, et de plus $\mathfrak{N}$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$ selon les lemmes 7 et 8. Donc on a $\mathfrak{K}(a) \subseteqq \mathfrak{N}$; ce qui montre que le lemme est vrai, c.q.f.d.

Lemme 10. $\mathfrak{K}(a)$ *est un ensemble bien ordonné contenant* a *comme le premier point.*

Démonstration. Il est évident que a est le premier point de $\mathfrak{K}(a)$. Ceci étant posé, pour démontrer que $\mathfrak{K}(a)$ est bien ordonné, comme on le sait, il suffit de démontrer que, pour chaque coupe de $\mathfrak{K}(a)$:

$$\mathfrak{K}(a) = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2,$$

$\mathfrak{K}_2$ possède le premier point, où $\mathfrak{K}_1$ et $\mathfrak{K}_2$ ne sont pas vides, et de plus si $x_1 \in \mathfrak{K}_1$ et $x_2 \in \mathfrak{K}_2$, alors $x_1 < x_2$.

Or, $\mathfrak{K}_1$ étant ordonné selon le lemme 9, *Sup.* $\mathfrak{K}_1$ existe et il appartient à $\mathfrak{K}(a)$, car $\mathfrak{K}_1$ est majoré et $\mathfrak{K}(a)$ un ensemble-$\mathfrak{P}$. Par suite, si *Sup.* $\mathfrak{K}_1 \in \mathfrak{K}_2$, il esté vident qu'il est le premier point de $\mathfrak{K}_2$. D'autre part, si *Sup.* $\mathfrak{K}_1 \overline{\in} \mathfrak{K}_2$, il appartient manifestement à $\mathfrak{K}_1$ et il est de plus le dernier point de $\mathfrak{K}_1$. Dans ce cas, on aura *Sup.* $\mathfrak{K}_1 < f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$ et $f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$ sera le premier point de $\mathfrak{K}_2$. En effet, par contre si *Sup.* $\mathfrak{K}_1 = f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$, alors $\mathfrak{K}_1$ se compose de tous les points x de $\mathfrak{K}(a)$ inférieurs à *Sup.* $\mathfrak{K}_1$. Cependant, on a $f(x) \leqq f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1) =$ *Sup.* $\mathfrak{K}_1$, puisque *Sup.* $\mathfrak{K}_1$ est normal; donc $f(x) \in \mathfrak{K}_1$, c'est-à-dire qu'on a $f(\mathfrak{K}_1) \subseteqq \mathfrak{K}_1$. En outre, si A est un sous-ensemble ordonné de $\mathfrak{K}_1$, A possède manifestement le point *Sup.* $\mathfrak{K}_1$ comme un majorant, et par suite, en vertu de l'hypothèse que E est inductif au sens faible, *Sup.* A se trouve dans $\mathfrak{K}(a)$ puisque $\mathfrak{K}(a)$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$, et de plus *Sup.* $A \leqq$ *Sup.* $\mathfrak{K}_1$ selon la définition de $\mathfrak{K}(a)$. Ce qui nous montre que $\mathfrak{K}_1$ est un ensemble-$\mathfrak{P}$ contenant a, c'est-à-dire que $\mathfrak{K}_1$ doit être identique avec $\mathfrak{K}(a)$. Nous aboutissons donc à une contradiction que $\mathfrak{K}_2$ est vide. Par conséquent, on a *Sup.* $\mathfrak{K}_1 < f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$ et $f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1) \in \mathfrak{K}_2$. De plus, tout point de $\mathfrak{K}(a)$ étant normal, il n'existe d'après la condition (n_2) aucun point x de $\mathfrak{K}(a)$ tel que *Sup.* $\mathfrak{K}_1 < x < f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$. Donc $f($*Sup.* $\mathfrak{K}_1)$ est le premier point de $\mathfrak{K}_2$, c.q.f.d.

Lemme 11. $\mathfrak{K}(a)$ *est un ensemble bien ordonné qui vérifie les conditions énoncées dans le théorème 1.*

Démonstration. En rapprochant le lemme 10 de la définition de $\mathfrak{K}(a)$, la démonstration sera complètement établie, c.q.f.d.

On peut déduire immédiatement du théorème précédent le

Corollaire. *Soit E un ensemble ordonné inductif. S'il existe une fonction f de E dans E lui-même telle que, quel que soit $x \in E$,*

$$x \lesssim f(x),$$

alors il y a dans E au moins un point x invariable par rapport à f, à savoir qu'il y a au moins un point x tel que $x = f(x)$.

Démonstration. E étant inductif, il est encore inductif au sens faible; donc selon le théorème, il y a, pour chaque point $a \in E$, un ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(a)$ et il vérifie les conditions (α), (β) et (γ) dans le théorème. Il existe alors $Sup.\ \mathfrak{K}(a)$ et qui appartient à $\mathfrak{K}(a)$, puisque E est inductif et $\mathfrak{K}(a)$ vérifie la condition (γ). De plus, selon la condition (β), on a $f(Sup.\ \mathfrak{K}(a)) \in \mathfrak{K}(a)$; donc on a $f(Sup.\ \mathfrak{K}(a)) \lesssim Sup.\ \mathfrak{K}(a)$. D'autre part, étant évidemment $Sup.\ \mathfrak{K}(a) \lesssim f(Sup.\ \mathfrak{K}(a))$, on a $Sup.\ \mathfrak{K}(a) = f(Sup.\ \mathfrak{K}(a))$. Il en résulte qu'il existe dans E un point invariable par rapport à f, c.q.f.d.

Comme une application du théorème 1, nous en démontrerons que, en utilisant l'axiome du choix, un ensemble non-vide peut être bien ordonné.

Soit E un ensemble non-vide et soit $\mathfrak{E}$ la famille de tous les sous-ensembles de E. Si l'on ordonne la famille $\mathfrak{E}$ par l'inclusion inverse, à savoir par la règle telle que, soient P et Q deux éléments de $\mathfrak{E}$,

$$P \leqq Q \qquad \text{équivaut à} \qquad P \geqq Q.$$

Comme on peut sans peine le vérifier, $\mathfrak{E}$ devient par cet ordre un ensemble partiellement ordonné et inductif.

Ceci étant posé, selon l'axiome du choix, il existe une fonction φ définie sur $\mathfrak{E}$ telle que, quel que soit un élément non-vide P de $\mathfrak{E}$, sa valeur $\varphi(P)$ est un seul point de P : $\varphi(P) \in P$.

Nous définirons maintenant une fonction f:

$$f(P) = P - \varphi(P), \quad \text{si } P \text{ n'est pas vide,}$$

et

$$f(\phi) = \phi, \quad \text{où } \phi \text{ désigne l'ensemble vide.}$$

Alors, $f(P)$ est manifestement une fonction de $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}$ lui-même telle que, quel que soit $P \in \mathfrak{E}$,

$$P \lneqq f(P).$$

Par conséquent, selon le théorème précédent, il existe un ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(E)$.

Or, x étant un point quelconque de E, il existe des éléments de $\mathfrak{K}(E)$ tels qu'ils contiennent x, soit E un tel élément. Si l'on désigne par P_x la partie commune à tous les éléments de $\mathfrak{K}(E)$ possédant cette propriété, elle jouit des conditions suivantes:

$$P_x \in \mathfrak{K}(E), \quad x \in P_x \qquad \text{et} \qquad x \,\bar{\in}\, f(P_x).$$

Comme on peut en le voir, si l'on fait correspondre à chaque point $x \in E$ tel élément P_x de $\mathfrak{K}(E)$, aux points distincts x et x' correspondent les éléments distincts P_x et $P_{x'}$. De plus, l'ensemble $\{P_x\}$ des P_x, x parcourant E tout entier, est bien ordonné comme un sous-ensemble de $\mathfrak{K}(E)$. On peut en dire, comme on le sait, que l'ensemble E peut être bien ordonné, c.q.f.d.

Ensuite, par rapport au théorème 1 nous allons démontrer le

Théorème 2. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) *Soit E un ensemble partiellement ordonné. Il existe alors une fonction f de E dans E lui-même telle que, quel que soit $x \in E$, on a ou bien $x = f(x)$ ou bien $x < f(x)$ suivant que x est maximum de E ou non.*

(2) *Soit E un ensemble partiellement ordonné inductif au sens faible. Il existe alors, quel que soit $a \in E$, un ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(a)$, contenant a et satisfaisant aux conditions suivantes*:

(γ) *Soit A un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{K}(a)$. S'il existe Sup. A, alors il appartient aussi à $\mathfrak{K}(a)$.*

(δ) *Un point de E n'appartenant pas à $\mathfrak{K}(a)$, n'est pas un majorant de $\mathfrak{K}(a)$.*

Démonstration. (1) → (2). E étant partiellement ordonné, il existe selon l'hypothèse (1) une fonction f de E dans E lui-même telle que, quel que soit $x \in E$, on a ou bien $x = f(x)$ ou bien $x < f(x)$ suivant que x est maximum de E ou non. Par suite, selon le théorème 1, il existe pour tout $a \in E$ un ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(a)$ vérifiant les conditions (α), (β) et (γ) dans le théorème 1.

Ensuite, supposons maintenant qu'il existe un majorant x_0 de $\mathfrak{K}(a)$. Alors, puisque E est inductif au sens faible, il existe *Sup.* $\mathfrak{K}(a)$ et qui est le dernier point de $\mathfrak{K}(a)$ et vérifie la condition *Sup.* $\mathfrak{K}(a) \leqq x_0$. D'autre part, le point *Sup.* $\mathfrak{K}(a)$ est invariabl epar rapport à f selon la condition (β) et la propriété de la fonction f, et par conséquent il est maximum de E selon l'hypothèse (1). Cependant, étant *Sup.* $\mathfrak{K}(a) \leqq x_0$, on a immédiatement *Sup.* $\mathfrak{K}(a) = x_0$ et *Sup.* $\mathfrak{K}(a) \in \mathfrak{K}(a)$. Ce qui nous montre que $\mathfrak{K}(a)$ vérifie assurément la condition (δ).

(2) → (1). Soit x un point quelconque de E, et désignons par E_x l'ensemble formé du seul point x ou l'ensemble de tous les points y tels que $x<y$, suivant que x est maximum de E ou non. Ceci posé, considérons la famille $\mathfrak{E}$ de tous les ensembles E_x, x parcourant E tout entier, et désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions de $\mathfrak{E}$ dans E telle que ses valeurs appartiennent toujours à ses arguments. Dans ce cas, comme on le sait, $\mathfrak{F}$ n'est pas vide si E n'est pas vide. Soient maintenant f et g deux fonctions de $\mathfrak{F}$ et nous les ordonnerons tel que $f \geqq g$ équivaudra à la relation "f est un prolongement de g". Alors, comme on peut sans peine le voir, $\mathfrak{F}$ devient un ensemble ordonné inductif. Par conséquent, selon l'hypothèse (2), il existe pour $g \in \mathfrak{F}$ un ensemble bien ordonné $\mathfrak{K}(g)$, vérifiant les conditions (γ) et (δ). Puisque $\mathfrak{F}$ est inductif, $\mathfrak{K}(g)$ possède sa borne supérieure, soit h. Alors, comme on peut le voir, h est définie sur $\mathfrak{E}$ tout entier et vérifie la condition $h(E_x) \in E_x$, quel que soit E_x. Donc, en posant $f(x) = h(E_x)$ pour tout $x \in E$, $f(x)$ vérifie la condition $x \leqq f(x)$ selon la définition de E_x et l'égalité se trouve dans le cas et le seul cas où x est maximum de E. On a donc la proposition (1), c.q.f.d.

Du théorème 2 nous pouvons aisément déduire le

Corollaire. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes:*

(1) *La proposition* (1) *du théorème 2.*

(2) *Le théorème de Zorn, à savoir que tout ensemble partiellement ordonné inductif possède au moins un point maximum.*

(3) *L'axiome du choix.*

Démonstration. (1) → (2). Soit E un ensemble ordonné inductif. Alors le cas (2) du théorème 2 se trouve d'après le théorème 2. De plus, dans ce cas l'ensemble $\mathfrak{K}(a)$ possède sa borne supérieure et elle est maximum de E.

(2) → (3). Soit $\mathfrak{E} = \{P\}$ une famille des ensembles P non-vides. Comme on le sait, il existe une fonction définie sur $\mathfrak{E}$ de sorte que ses valeurs appartiennent à ses arguments. Cela posé, désignons par $\mathfrak{F}$ la famille de toutes les fonctions possédant cette propriété. Si l'on ordonne la famille $\mathfrak{F}$ par la relation "f est un prolongement de g", $\mathfrak{F}$ devient alors un ensemble partiellement ordonné inductif, et par

suite il existe, en vertu de l'hypothèse (2), une fonction f qui est maximum dans $\mathfrak{F}$. Comme on peut sans peine le voir, cette fonction est définie sur $\mathfrak{S}$ tout entier et sa valeur appartient à son argument. Ce qui montre que l'axiome du choix est bien vérifié.

(3) → (1). Soit E un ensemble ordonné et soit x un point quelconque de E. Désignons, quel que soit $x \in E$, par E_x l'ensemble des points y de E tels que $y = x$ ou $y > x$ suivant que x est maximum de E ou non. Il est alors évident que E_x n'est pas vide; donc selon l'axiome du choix, il existe pour la famille $\{E_x\}$, x parcourant E, une fonction φ définie sur $\{E_x\}$ de façon que sa valeur soit un point de son argument: $\varphi(E_x) \in E_x$. Par conséquent, en posant $f(x) = \varphi(E_x)$, on a évidemment, selon la définition de E_x,

$$x \leqq f(x),$$

et de plus l'égalité a lieu dans le cas et le seul cas où x est maximum de E, c.q.f.d.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received February 25, 1951)