CONTRIBUTION À LA TOPOLOGIE I

TAKESHI INAGAKI

Introduction.

Comme les notions primitives pour introduire une topologie à un ensemble R, nous employons en général celles de la fermeture, de la famille des voisinages et de la convergence, et leur dépendance mutuelle est bien connue. Par exemple, elles sont équivalentes les unes aux autres dans l'espace de Hausdorff, mais elles ne le sont pas nécessairement dans cet espace qu'à tout sous-ensemble $M \subset R$ correspond uniquement un sous-ensemble $\overline{M}$, appelé fermeture de M. Nous serons donc amenés naturellement à poser le problème:

Quelles propriétés de la fermeture, de la famille des voisinages et de la convergence sont nécessaires et suffisantes pour que l'équivalence soit établie dans l'espace le plus général proprement dit?

Malgré des efforts de plusieurs mathématiciens, soient G. Birkhoff[1], J. W. Tukey[2] et M. M. Day[3] etc., jusqu'à présent il n'a aucune solution définitive et il sera donc intéressant de rechercher le problème. De plus, il sera désirable qu'il soit résolu dans l'espace aussi général que possible.

Comme on pourra le voir dans §2, d'une part non seulement l'espace dit d'habitude le plus général n'est jamais celui qui est le plus général, mais encore il me semble qu'il n'existe pas l'espace le plus général dans le sens essentiel, et d'autre part on croit à présent qu'il est suffisant de considérer l'espace le plus général proprement dit pour établir la théorie de la topologie au point de vue de mathématiques de nos jours. Donc nous nous contenterons de donner une réponse du problème dans un espace un peu plus général que celui qui est dit le plus général, à savoir dans un espace dans lequel à deux sous-ensembles arbitraires M et H correspond uniquement un sous-ensemble, désigné par $\overline{M}^H$ et appelé fermeture de M relative-

---

1) G. Birkhoff, Moore-Smith convergence in general topology. Ann. of Math., Vol. 38 (1937), pp. 39—56.

2) J. W. Tukey, Convergence and uniformity in topology. Annals of Mathematics studies, No. 2, Princeton (1940).

3) M. M. Day, Closure, neighborhoods and convergence. Duke Math., Vol. 11 (1944), pp. 181—199.

ment à H et jouissant de cette propriété que $M \subset N$ entraîne $\overline{M}^H \subset \overline{N}^H$, quels que soient M, N et H; nous dirons dans la suite que cet espace est *monotone au sens généralisé*. De plus, comme on pourra le voir dans §2, l'espace le plus général proprement dit est l'un dans lequel la fermeture $\overline{M}^M$ est explicitement donnée en écrivant $\overline{M} = \overline{M}^M$ et $\overline{M}^H$ implicitement, lorsque M et H sont distincts.

Le premier objet de cet article est de donner une réponse au problème cité plus haut dans l'espace monotone au sens généralisé, et le deuxième, de montrer un traitement systématique et naturel sur quelques affaires fondamentales dans la topologie.

Dans le premier paragraphe, nous donnerons quelques propriétés concernant l'ensemble ordonné, et dans le second, une réponse au problème plus haut. Dans le troixième, nous traiterons la convergence d'un système d'ensembles et le dernier, nous montrerons une méthode qui immerge un espace dans un espace compact.

§1. Ensembles ordonnés.

Un ensemble A est dit *ordonné* lorsqu'une relation binaire $\geqq$ est définie sur A de façon que, pour points arbitraires a, a', a'' de A, les deux conditions suivantes soient remplies:

$$a \geqq a,$$
$$a \geqq a' \quad et \quad a' \geqq a'' \quad entraînent \quad a \geqq a''.$$

D'après cette définition, il est manifest qu'un sous-ensemble d'un ensemble ordonné est aussi ordonné par la relation définie d'avance. En particulier, un ensemble ordonné A est dit *filtrant à droite*, lorsque toute la partie finie non-vide de A est *majorée*[1].

Nous désignerons dans ce qui suit l'ensemble ordonné A par la majuscule allemande $\mathfrak{A}$ correspondant à la lettre A. Lorsque nous écrivons $\mathfrak{A}$, nous supposons dorénavant que, sauf la mention expresse au contraire, il soit un ensemble ordonné. De plus, nous écrivons souvent $\mathfrak{A}$ dans le cas où A doit être écrit assurément, soit $a \in \mathfrak{A}$ pour $a \in A$, soit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ pour $B \subset A$.

Il y a deux classes importantes parmi les sous-ensembles de $\mathfrak{A}$; ce sont les ensembles confinals et les ensembles résiduels dans $\mathfrak{A}$.

1) Un sous-ensemble B de A est dit majoré, lorsqu'il existe un point $a \in A$ tel que $a \geqq b$, quel que soit $b \in B$. Dans ce cas, le point a est dit *majorant* de B.

Un sous-ensemble $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ s'appelle *confinal* dans $\mathfrak{A}$, si, pour chaque $a \in \mathfrak{A}$, il existe un $a' \in \mathfrak{A}'$ tel que $a' \geqq a$.

Un sous-ensemble $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ s'appelle *résiduel* dans $\mathfrak{A}$, s'il existe un $a_0 \in \mathfrak{A}$ de façon que $a \geqq a_0$ entraîne $a \in \mathfrak{A}'$, quel que soit $a \in \mathfrak{A}$.

D'après ces définitions, nous pouvons vérifier sans peine les

Théorème 1. *Soit* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}''$. *Si* $\mathfrak{A}''$ *est confinal dans* $\mathfrak{A}$, *alors* $\mathfrak{A}'$ *l'est aussi.*

Théorème 2. *Soit* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}' \supset \mathfrak{A}''$. *Si* $\mathfrak{A}''$ *est confinal dans* $\mathfrak{A}'$ *et* $\mathfrak{A}'$ *confinal dans* $\mathfrak{A}$, *alors* $\mathfrak{A}''$ *est encore confinal dans* $\mathfrak{A}$.

Théorème 3. *Soit* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}'$ *et posons* $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$. *Alors, l'un au moins les deux ensembles* $\mathfrak{A}'$ *et* $\mathfrak{A}''$ *est ou bien confinal ou bien résiduel dans* $\mathfrak{A}$.

Théorème 4. *Soit* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}'$. *Pour que* $\mathfrak{A}'$ *soit confinal* (*ou résiduel*) *dans* $\mathfrak{A}$, *il faut et il suffit que l'ensemble* $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ *ne soit pas résiduel* (*ou confinal*) *dans* $\mathfrak{A}$.

Théorème 5. *Soit* $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}'$. *Pour que* $\mathfrak{A}'$ *soit confinal* (*ou résiduel*) *dans* $\mathfrak{A}$, *il faut et il suffit que la partie commune à* $\mathfrak{A}'$ *et à chaque sous-ensemble résiduel* (*ou confinal*) *dans* $\mathfrak{A}$ *ne soit pas vide.*

Pour qu'il soit nécessaire plus tard, nous voudrons insérer à cette place-ci un théorème qui est un peu plus général que le théorème 5. Pour cela nous donnerons d'abord une définition nécessaire:

Désignons par $\{x_\alpha \mid \mathfrak{A}\}$ ou $\{x_\alpha\}$ ou $x(\mathfrak{A})$ un système de x_α, où x_α désigne un point ou un ensemble vide et le suffixe α parcourt un ensemble ordonné $\mathfrak{A}$. Si l'on ordonne maintenant les éléments de $x(\mathfrak{A})$ suivant l'ordre de leurs suffixes, alors il devient un système ordonné. Cela posé, définissons pour un ensemble V le produit $V \cdot x(\mathfrak{A})$ comme le système de tous les points x_α appartenant à la fois à V et à $x(\mathfrak{A})$.

D'après cette définition, on a les

Théorème 6. *Pour que* $V \cdot x(\mathfrak{A})$ *soit résiduel dans* $x(\mathfrak{A})$, *il faut et il suffit que, pour chaque sous-système confinal* $x(\mathfrak{A}')$ *dans* $x(\mathfrak{A})$, *les deux systèmes* $V \cdot x(\mathfrak{A})$ *et* $x(\mathfrak{A}')$ *ne soient pas disjoints.*

Démonstration. Supposons d'abord que $V \cdot x(\mathfrak{A})$ soit résiduel dans $x(\mathfrak{A})$. Il existe alors un suffixe α tel que, pour chaque suffixe $\beta \geqq \alpha$, x_β est un point de V. D'autre part, $x(\mathfrak{A}')$ étant confinal dans $x(\mathfrak{A})$, celui-là contient au moins un point x_β où $\beta \geqq \alpha$; par suite, il en résulte évidemment que $V \cdot x(\mathfrak{A})$ et $x(\mathfrak{A}')$ ne sont pas disjoints.

Réciproquement, supposons que $V\cdot x(\mathfrak{A})$ ne soit pas résiduel dans $x(\mathfrak{A})$. Alors il existe pour chaque suffixe α un suffixe $\beta(\alpha) \geqq \alpha$ déterminé par α de façon que $x_{\beta(\alpha)} \bar{\in} V\cdot x(\mathfrak{A})$. Par suite, en désignant par $x(\mathfrak{A}')$ l'ensemble de tous les points $x_{\beta(\alpha)}$ ainsi définis, il est clair qu'il est confinal dans $x(\mathfrak{A})$ et qu'il ne possède aucun point commun avec $V\cdot x(\mathfrak{A})$, c.q.f.d.

Théorème 7. *Pour que $V\cdot x(\mathfrak{A})$ soit confinal dans $x(\mathfrak{A})$, il faut et il suffit que, pour chaque sous-ensemble résiduel $x(\mathfrak{A}')$ dans $x(\mathfrak{A})$, on ait $V\cdot x(\mathfrak{A})\cdot x(\mathfrak{A}') \neq \phi$.*

Démonstration. Si $V\cdot x(\mathfrak{A})$ est confinal dans $x(\mathfrak{A})$, il existe pour chaque suffixe α un suffixe $\beta \geqq \alpha$ tel que x_β est un point de $V\cdot x(\mathfrak{A})$. En outre, $x(\mathfrak{A}')$ étant résiduel dans $x(\mathfrak{A})$, il y a un suffixe α tel que $x_\beta \in x(\mathfrak{A}')$ pour tout $\beta \geqq \alpha$. Il en résulte que $V\cdot x(\mathfrak{A})\cdot x(\mathfrak{A}') \neq \phi$.

Réciproquement, si $V\cdot x(\mathfrak{A})$ n'est pas confinal dans $x(\mathfrak{A})$, il y a un suffixe α tel que $x_\beta \bar{\in} V\cdot x(\mathfrak{A})$ pour tout $\beta \geqq \alpha$. En désignant par $x(\mathfrak{A}')$ l'ensemble de tous les éléments x_β ainsi obtenus, il est clair que $x(\mathfrak{A}')$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$ et $V\cdot x(\mathfrak{A})\cdot x(\mathfrak{A}') = \phi$, c.q.f.d.

Nous insérons maintenant quelques notions importantes dues à M. Tukey:

Deux ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont dits *isomorphs*[1] et désignés par $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, s'il existe une correspondance biunivoque entre eux telle qu'elle transporte leurs ordres l'un dans l'autre.

Deux ensembles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont dits *confinalement similaire*[2] et désignés par $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, s'il existe un ensemble $\mathfrak{C}$ contenant deux sous-ensembles confinals $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ dans lui-même de façon que $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$.

Cela posé, nous avons les

Théorème 8. *Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux ensembles ordonnés et soit la partie commune $C = A\cdot B$ non-vide. Supposons maintenant que l'ordre de C dans $\mathfrak{A}$ soit identique à celui de C dans $\mathfrak{B}$ et que $\mathfrak{C}$ soit confinal à la fois dans $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$. Nous pouvons alors étendre les ordres de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$ sur la somme $D = A + B$ de façon que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ soient confinals dans $\mathfrak{D}$ l'un et l'autre.*

Démonstration. Si deux points de D appartiennent en même temps à $\mathfrak{A}$ ou à $\mathfrak{B}$, le nouvel et l'ancien ordre entre eux sont iden-

1) Cette notion est une généralisation de celle qui a été donnée par M. Tukey, loc. cit., p. 3.

2) M. Tukey, loc. cit., p. 11.

tiques. Nous définirons donc l'ordre entre deux points $a \in \mathfrak{A}$ et $b \in \mathfrak{B}$ comme suivant:

$a \geqq b$, s'il existe un $c \in C$ tel que $a \geqq c$ dans $\mathfrak{A}$ et $c \geqq b$ dans $\mathfrak{B}$.

$b \geqq a$, s'il existe un $c \in C$ tel que $b \geqq c$ dans $\mathfrak{B}$ et $c \geqq a$ dans $\mathfrak{A}$.

D'après cette définition, nous pouvons vérifier sans peine que $\mathfrak{D}$ devient un ensemble ordonné dans lequel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont confinals l'un et l'autre.

Théorème 9. *La relation $\sim$ est celle de l'équivalence.*

Démonstration. Il est presque évident que $\sim$ est reflexible et symétrique. Donc, il nous reste à démontrer qu'elle est transitive.

Soient maintenant $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{C}$. Par la définition, il existe alors six ensembles $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$ et $\mathfrak{D}''$ tels que:

$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ sont deux sous-ensembles confinals dans $\mathfrak{D}'$;

$\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C} \cong \mathfrak{C}''$; $\mathfrak{B}''$ et $\mathfrak{C}''$ sont deux sous-ensembles confinals dans $\mathfrak{D}''$.

Or, étant $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}''$, d'après une modification légère des ensembles $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ dans le cas nécessaire, nous pouvons supposer, sans perdre la généralité du raisonnement, que $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''$ et $D' \cdot D'' = B' = B''$. Par conséquent, en vertu du théorème 8, nous pouvons étendre les ordres de $\mathfrak{D}'$ et de $\mathfrak{D}''$ sur la somme $E = D' + D''$ de façon que $\mathfrak{D}'$ et $\mathfrak{D}''$ soient confinals dans $\mathfrak{E}$ l'un et l'autre. Encore, étant $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{C}'' \cong \mathfrak{C}$, nous avons $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}$; par suite, la démonstration du théorème est complètement établie, c.q.f.d.

D'après le théorème 9, nous pouvons classifier tous les ensembles ordonnés en classes telles que chaque classe se compose de tous les ensembles confinalement similaires; nous dirons que les ensembles confinalement similaires possèdent le même *type confinal.*

Théorème 10. *Pour que deux ensembles ordonnés $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ soient confinalement similaires, il faut et il suffit qu'il existe deux fonctions $a = \varphi(b)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et $b = \psi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, telles que:*

$$(1) \qquad \begin{aligned} a \geqq \varphi(b) &\rightarrow \psi(a) \geqq b, \\ b \geqq \psi(a) &\rightarrow \varphi(b) \geqq a. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Alors il existe par la définition un ensemble ordonné $\mathfrak{C}'$ qui contient deux sous-ensembles confinals $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ tels que $\mathfrak{A}' \cong \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}$.

Or, $\mathfrak{B}'$ étant confinal dans $\mathfrak{C}'$, pour chaque $a' \in \mathfrak{A}'$ il existe un $b' \in \mathfrak{B}'$ tel que $b' \geqq a'$. Par suite, nous pouvons faire correspondre à chaque a' un b' tel que $b' \geqq a'$, et désignons par $b' = \psi_1(a')$ cette correspondance. De même, nous pouvons définir une fonction $a' = \varphi_1(b')$ de $\mathfrak{B}'$ dans $\mathfrak{A}'$ telle que $\varphi_1(b') \geqq b'$ quel que soit $b' \in \mathfrak{B}'$. Pour ces fonctions, nous avons les implications suivantes:

$$a' \geqq \varphi_1(b') \rightarrow \psi_1(a') \geqq b',$$
$$b' \geqq \psi_1(a') \rightarrow \varphi_1(b') \geqq a'.$$

En effet, selon les définitions des fonctions $\varphi_1(b')$ et $\psi_1(a')$, nous avons $\varphi_1(b') \geqq b'$ et $\psi_1(a') \geqq a'$, quels que soient a' et b'. Donc, si $a' \geqq \varphi_1(b')$, on a évidemment $\psi_1(a') \geqq b'$. Par suite, nous avons la première implication. De même, nous avons la seconde.

D'autre part, étant $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B}'$, il existe deux fonctions isomorphes $a' = \psi_2(a)$ et $b' = \varphi_2(b)$. Donc, en posant $b = \psi(a) = \varphi_2^{-1}(\psi_1(\psi_2(a)))$ et $a = \varphi(b) = \psi_2^{-1}(\varphi_1(\varphi_2(b)))$, comme on peut le vérifier aisément, les fonctions $a = \varphi(b)$ et $b = \psi(a)$ remplissent les implications citées dans le théorème.

Réciproquement, supposons que, pour $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$, il existe deux fonctions $a = \varphi(b)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et $b = \psi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ telles qu'elles remplissent les implications données. Dans ce cas, d'après une modification légère de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$ dans le cas nécessaire, nous pouvons supposer que $A \cdot B = \phi$ sans perdre la généralité du raisonnement. Car, si $A \cdot B \neq \phi$, nous pouvons adopter $\mathfrak{B}'$ au lieu de $\mathfrak{B}$ tel que $\mathfrak{B}' \cong \mathfrak{B}$ et $A \cdot B' = \phi$. Cela posé, posons $D = A + B$ et étendons les ordres déjà définis dans $\mathfrak{A}$ et dans $\mathfrak{B}$ sur D comme suivant:

$$a \geqq b, \text{ s'il existe un } b' \in \mathfrak{B} \text{ tel que } b' \geqq b \text{ et } a \geqq \varphi(b'),$$
$$b \geqq a, \text{ s'il existe un } a' \in \mathfrak{A} \text{ tel que } a' \geqq a \text{ et } b \geqq \psi(a').$$

Ceci étant établi, comme on peut le vérifier sans peine, $\mathfrak{D}$ devient un ensemble ordonné dans lequel $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont confinals l'un et l'autre. Nous avons donc $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, c.q.f.d.

Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux ensembles ordonnés. S'il existe deux fonctions $a = \varphi(b)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et $b = \psi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ telles qu'elles rempliessent l'implication (1) du théorème 10, nous dirons suivant M. Tukey[1] que $\mathfrak{A}$ est ou bien *supérieur à* $\mathfrak{B}$ ou bien *aussi effectif* que $\mathfrak{B}$ pour la convergence, et le désignons par $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$.

---

1) Tukey, loc. cit., p. 25.

D'après cette définition, nous pouvons vérifier facilement que:

$$\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{A},$$
$$\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B} \quad \textit{et} \quad \mathfrak{B} \geqq \mathfrak{C} \quad \textit{entraînent} \quad \mathfrak{A} \geqq \mathfrak{C}.$$

Selon le théorème précédent, si $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$, on a alors $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B} \geqq \mathfrak{A}$; mais la réciproque de ce fait n'est pas nécessairement vraie. En particulier, étant $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux ensembles filtrants à droite, comme on le sait, si $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} \leqq \mathfrak{B}$, on a $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$.

Théorème 11. *Les trois propositions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$.

(2) *Il existe une fonction $b = \varphi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$, jouissant de cette propriété que, si $\mathfrak{B}'$ est un sous-ensemble résiduel dans $\mathfrak{B}$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}')$ de $\mathfrak{B}'$ l'est aussi dans $\mathfrak{A}$.*

(3) *Il existe une fonction $b = \varphi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ telle que, si $\mathfrak{A}'$ est un sous-ensemble confinal dans $\mathfrak{A}$, l'image $\varphi(\mathfrak{A}')$ de $\mathfrak{A}'$ est confinal dans $\mathfrak{B}$.*

Démonstration. (1) $\to$ (2). Il existe du fait que $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$, deux fonctions $a = \psi(b)$ et $b = \varphi(a)$ telles que:

$$(*) \qquad a \geqq \psi(b) \to \varphi(a) \geqq b.$$

Cela posé, nous allons démontrer que la fonction $b = \varphi(a)$ de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{B}$ remplit la proposition (2). Soit $\mathfrak{B}'$ un sous-ensemble résiduel dans $\mathfrak{B}$. Il existe alors un $b_0 \in \mathfrak{B}$ de façon que, quel que soit $b \in \mathfrak{B}$, $b \geqq b_0$ entraîne $b \in \mathfrak{B}'$. Par suite, on a $a \geqq \psi(b_0) \to \varphi(a) \geqq b_0$ selon l'implication $(*)$, ce qui prouve que l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}')$ contient tous les points supérieurs à $\psi(b_0)$; donc $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}')$ est résiduel dans $\mathfrak{A}$.

(2) $\to$ (3). Soit $b = \varphi(a)$ une fonction remplissant la condition de la proposition (2) et soit $\mathfrak{A}'$ un sous-ensemble confinal dans $\mathfrak{A}$. Supposons au contraire que l'image $\varphi(\mathfrak{A}')$ ne soit pas confinal dans $\mathfrak{B}$. Selon le théorème 4, l'ensemble $\mathfrak{B} - \varphi(\mathfrak{A}')$ étant résiduel dans $\mathfrak{B}$, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{B} - \varphi(\mathfrak{A}'))$, qui est contenu dans $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$, est aussi résiduel dans $\mathfrak{A}$ en vertu de la propriété de φ ; par suite, $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$ est à forte raison résiduel dans $\mathfrak{A}$. Mais ce qui contredit selon le théorème 4 à l'hypothèse que $\mathfrak{A}'$ est confinal dans $\mathfrak{A}$.

(3) $\to$ (1). Soit $b = \varphi(a)$ une fonction vérifiant la condition de la proposition (3) et désignons, quel que soit $b \in \mathfrak{B}$, par $\mathfrak{B}(b)$ l'ensemble de tous les points $b' \in \mathfrak{B}$ tels que $b' \geqq b$.

Cela posé, nous allons démontrer que l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b))$

est résiduel dans $\mathfrak{A}$. En effet, si l'on suppose par contre qu'il ne soit pas résiduel dans $\mathfrak{A}$, alors $\mathfrak{A} - \varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b))$ est confinal dans $\mathfrak{A}$ selon le théorème 4. Par conséquent, selon la propriété de φ, l'image $\varphi(\mathfrak{A} - \varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b)))$ est confinal dans $\mathfrak{B}$; d'autre part, $\varphi(\mathfrak{A} - \varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b)))$ est évidemment contenu dans $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}(b)$, donc celui-ci est sans doute confinal dans $\mathfrak{B}$. Par suite, $\mathfrak{B}(b)$ n'est pas résiduel dans $\mathfrak{B}$ selon le théorème 4, ce qui contredit à la supposition posée. Donc $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b))$ est résiduel dans $\mathfrak{A}$. Il en résulte qu'il existe un $a \in \mathfrak{A}$ de façon que tout point supérieur à a appartient à $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}(b))$. Par suite, en faisant correspondre au b un a possèdant telle propriété, nous avons une fonction $a = \psi(b)$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ et, comme on peut le vérifier, l'implication $a \geqq \psi(b) \rightarrow \varphi(a) \geqq b$ se trouve. Donc on a $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{B}$, c.q.f.d.

§2. Fermeture, famille des voisinages et convergence.

Désignons par R un ensemble non-vide et nous l'employerons comme celui de la base pour avancer notre considération dans la suite.

Supposons à présent que, à deux ensembles quelconques M et H de R correspond uniquement un ensembles $\overline{M}^H$, appelé fermeture de M relativement à H, et dans ce cas l'ensemble R s'appelle un *espace*.

Cela posé, nous allons d'abord montrer le

Théorème 1. *A chaque point $x \in R$ nous pouvons faire correspondre une famille $\mathfrak{B}_H^M(x)$ (qui peut être vide) des ensembles $V_H^M(x)$ (qui peuvent être vides), appelés voisinages de x relativement à H et à M, telle que l'équivalence suivante se trouve*:

$$[x \in \overline{M}^H] . \equiv . [(V \in \mathfrak{B}_H^M(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)]^{1)}.$$

Démonstration. Considérons l'ensemble U tel qu'il satisfait aux conditions suivantes:

(1) $x \,\overline{\in}\, \overline{CU}^H$,[2]

(2) $\overline{CU}^H \supset \overline{M}^H$ ou $CU \not\supset M$.

Désignons par $V_H^M(x)$ l'ensemble V, contenant au moins un U qui

1) ϕ désigne l'ensemble vide.

2) CU désigne comme d'habitude le complémentaire de U par rapport à l'espace tout entier: $CU = R - U$.

remplit les conditions plus haut, et par $\mathfrak{V}_H^M(x)$ la famille des ensembles $V_H^M(x)$.

Ceci étant établi, nous allons démontrer l'équivalence citée plus haut. D'abord soit $x \in \overline{M}^H$ et supposons par contre qu'il existe un $V_H^M(x)$ disjoint à M. Il existe alors par la définition un U, contenu dans $V_H^M(x)$ et remplissant les conditions (1) et (2). Pour ce U, il est évident que $U \cdot M = \phi$, et par suite il vient $CU \supset M$. Or, CU vérifiant les conditions (1) et (2), nous avons évidemment $x \bar{\in} \overline{CU}^H$ et $\overline{M}^H \subset \overline{CU}^H$; donc nous avons $x \bar{\in} \overline{M}^H$, ce qui contredit à la supposition $x \in \overline{M}^H$; par conséquent, si $x \in \overline{M}^H$, alors nous avons l'implication: $(V \in \mathfrak{V}_H^M(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)$.

Réciproquement, supposons que $x \bar{\in} \overline{M}^H$. Dans ce cas, en posant $CU = M$, CU vérifie évidemment les conditions (1) et (2); donc, selon la définition, U est un $V \in \mathfrak{V}_H^M(x)$; par suite, nous avons $V \cdot M = \phi$.

Des faits obtenus plus haut, l'équivalence que nous avions en vue est complètement établie, c.q.f.d.

Théorème 2. *Pour que, quels que soient M et x, la famille $\mathfrak{V}_H^M(x)$ ne soit pas vide, il faut et il suffit que $\overline{\phi}^H = \phi$.*

Démonstration. Si l'on suppose que $\mathfrak{V}_H^M(x)$ ne soit pas vide, quels que soient M et x, alors en particulier $\mathfrak{V}_H^\phi(x)$ est encore non-vide. Il y a donc un V appartenant à $\mathfrak{V}_H^\phi(x)$, nous avons donc $\overline{\phi}^H = \phi$, en tenant compte de l'équivalence dans le théorème 1.

Réciproquement, supposons que $\overline{\phi}^H = \phi$. Si l'on pose $U = R$, on a évidemment $x \bar{\in} \overline{CU}^H$, quel que soit x. D'autre part, comme on peut le vérifier sans peine, on a $\overline{\phi}^H \supset \overline{M}^H$ ou $\phi \not\supset M$, quel que soit M. Par conséquent, il vient $U \in \mathfrak{V}_H^M(x)$, à savoir $\mathfrak{V}_H^M(x)$ n'est pas vide, c.q.f.d.

Théorème 3. *Pour que $\phi \in \mathfrak{V}_H^M(x)$, il faut et il suffit que $x \bar{\in} \overline{R}^H$ et $\overline{R}^H \supset \overline{M}^H$.*

En effet, par la définition du voisinage, il est évident que le théorème est vrai.

Théorème 4. *Quel que soit M, pour que $M \subset \overline{M}^H$, il faut et il suffit que, quel que soit x, $x \in V$ se trouve pour tout $V \in \mathfrak{V}_H^M(x)$ si $\mathfrak{V}_H^M(x) \neq \phi$.*

Démonstration. Soient x un point quelconque et V un élément quelconque de $\mathfrak{V}_H^M(x)$, si $\mathfrak{V}_H^M(x)$ n'est pas vide. D'après la définition de V, il existe un ensemble U vérifiant les conditions:

$$x \bar{\in} \overline{CU}^H \qquad \text{et} \qquad U \subset V.$$

Par conséquent, nous avons $x \bar{\in} CU$ selon la supposition $CU \subset \overline{CU}^H$; ce qui montre que $x \in U$, donc $x \in V$.

Réciproquement, soit M un sous-ensemble de R et soit $x \in M$. Dans ce cas, si $\mathfrak{V}_H^M(x) = \phi$, alors $x \in \overline{M}^H$ selon le théorème 1; d'autre part, si $\mathfrak{V}_H^M(x) \neq \phi$, selon la supposition nous avons $x \in V$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}_H^M(x)$, donc $V \cdot M \neq \phi$; par suite, il vient $x \in \overline{M}^H$ selon le théorème 1, c.q.f.d.

Théorème 5. *Qules que soient M et x, pour que la famille $\mathfrak{V}_H^M(x)$ soit indépendante de M, il faut et il suffit que $M \subset N$ entraîne $\overline{M}^H \subset \overline{N}^H$ quels que soient M et N.*

Démonstration. Si $\mathfrak{V}_H^M(x)$ est indépendant de M, nous avons alors $\mathfrak{V}_H^M(x) = \mathfrak{V}_H^N(x)$ quels que soient M et N. Par conséquent, en vertu de l'équivalence dans le théorème 1, $M \subset N$ entraîne visiblement $\overline{M}^H \subset \overline{N}^H$.

Réciproquement, supposons que, quels que soient M et N, $M \subset N$ entraîne $\overline{M}^H \subset \overline{N}^H$. Maintenant, soient x un point quelconque et U un ensemble remplissant la condition (1) dans le théorème 1, à savoir soit $x \bar{\in} \overline{CU}^H$. Dans ce cas, d'une part si $CU \not\supset M$, il vient $U \in \mathfrak{V}_H^M(x)$; d'autre part si $CU \supset M$, il vient $\overline{CU}^H \supset \overline{M}^H$ selon l'hypothèse posée, donc $U \in \mathfrak{V}_H^M(x)$. Il en résulte que, quel que soit M, $x \bar{\in} \overline{CU}^H$ entraîne $U \in \mathfrak{V}_H^M(x)$. Ce qui prouve que la famille $\mathfrak{V}_H^M(x)$ est indépendante de M, quel que soit x, c.q.f.d.

Dans l'espace monotone au sens généralisé, le voisinage $V_H^M(x)$ est indépendant de M d'après le théorème 5, donc nous le désignons en abrégement par $V_H(x)$ et l'appelons voisinage de x relativement à H. De même, nous désignons simplement par $\mathfrak{V}_H(x)$ la famille $\mathfrak{V}_H^M(x)$.

Théorème 6. *Soit R un espace tel qu'à chaque sous-ensemble M correspond uniquement un sous-ensemble $\overline{M}$ que nous appelons fermeture de M. Alors, nous pouvons faire correspondre dans cet espace R à tout point x une famille $\mathfrak{V}_H(x)$ (qui peut être vide) de voisinages $V_H(x)$ (qui peuvent être vides) de x relativement à H telle que l'équivalence suivante est remplie:*

$$[x \in \overline{M}] . \equiv . [(V \in \mathfrak{V}_M(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)].$$

Démonstration. Considérons l'ensemble U de façon qu'il remplisse les conditions:

(1) $x \,\overline{\in}\, \overline{CU}$,

(2) $\overline{CU} \supset \overline{M}$ ou $CU \not\supset M$.

Désignons par $V_M(x)$ un ensemble V contenant au moins un U remplissant les conditions citées, et par $\mathfrak{V}_M(x)$ la famille des ensembles $V_M(x)$ ainsi définis.

Cela posé, la démonstration du théorème 6 peut être excutée tout à fait analogue à celle du théorème 1, c.q.f.d.

Dans l'espace R du théorème 6, nous pouvons faire correspondre à deux ensembles M et H un ensemble $\overline{M}^H$, appelé fermeture de M relativement à H, par l'équivalence:

$$[x \in \overline{M}^H] . \equiv . [(V \in \mathfrak{V}_H(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)].$$

En suivant cette convention, il est presque évident que:

(1) $M \subset N \rightarrow \overline{M}^H \subset \overline{N}^H$, quels que soient M, N et H.

(2) $\overline{M} = \overline{M}^M$, quel que soit M.

Par conséquent, nous pouvons regarder l'espace R comme un espace dans lequel la fermeture $\overline{M}^H$ satisfaisant aux conditions (1) et (2) est implicitement définie; donc nous pouvons en conclure que la théorie dans l'espace qui est dit d'habitude le plus général, est embrassée dans celle de l'espace monotone au sens généralisé.

Dans le théorème 6, nous avons défini la fermeture $\overline{M}^H$, en utilisant la famille $\mathfrak{V}_H(x)$. De même, en tenant compte du théorème 1, nous pouvons définir une fermeture $\overline{M}^{(H,K)}$ de M relativement à H et à K, en utilisant la famille $\mathfrak{V}_H^K(x)$, par l'équivalence:

$$[x \in \overline{M}^{(H,K)}] . \equiv . [(V \in \mathfrak{V}_H^K(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)].$$

Ainsi de suite, nous pourrons considérer un espace dans lequel une fermeture d'un ensemble est définie relativement à plusieurs ensembles. Ainsi nous serons naturellement amenés à la question:

Quel est l'espace le plus général au sens essentiel?

Ces préliminaires étant posés, nous irons, dans l'espace monotone au sens généralisé, mettre en lumière les relations parmi la fermeture, la famille des voisinages et la convergence. Pour ce but, tout d'abord nous supposerons que la fermeture, la famille des voisinages et la convergence jouissent respectivement des conditions suivantes (F), (V) et (C):

(F) La fermeture $\overline{M}^H$ de M relativement à H est uniquement déterminée et monotone, c. à. d. quels que soient M, N et H,

$$M \subset N \quad \text{entraîne} \quad \overline{M}^H \subset \overline{N}^H.$$

(V) La famille $\mathfrak{B}_H(x)$ (qui peut être vide) des voisinages $V_H(x)$ (qui peuvent être vides) de point x relativement à H, possède cette propriété que:

$$[(V \in \mathfrak{B}_H(x)) \cdot (V \subset U)] \rightarrow [U \in \mathfrak{B}_H(x)].$$

(C) La convergence détermine que, pour chaque système ordonné $x(\mathfrak{A})$ dont chaque élément est un point de R ou un ensemble vide, ou bien il converge relativement à H vers un point x ou bien non. Si un système ordonné $x(\mathfrak{A})$ converge relativement à H vers un point x, alors ce que nous désignerons simplement par $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$.

La convergence remplit les deux conditions suivantes:

(C_1) Si $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$, alors nous avons $x(\mathfrak{A}') \underset{H}{\rightarrow} x$ pour tout sous-système confinal $x(\mathfrak{A}')$ dans $x(\mathfrak{A})$.

(C_2) Quel que soit un sous-système confinal $x(\mathfrak{A}')$ dans $x(\mathfrak{A})$, s'il existe un point x indépendant de $x(\mathfrak{A}')$ et un système ordonné $x(\mathfrak{B})$ dont les éléments sont ceux de $x(\mathfrak{A}')$ tel que $x(\mathfrak{B}) \underset{H}{\rightarrow} x$, alors il vient $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$.

Ces trois notions sont souvent joindrées par l'équivalences suivantes:

E1°. $\quad [x \overline{\in} \overline{CV}^H] . \equiv . [V \in \mathfrak{B}_H(x)].$

E2°. $\quad [(V \in \mathfrak{B}_H(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)] . \equiv . [x \in \overline{M}^H].$

E3°. $\quad [(V \in \mathfrak{B}_H(x)) \rightarrow (V \cdot x(\mathfrak{A})$ *est résiduel dans* $x(\mathfrak{A}))] . \equiv . [x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x].$

E4°. $\quad [(x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x) \rightarrow (V \cdot x(\mathfrak{A}) \neq \phi)] . \equiv . [V \in \mathfrak{B}_H(x)].$

E5°. [*Il existe un système ordonné* $x(\mathfrak{A}) \subset M$[1] *tel que* $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$] $. \equiv . [x \in \overline{M}^H].$

E6°. [$x \in \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$, *quel que soit un sous-système confinal* $x(\mathfrak{A}')$ *dans* $x(\mathfrak{A})$] $. \equiv . [x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x].$

Ceci étant posé, nous allons démontrer le

Théorème 7. *Les notions de la fermeture, de la famille des voisi-*

1) $x(\mathfrak{A}) \subset M$ signifie que le système $x(\mathfrak{A})$ se compose ou bien de points de M ou bien d'ensembles vides suivant que M est non-vide ou non.

nages et de la convergence sont équivalentes deux à deux en ce sens que:

Si l'une parmi eux satisfait à la condition énoncée plus haut, alors les autres sont dérivables d'elle et satisfont respectivement aux conditions correspondantes.

Démonstration. La démonstration du théorème sera excutée en divisant en trois cas:

1). La relation entre la fermeture et la famille des voisinages.

Supposons d'abord que la fermeture satisfaisant à la condition (F) soit donnée, et définissons la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ des voisinages de point x relativement à H, par l'équivalence E1° :

$$[x \overline{\in} \overline{CV}^H] .\equiv. [V \in \mathfrak{V}_H(x)].$$

Cela posé, nous allons démontrer en premier lieu que la famille satisfait à la condition (V).

Soient $V \in \mathfrak{V}_H(x)$ et $V \subset U$. Nous avons alors $CU \subset CV$ et $\overline{CU}^H \subset \overline{CV}^H$ selon la condition (F), donc $x \overline{\in} \overline{CU}^H$ puisque $x \overline{\in} \overline{CV}^H$. Il vient donc $U \in \mathfrak{V}_H(x)$, ce qui prouve que la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ vérifie la condition (V).

Nous allons maintenant démontrer l'équivalence E2°.

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Si $x \overline{\in} \overline{M}^H$, l'ensemble CM est, par la définition, un voisinage de x relativement à H, et il vient $CM \cdot M = \phi$. Donc l'implication que nous avions en vue est établie.

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* S'il existe un voisinage $V \in \mathfrak{V}_H(x)$ tel que $V \cdot M = \phi$, il vient alors $M \subset CV$. En vertu de la condition (F) et de la définition du voisinage, il vient $\overline{M}^H \subset \overline{CV}^H$ et $x \overline{\in} \overline{CV}^H$; donc il vient $x \overline{\in} \overline{M}^H$. Ainsi l'implication que nous avions en vue est établie.

Réciproquement, supposons que la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ des voisinages vérifiant la condition (V) soit donnée, et définissons la fermeture $\overline{M}^H$ par l'équivalence E2° :

$$[(V \in \mathfrak{V}_H(x)) \rightarrow (V \cdot M \neq \phi)] .\equiv. [x \in \overline{M}^H].$$

D'après cette définition, il est presque évident que la fermeture est monotone au sens généralisé, donc la fermeture vérifie la condition (F).

Cela posé, nous allons démontrer l'équivalence E1° :

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Si $x \overline{\in} \overline{CV}^H$, alors il existe selon la définition un voisinage $U \in \mathfrak{V}_H(x)$ tel que $U \cdot CV = \phi$. Il vient donc $U \subset V$; par conséquent, étant $U \in \mathfrak{V}_H(x)$, V appartient à $\mathfrak{V}_H(x)$ selon la condition (V).

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* Soit V un ensemble appartenant à $\mathfrak{V}_H(x)$. Dans ce cas, étant évidemment $V \cdot CV = \phi$, il vient $x \overline{\in} \overline{CV}^H$ selon la définition de la fermeture.

2). La relation entre la famille des voisinages et la convergence.

Supposons en premier lieu que la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ des voisinages soit donnée, et définissons la convergence d'un système ordonné $x(\mathfrak{A})$ par l'équivalence E3° :

$$[(V \in \mathfrak{V}_H(x)) \rightarrow (V \cdot x(\mathfrak{A}) \text{ est résiduel dans } x(\mathfrak{A}))] .\equiv. [x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x].$$

Nous allons d'abord démontrer que la convergence anisi définie vérifie les conditions (C_1) et (C_2).

Soient $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ et $x(\mathfrak{A}')$ un sous-système confinal dans $x(\mathfrak{A})$. De plus, si l'on prend un sous-système confinal $x(\mathfrak{A}'')$ dans $x(\mathfrak{A}')$, il l'est aussi dans $x(\mathfrak{A})$. Ceci posé, d'après l'hypothèse $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$, si $V \in \mathfrak{V}_H(x)$, alors $V \cdot x(\mathfrak{A})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$; par suite, il vient $V \cdot x(\mathfrak{A}'') \neq \phi$ selon le théorème 6 dans §1. Il vient donc selon le théorème 6 dans §1 que $V \cdot x(\mathfrak{A}')$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A}')$; ce qui prouve par la définition que $x(\mathfrak{A}') \underset{H}{\rightarrow} x$. La convergence satisfait donc à la condition (C_1).

En suite, soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné tel que, quel que soit son sous-système confinal $x(\mathfrak{A}')$, il existe un système ordonné $x(\mathfrak{B})$ dont les éléments sont ceux de $x(\mathfrak{A}')$ et il converge relativement à H vers un point x indépendant de $x(\mathfrak{A}')$. Dans ce cas, étant $x(\mathfrak{B}) \underset{H}{\rightarrow} x$, si $V \in \mathfrak{V}_H(x)$, alors $V \cdot x(\mathfrak{B})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{B})$, il vient donc $V \cdot x(\mathfrak{A}') \neq \phi$. Il en résulte selon le théorème 6 de §1 que $V \cdot x(\mathfrak{A})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$; par la définition, il vient donc $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$, ce qui prouve que la convergence vérifie la condition (C_2).

Ceci étant posé, nous allons démontrer l'équivalence E4° :

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Soit U un ensemble n'appartenant pas à $\mathfrak{V}_H(x)$. Alors, U ne contient aucun élément de $\mathfrak{V}_H(x)$ selon la condition (V). De là nous pouvons définir un système ordonné $x(\mathfrak{A})$ tel que $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ et $x(\mathfrak{A}) \cdot U = \phi$ comme suivant :

D'une part, en effet, si $\mathfrak{V}_H(x) \neq \phi$, alors, quel que soit $V \in \mathfrak{V}_H(x)$, il y a au moins un point $x_V \in V - U$. Donc désignons par $x(\mathfrak{A})$ l'ensemble des point x_V, V parcourant $\mathfrak{V}_H(x)$, et nous l'ordonnons de façon que $V \subset V'$ équivaut à $x_V \geqq x_{V'}$. Alors, comme on le sait, $x(\mathfrak{A})$ est ordonné et il vient de plus $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ et $x(\mathfrak{A}) \cdot U = \phi$. Et d'autre part, si $\mathfrak{V}_H(x) = \phi$, désignons par $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné et formé des ensembles vides. Alors, nous avons évidemment $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$, selon l'hypothèse $\mathfrak{V}_H(x) = \phi$ et la définition de la convergence, et de plus il vient $U \cdot x(\mathfrak{A}) = \phi$.

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* Supposons que $V \in \mathfrak{V}_H(x)$ et $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$. Alors, par la définition $V \cdot x(\mathfrak{A})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$; donc il vient $V \cdot x(\mathfrak{A}) \neq \phi$, puisque $V \cdot x(\mathfrak{A})$ se compose de points de $x(\mathfrak{A})$.

L'équivalence E4° est ainsi complètement démontrée.

Réciproquement, supposons que la convergence vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) soit donnée, et nous en définirons la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ des voisinages de point x relativement à H, par l'équivalence E4° :

$$[(x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x) \rightarrow (V \cdot x(\mathfrak{A}) \neq \phi)] .\equiv. [V \in \mathfrak{V}_H(x)].$$

D'après cette définition, il est presque évident que la famille $\mathfrak{V}_H(x)$ vérifie la condition (V). Donc nous démontrerons dès maintenant l'équivalence E3°.

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné de façon que, quel que soit $V \in \mathfrak{V}_H(x)$, $V \cdot x(\mathfrak{A})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$. Or, si $x(\mathfrak{A}')$ est un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$, alors $x(\mathfrak{A})$ n'est pas résiduel avec lui-même dans l'ensemble $R - x(\mathfrak{A}')$, et par suite celui-ci n'appartient pas à $\mathfrak{V}_H(x)$. Donc il existe, selon la définition du voisinage, un système ordonné $x(\mathfrak{B})$ tel qu'il converge relativement à H vers le point x et n'a aucun point commun avec $R - x(\mathfrak{A}')$. Nous pouvons dire de là que tous les points de $x(\mathfrak{B})$ appartiennent aussi à $x(\mathfrak{A}')$; il vient donc $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ selon la condition (C_2).

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* Soit $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$. Si $x(\mathfrak{A}')$ est un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$, alors on a $x(\mathfrak{A}') \underset{H}{\rightarrow} x$ selon la condition (C_1). Par suite, d'après la définition du voisinage, il vient $V \cdot x(\mathfrak{A}') \neq \phi$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}_H(x)$. $x(\mathfrak{A}')$ étant confinal dans $x(\mathfrak{A})$, $V \cdot x(\mathfrak{A})$ est résiduel dans $x(\mathfrak{A})$, en vertu du théorème 6 dans §1.

3). La relation entre la convergence et la fermeture.

Supposons tout d'abord que la convergence vérifiant les conditions (C_1) et (C_2) soit donnée, et nous en définirons la fermeture par l'équivalence E5° :

$$[\textit{Il existe un système ordonné } x(\mathfrak{A}) \subset M \textit{ tel que } x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x] \\ .\equiv. [x \in \overline{M}^H].$$

D'après cette définition, il est presque évident que la fermeture ainsi définie vérifie la condition (F).

Cela posé, nous allons démontrer l'équivalence E6°.

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné et soit $x(\mathfrak{A}')$ un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$. Si l'on suppose maintenant que $x \in \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$, alors, en vertu de la définition de la fermeture, il y a un système ordonné $x(\mathfrak{B})$ tel que $x(\mathfrak{B}) \subset x(\mathfrak{A}')$ et $x(\mathfrak{B}) \underset{H}{\rightarrow} x$. Par conséquent, il vient $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ selon la condition (C_2).

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* Soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné tel que $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ et soit $x(\mathfrak{A}')$ un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$. Si $x(\mathfrak{A}'')$ est un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A}')$, alors $x(\mathfrak{A}'')$ l'est aussi dans $x(\mathfrak{A})$. Par suite, il vient $x(\mathfrak{A}'') \underset{H}{\rightarrow} x$ selon la condition (C_1); donc il vient $x \in \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$ selon la définition de la fermeture.

Réciproquement, supposons que la fermeture soit donnée et nous en définirons la convergence par l'équivalence E6° :

$$[x \in \overline{x(\mathfrak{A}')}^H, \textit{ quel que soit un sous-système confinal } x(\mathfrak{A}') \textit{ dans } x(\mathfrak{A})] \;.\!\equiv\!.\; [x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x].$$

D'après cette définition, il est évident selon le théorème 3 dans §1 que la convergence vérifie la condition (C_1). De plus, soit $x(\mathfrak{A}')$ un sous-système confinal de $x(\mathfrak{A})$ et supposons qu'il existe un système ordonné $x(\mathfrak{B})$ tel que $x(\mathfrak{B}) \subset x(\mathfrak{A}')$ et $x(\mathfrak{B}) \underset{H}{\rightarrow} x$. Alors, il vient $x \in \overline{x(\mathfrak{B})}^H$ selon la définition de la convergence, et $\overline{x(\mathfrak{B})}^H \subset \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$ selon la conditon (F); il vient donc $x \in \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$, par conséquent, on a $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$ par la définition. Il en résulte que la convergence vérifie la condition (C_2).

Ceci étant posé, nous allons démontrer l'équivalence E5°.

Côté gauche $\rightarrow$ *Côté droit.* Soit M un ensemble donné d'avance et supposons qu'il existe un système ordonné $x(\mathfrak{A})$ tel que $x(\mathfrak{A}) \subset M$ et $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\rightarrow} x$. Alors, il vient par la définition $x \in \overline{x(\mathfrak{A})}^H$, puisque $x(\mathfrak{A})$ est confinal dans lui-même. Par suite, il vient $x \in \overline{M}^H$ selon la condition (F).

Côté droit $\rightarrow$ *Côté gauche.* Supposons au contraire que, pour chaque système ordonné $x(\mathfrak{A}) \subset M$, il existe un sous-système confinal $x(\mathfrak{A}')$ de $x(\mathfrak{A})$ tel que $x \bar{\in} \overline{x(\mathfrak{A}')}^H$. Alors, il existe évidemment au moins un ensemble V de façon que $x \bar{\in} \overline{CV}^H$, soit $V = R - x(\mathfrak{A}')$. Désignons par $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles V possèdant telle propriété.

Ceci étant posé, nous pouvons démontrer qu'il existe au moins un $V \in \mathfrak{F}$ tel que $V \cdot M = \phi$. En effet, si l'on suppose par contre qu'on ait $V \cdot M \neq \phi$ pour tout $V \in \mathfrak{F}$, il existe alors un point $x_V \in V \cdot M$ quel que soit $V \in \mathfrak{F}$. Désignons par $x(\mathfrak{B})$ l'ensemble formé des points x_V et l'ordonnons de façon que $V \subset V'$ équivaut à $x_V \geqq x_{V'}$. Dans cette convention, comme on peut le vérifier facilement, $x(\mathfrak{B})$ est résiduel dans chaque ensemble $V \in \mathfrak{F}$. D'autre part, étant $x(\mathfrak{B}) \subset M$, il existe un sous-système confinal $x(\mathfrak{B}')$ de $x(\mathfrak{B})$ tel que $x \overline{\in} \overline{x(\mathfrak{B}')}^H$; donc l'ensemble $V^* = R - x(\mathfrak{B}')$ appartient à $\mathfrak{F}$. Par conséquent, $x(\mathfrak{B})$ est résiduel dans V^*, ce qui contredit au fait que $x(\mathfrak{B}')$ est confinal dans $x(\mathfrak{B})$. Par suite, il existe un $V \in \mathfrak{F}$ tel que $V \cdot M = \phi$, il vient donc $M \subset CV$; d'où $\overline{M}^H \subset \overline{CV}^H$ selon la condition (F). Or, étant $x \overline{\in} \overline{CV}^H$, on a $x \overline{\in} \overline{M}^H$.

Ainsi la démonstration du théorème 7 est complètement établie, c.q.f.d.

Comme on peut le voir sans peine du théorème précédent, si l'on retranche la locution "*relativement à H*" et écrit $\overline{M}$ au lieu de $\overline{M}^H$, $\mathfrak{B}(x)$ au lieu de $\mathfrak{B}_H(x)$ et $x(\mathfrak{A}) \to x$ au lieu de $x(\mathfrak{A}) \underset{H}{\to} x$, alors le raisonnement dans l'espace monotone au sens généralisé R coïncide avec celui dans *l'espace monotone*, c. à. d. dans l'espace jouissant de la propriété que $M \subset N$ entraîne $\overline{M} \subset \overline{N}$, quels que soit M et N. Par conséquent, nous considérons dorénavant l'espace monotone.

Du théorème 7, nous pouvons immédiatement déduire les

Corollaire 1. *Les trois propriétés suivantes d'un ensemble M sont équivalentes*:

(1) $x \overline{\in} \overline{CM}$,

(2) $M \in \mathfrak{B}(x)$, *autrement dit* $\mathfrak{B}(x) \neq \phi$ *et M contient un* $V \in \mathfrak{B}(x)$.

(3) *Quel que soit* $x(\mathfrak{A})$, *si* $x(\mathfrak{A}) \to x$, *alors* $x(\mathfrak{A}) \cdot M \neq \phi$.

Le point x jouissant de l'une des propriétés ci-dessus s'appelle *point intérieur* de M, et l'ensemble des points intérieurs de M s'appelle *intérieur* de M que nous désignons par $I(M)$ dans ce qui suit.

Corollaire 2. *Les trois propriétés suivantes d'un point x sont équivalentes*:

(1) $x \in \overline{\phi}$,

(2) $\mathfrak{B}(x) = \phi$,

(3) *Quel que soit* $x(\mathfrak{A})$, *on a* $x(\mathfrak{A}) \to x$.

Or, en rapprochant les théorèmes 2, 3 et 7, nous avons les

Théorème 8. *Dans l'espace R, les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\overline{\phi} = \phi$,

(2) *$R \in \mathfrak{V}(x)$, quel que soit x, c. à. d. on a $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$.*

(3) *Tout système ordonné et formé des ensembles vides ne converge vers aucun point.*

Théorème 9. *Dans l'espace R, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $x \in \bar{R}$,

(2) $[V \in \mathfrak{V}(x)] \rightarrow [V \neq \phi]$,

(3) *Il existe un système ordonné et formé de points seuls et tel qu'il converge vers le point x.*

En rapprochant les théorèmes 7, 8 et 9, nous avons le

Théorème 10. *Soit R un espace dans lequel la famille des voisinages $\mathfrak{V}(x)$ n'est pas vide, quel que soit x. Alors, la topologie de l'espace R est bien déterminée par les convergences des systèmes ordonnés et ne possèdant pas d'ensembles vides comme leurs éléments.*

En effet, si l'on suppose $x(\mathfrak{A}) \rightarrow x$, le système $x(\mathfrak{A})$ contient au moins un point comme son élément; désignons donc par $x(\mathfrak{A}')$ le sous-système formé de tous les points appartenant à $x(\mathfrak{A})$. Alors, quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$, nous avons clairement $V \cdot x(\mathfrak{A}') = V \cdot x(\mathfrak{A})$, donc il vient $x(\mathfrak{A}') \rightarrow x$ puisque $x(\mathfrak{A}) \rightarrow x$. Ce qui prouve que si $x(\mathfrak{A}) \rightarrow x$, il existe alors un système ordonné $x(\mathfrak{A}')$ dont les éléments sont des points et tel qu'il converge vers le point x. De plus, comme on le sait, tout système formé d'ensembles vides ne converge vers aucun point de R. Par conséquent, la topologie de l'espace est déterminée par les convergences des systèmes ordonnés et ne possèdant pas d'ensembles vides comme leurs éléments, c.q.f.d.

Nous employons souvent la convergence d'un système filtrant à droite au lieu de celle d'un système ordonné. Donc il s'agit de chercher que quelle condition doit être satisfaite pour que la fermeture puisse être écrite par le mot de la convergence d'un système filtrant à droite. Mais, cette question peut être résolue facilement du fait bien connu que, si un système filtrant à droite $x(\mathfrak{A})$ est contenu dans l'ensemble somme $M + N$, alors il est ou bien confinal ou bien résiduel avec lui-même au moins dans l'un des M et N et que, si un système filtrant à droite $x(\mathfrak{A})$ est résiduel avec lui-même dans un ensemble M, il est encore confinal avec lui-même dans l'ensemble M. Par conséquent, lorsqu'un système filtrant à droite $x(\mathfrak{A})$, contenu dans la somme $M+N$, converge vers un point x, alors, d'après le fait énoncé ci-dessus, au moins l'un des deux sous-système $x(\mathfrak{A}) \cdot M$ et $x(\mathfrak{A}) \cdot N$

converge aussi vers le point x. Donc, en tenant compte de l'équivalence E5°, nous avons évidemment $\overline{M+N} = \overline{M} + \overline{N}$. Nous appelons *additif* l'espace possèdant cette propriété que $\overline{M+N} = \overline{M} + \overline{N}$. En outre, dans l'espace additif, si $x \overline{\in} \overline{CV_1}$ et $x \overline{\in} \overline{CV_2}$, alors nous avons $x \overline{\in} \overline{C(V_1 \cdot V_2)}$; donc, en vertu de l'équivalence E1°, si $V_1 \in \mathfrak{V}(x)$ et $V_2 \in \mathfrak{V}(x)$, alors le produit $V_1 \cdot V_2$ appartient aussi à $\mathfrak{V}(x)$. A la fin, considérons la famille $\mathfrak{V}(x)$ des voisinages vérifiant la condition citée tout à l'heure ci-dessus, et définissons, d'après l'équivalence E5°, la convergence des systèmes ordonnés par la famille $\mathfrak{V}(x)$. Alors, comme on peut le voir de la démonstration de l'équivalence E6° dans le théorème 7, la convergence des systèmes ordonnés peut être complètement déterminée par celle des systèmes filtrants à droite. Il en résulte que, dans l'espace additif, il suffit de considérer la convergence des systèmes filtrants à droite pour décrire la topologie dans l'espace.

Ainsi, nous pouvons dire que les notions de la fermeture, de la famille des voisinages et de la convergence jouissent respectivement des propriétés suivantes:

(F) $\overline{M+N} = \overline{M} + \overline{N}$, *quels que soient* M *et* N.

(V_1) $[(V \in \mathfrak{V}(x)) \cdot (V \subset U)] \rightarrow [U \in \mathfrak{V}(x)]$, *quel que soit* x.

(V_2) $[(V_1 \in \mathfrak{V}(x)) \cdot (V_2 \in \mathfrak{V}(x))] \rightarrow [V_1 \cdot V_2 \in \mathfrak{V}(x)]$, *quel que soit* x.

(C_1) *Quel que soit un système filtrant à droite* $x(\mathfrak{A})$, *si* $x(\mathfrak{A}) \rightarrow x$, *alors il vient* $x(\mathfrak{A}') \rightarrow x$ *pour tout sous-système confinal* $x(\mathfrak{A}')$ *de* $x(\mathfrak{A})$.

(C_2) *Soit* $x(\mathfrak{A})$ *un système filtrant à droite. Quel que soit un système confinal* $x(\mathfrak{A}')$ *de* $x(\mathfrak{A})$, *lorsqu'il existe un point* x *indépendant de* $x(\mathfrak{A}')$ *et un système filtrant à droite* $x(\mathfrak{B})$ *qui converge vers le point* x *et dont les éléments sont ceux de* $x(\mathfrak{A}')$, *on a* $x(\mathfrak{A}) \rightarrow x$.

Cela posé, en suivant le raisonnement dans le théorème 7, nous pouvons vérifier sans peine le

Théorème 11. *Les notions de la fermeture, de la famille des voisinages et de la convergence sont équivalentes deux à deux en ce sens que, si l'une parmi eux satisfait à la condition citée plus haut, alors les autres sont dérivables d'elle et satisfont respectivement aux conditions correspondantes.*

En remarquant que l'espace additif est monotone et que tout sous-système résiduel d'un système filtrant à droite est confinal, nous avons immédiatement des théorèmes 10 et 11, le

Théorème 12. *Dans l'espace additif, les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\overline{\phi} = \phi$,

(2) $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$, *quel que soit* x.

(3) *Tout système filtrant à droite dont les éléments sont des ensembles vides ne converge vers aucun point.*

Théorème 13. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $M \subset \overline{M}$, *quel que soit* M.

(2) $V \in \mathfrak{V}(x)$ *entraîne* $x \in V$, *quel que soit* x.

(3) *Quel que soit* x, *tout système ordonné* $\{x_\alpha\}$ *qui se compose d'un seul point* $x = x_\alpha$, *converge vers le point* x.

Démonstration. D'après le théorème 4, il est évident que (1) et (2) sont équivalentes.

(2) → (3). D'une part, si $\mathfrak{V}(x) = \phi$, il vient $x(\mathfrak{A}) \to x$ selon l'équivalence E3°. D'autre part, si $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$, selon (2) il vient $x \in V$, quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$; donc on a évidemment $x(\mathfrak{A}) \to x$.

(3) → (2). Soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné et formé d'un seul point $x_\alpha = x$. Lorsqu'il existe un $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $x \bar{\in} V$, comme on le sait, $x(\mathfrak{A})$ ne converge pas vers le point x. Nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

Théorème 14. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\bar{x} = x$, *quel que soit* x.

(2) $V \in \mathfrak{V}(x)$ *entraîne* $x \in V$, *quel que soit* x.

x et y étant deux points distincts, il existe un $V \in \mathfrak{V}(y)$ *tel que* $x \bar{\in} V$, *quels que soient* x *et* y.

(3) *Quel que soit* x, *en posant* $x = x_\alpha$, $(\alpha \in \mathfrak{A})$, *le système ordonné* $x(\mathfrak{A})$ *converge vers le point* x *et il ne converge vers aucun point distinct de* x.

Démonstration. (1) → (2). Quel que soit M, si $x \in M$, on a $x = \bar{x} \subset \overline{M}$; il vient donc $M \subset \overline{M}$. Par suite, $V \in \mathfrak{V}(x)$ entraîne $x \in V$ selon le théorème 4. Puis, soient x et y deux points distincts. D'une part, si $\mathfrak{V}(y) = \phi$, il vient $y \in \bar{x}$ selon l'équivalence E2°, et d'autre part, si $\mathfrak{V}(y) \neq \phi$ et $x \in V$ pour tout $V \in \mathfrak{V}(y)$, il vient $y \in \bar{x}$. Ce qui contredit à l'hypothèse (1). Donc il existe un $V \in \mathfrak{V}(y)$ tel que $x \bar{\in} V$.

(2) → (3). Quel que soit x, en posant $x = x_\alpha$, $(\alpha \in \mathfrak{A})$, le système ordonné $x(\mathfrak{A})$ converge vers le point x selon l'équivalence E3° et

l'hypothèse (2). De plus, le système $x(\mathfrak{A})$ ne converge vers aucun point distinct de x, selon l'hypothèse (2) et l'équivalence E6°.

(3) → (1). Soit $x(\mathfrak{A})$ un système ordonné tel que $x(\mathfrak{A}) \subset x$. Alors, $x(\mathfrak{A})$ se composant du seul point x, il converge vers le seul point x; par conséquent, il vient $\bar{x} = x$ selon l'équivalence E5° et l'hypothèse (3), c.q.f.d.

Théorème 15. *Considérons les trois conditions suivantes:*

(1) *Quel que soit x, il existe un système ordonné et ne convergeant pas vers le point x.*

Si $x(\mathfrak{A}) \to x$, alors il ne converge vers aucun point distinct de x.

(2) *On a $\mathfrak{B}(x) \neq \phi$, quel que soit x.*

Pour deux points distincts x et y, il existe deux voisinages $V \in \mathfrak{B}(x)$ et $U \in \mathfrak{B}(y)$ tels que $V \cdot U = \varphi$.

(3) *Quel que soit x, il existe un système ordonné qui ne converge pas vers le point x.*

Si $x(\mathfrak{A}) \to x$, alors le système $x(\mathfrak{A})$ ne possède aucun point distinct de x comme son point adhérent[1].

Alors, (1) entraîne (2), (2) entraîne (3). En particulier, dans l'espace additif, (3) entraîne (1), en remplaçant le système ordonné par le système filtrant à droite.

Démonstration. (1) → (2). S'il existe un point x tel que $\mathfrak{B}(x) = \phi$, tout système ordonné converge vers le point x selon l'équivalence E3° ; Ce qui contredit à l'hypothèse (1), donc on a $\mathfrak{B}(x) \neq \phi$.

Puis, supposons au contraire qu'il existe deux points distinct x et y tels qu'on a $V \cdot U \neq \phi$ pour tout $V \in \mathfrak{B}(x)$ et $U \in \mathfrak{B}(y)$. Dans ce cas, désignons par $x_{(V,U)}$ un point du produit $V \cdot U$ et ordonnons l'ensemble des points $x_{(V,U)}$ ainsi définis, par la règle que $V \subset V'$ et $U \subset U'$ équivalent à $x_{(V,U)} \geqq x_{(V',U')}$. Alors, comme on peut le voir, le système $\{x_{(V,U)}\}$ devient un système ordonné et il converge à la fois vers les points x et y, ce qui contredit encore à l'hypothèse (1).

(2) → (3). Quel que soit x, étant $\mathfrak{B}(x) \neq \phi$ selon l'hypothèse (2), il existe selon le théorème 8 un système ordonné qui ne converge pas vers le point x.

En outre, soient $x(\mathfrak{A}) \to x$ et $x \neq y$. Il existe alors, selon l'hypo-

---

1) Un point x est dit *adhérent* d'un système ordonné $x(\mathfrak{A})$, si l'implication suivante est vérifiée :

$$[V \in \mathfrak{B}(x)] \to [V \cdot x(\mathfrak{A}) \textit{ est confinal dans } x(\mathfrak{A})].$$

thèse (2), deux voisinages disjoints $V \in \mathfrak{V}(x)$ et $U \in \mathfrak{V}(y)$, et $x(\mathfrak{A})$ est résiduel avec lui-même dans V; donc $x(\mathfrak{A})$ n'est pas confinal dans U, par suite le point y n'est pas un point adhérent de $x(\mathfrak{A})$.

En supposant à la fin que l'espace considéré soit additif, il est clair que (3) entraîne (1), car le point limite d'un système filtrant à droite est encore un point adhérent du système, c.q.f.d.

Théorème 16. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $[V \in \mathfrak{V}(x)] \to [V \neq \phi]$,
Si $U \in \mathfrak{V}(x)$, *il existe alors un* $V \in \mathfrak{V}(x)$ *tel que* $\overline{V} \subset U$.

(2) *Il existe un système ordonné et formé de points et tel qu'il converge vers le point* x.

Soit $\{x^{\alpha}_{\beta}\}$, $(\alpha \in \mathfrak{A}$ *et* $\beta \in \mathfrak{B}(\alpha))$, *un système ordonné et formé de points* x^{α}_{β} *possèdant deux suffixes* α *et* β, *où* $\mathfrak{B}(\alpha)$ *est dépendant de* α. *Si* $\{x^{\alpha}_{\beta}\}$ *vérifie les deux conditions*:

1°. $\{x^{\alpha}_{\beta}\} \to x^{\alpha}$ *pour chaque* α, *lorsqu'on considère le système comme un système ordonné par rapport à* β.

2°. $\{x^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\} \to x$, *lorsqu'on considère le système comme un système ordonné par rapport à* α, *où* $\beta(\alpha)$ *est un élément arbitrairement choisi de* $\mathfrak{B}(\alpha)$ *et* x *est un point indépendant de* $\{x^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\}$,
alors on a $\{x^{\alpha}\} \to x$.

Démonstration. (1) $\to$ (2). D'après l'hypothèse (1), il existe selon le théorème 9 un système ordonné dont tous les éléments sont des points et tel qu'il converge vers le point x.

En suite, supposons au contraire qu'il existe un système $\{x^{\alpha}_{\beta}\}$ ordonné et remplissant les conditions 1° et 2°, et tel que $\{x^{\alpha}\}$ ne converge pas vers le point x. Alors, d'une part, il existe selon l'équivalence E3° un $U \in \mathfrak{V}(x)$ dans lequel $\{x^{\alpha}\}$ n'est pas résiduel avec soi-même. Par suite, $\{x^{\alpha}\}$ est confinal dans CU. D'autre part, il existe selon l'hypothèse (1) un $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $\overline{V} \subset U$; il en résulte que $\{x^{\alpha}\}$ est encore confinal dans $C\overline{V}$. En désignant par $\{x^{\bar{\alpha}}\}$ le système des points $x^{\bar{\alpha}}$ appartenant à la fois au système $\{x^{\alpha}\}$ et à $C\overline{V}$, selon l'équivalence E2° il existe, quel que soit $x^{\bar{\alpha}}$, un voisinage $V(x^{\bar{\alpha}}) \in \mathfrak{V}(x^{\bar{\alpha}})$ disjoint V, puisque $x^{\bar{\alpha}} \bar{\in} \overline{V}$.

Or, étant $\{x^{\bar{\alpha}}_{\beta}\} \to x^{\bar{\alpha}}$, le système est résiduel dans $V(x^{\bar{\alpha}})$; par suite, $V(x^{\bar{\alpha}})$ contient au moins un point du système, soit $x^{\bar{\alpha}}_{\beta(\bar{\alpha})}$. On a alors $x^{\bar{\alpha}}_{\beta(\bar{\alpha})} \bar{\in} V$ pour tout $\bar{\alpha}$.

Cela posé, pour chaque α différent de $\bar{\alpha}$, prenons un point quelconque de $\{x^{\alpha}_{\beta}\}$ et le désignons par $\tilde{x}^{\alpha}_{\beta(\alpha)}$.

Ainsi, si l'on désigne par $\{x^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\}$ le système des points de $\{x^{\bar{\alpha}}_{\beta(\bar{\alpha})}\}$ et de $\{\tilde{x}^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\}$, alors il vient $\{x^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\} \to x$ selon la condition 2° ; ce qui est une contradiction, puisque $V \in \mathfrak{V}(x)$ est disjoint à $\{x^{\bar{\alpha}}_{\beta(\bar{\alpha})}\}$ qui est confinal dans $\{x^{\alpha}_{\beta(\alpha)}\}$.

(2) → (1). D'après l'hypothèse (2), il vient $[V \in \mathfrak{V}(x)] \to [\overline{V} \neq \phi]$ selon le théorème 9. Ensuite supposons par contre qu'il existe un point x et un $U \in \mathfrak{V}(x)$ de façon qu'il n'existe aucun $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $\overline{V} \subset U$; donc il vient $\overline{V} - U \neq \phi$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$. Désignons par x^V un point de $\overline{V} - U$ et par $\{x^V\}$ le système formé des points x^V, V parcourant $\mathfrak{V}(x)$, et ordonné par la règle que $V \subset V'$ équivaut à $x^V \geqq x^{V'}$. D'après cette définition, il est évident que $\{x^V\}$ ne converge pas vers le point x. Or, en rapprochant l'hypothèse (2), le théorème 9 et l'équivalence E5°, étant $x^V \in \overline{V}$, il existe un système $\{x^V_\beta\}$ ordonné, formé des points $x^V_\beta \in V$ et convergeant vers le point x^V, où β parcourt un ensemble ordonné et dépendant de V.

Cela posé, en désignant par $x^V_{\beta(V)}$ un point quelconque de $\{x^V_\beta\}$, le système $\{x^V_{\beta(V)}\}$ est considéré comme un système ordonné et il converge évidemment vers le point x. Par conséquent, on a $\{x^V\} \to x$ selon l'hypothèse (2), ce qui contredit au fait obtenu plus haut que $\{x^V\}$ ne converge pas vers le point x, c.q.f.d.

Théorème 17. *Les trois propriétés suivantes d'un ensemble U sont équivalentes*:

(1) $\overline{R - U} \subset R - U$,

(2) *$x \in U$ entraîne $U \in \mathfrak{V}(x)$.*

(3) *Si $x(\mathfrak{A}) \to x \in U$, alors $x(\mathfrak{A}) \cdot U \neq \phi$.*

Démonstration. (1) → (2). Etant $x \in U$, il vient $x \bar{\in} CU$. En outre il vient $\overline{CU} \subset CU$ selon l'hypothèse (1), d'où $x \bar{\in} \overline{CU}$; donc $U \in \mathfrak{V}(x)$.

(2) → (3). Etant $x \in U$, il vient $U \in \mathfrak{V}(x)$ selon l'hypothèse (2). Donc, si $x(\mathfrak{A}) \to x$, on a $U \cdot x(\mathfrak{A}) \neq \phi$ selon l'équivalence E3°.

(3) → (1). Soit $x \in \overline{R - U}$. Si $R - U = \phi$, selon l'équivalence E5° il existe un système $x(\mathfrak{A})$ ordonné, formé des ensembles vides et convergeant vers le point x. D'autre part, étant $x \in U$ dans ce cas, on a $U \cdot x(\mathfrak{A}) \neq \phi$ selon l'hypothèse (3); ce qui est une contradiction. Donc $R - U \neq \phi$. Par conséquent, il existe selon l'équivalence E5° un système $x(\mathfrak{A})$ ordonné et formé des points de $R - U$ tel que $x(\mathfrak{A}) \to x$. Or, étant évidemment $U \cdot x(\mathfrak{A}) = \phi$, $x(\mathfrak{A})$ ne converge vers aucun point de U selon l'hypothèse (3); donc on a $x \in R - U$, c.q.f.d.

Un ensemble jouissant de l'une des propriétés du théorème est appelé *ouvert.* D'après cette définition, on peut dire qu'un ensemble M est ouvert dans le cas et le seul cas où $M \subset I(M)$.

Des théorèmes 12 et 16, on peut déduire le

Théorème 18. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$, *quel que soit* M.

(2) *Quel que soit* x, *si* $V \in \mathfrak{V}(x)$, *alors l'intérieur* $I(V)$ *de* V *est ouvert et appartient à* $\mathfrak{V}(x)$ *et contient le point* x.

(3) *Si* $\{x^\alpha_\beta\} \to x^\alpha$ *et* $\{x^\alpha\} \to x$, *alors il existe un système ordonné* $x(\mathfrak{C})$ *dont les éléments sont ceux du système* $\{x^\alpha_\beta\}$ *et tel que* $x(\mathfrak{C}) \to x$.

Démonstration. (1) $\to$ (2). Soit $V \in \mathfrak{V}(x)$. Etant $x \bar{\in} \overline{CV}$, il vient donc $x \in C\overline{CV} = I(V)$. En outre, d'une part, étant $\overline{CV} = CI(V)$, on a selon l'hypothèse (1) $\overline{CI(V)} = \overline{\overline{CV}} \subset \overline{CV} = CI(V)$; donc $I(V)$ est ouvert. Par conséquent, il vient $I(V) \in \mathfrak{V}(x)$ selon le théorème 17.

(2) $\to$ (3). Soient $\{x^\alpha_\beta\} \to x^\alpha$ et $\{x^\alpha\} \to x$. D'une part, si $\mathfrak{V}(x) = \phi$, tout système ordonn éconverge vers le point x selon l'équivalence E3°. D'autre part, si $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$, un $V \in \mathfrak{V}(x)$ existe. On a alors $C\cdot\overline{CV} \in \mathfrak{V}(x)$ selon l'hypothèse (2), et, étant $\{x^\alpha\} \to x$, il existe un point x^α appartenant à $C\overline{CV}$, c. à. d. $x^\alpha \bar{\in} \overline{CV}$. D'après l'équivalence E2°, il existe un $U \in \mathfrak{V}(x^\alpha)$ tel que $U \cdot CV = \phi$, d'où $U \subset V$. Cela posé, en posant $x^V = x^\alpha_\beta \in V$, désignons par $x(\mathfrak{C}) = \{x^V\}$ l'ensemble de tous les points x^V ainsi obtenus, et l'ordonnons par la règle que $V \subset V'$ équivaut à $x^V \geqq x^{V'}$. Alors, comme on peut le voir, on a $x(\mathfrak{C}) \to x$.

(3) $\to$ (1). Soit $x \in \overline{\overline{M}}$. Quel que soit $x(\mathfrak{A})$, si $x(\mathfrak{A}) \to x$, on a alors $x \in \overline{M}$ selon le corollaire 2 du théorème 7. Donc, considérons le cas où il existe un système ordonné $x(\mathfrak{A})$ qui ne converge pas vers le point x. Alors, étant $x \in \overline{\overline{M}}$, il vient $\overline{M} \neq \phi$ en tenant compte du corollaire 2 du théorème 7. Donc; selon l'équivalence E5°, il existe un système ordonné $\{x^\alpha\} \subset \overline{M}$ tel que $\{x^\alpha\} \to x$. Dans ce cas, il y a deux cas possibles à considérer:

Premier cas où $M = \phi$. Etant $x^\alpha \in \overline{M}$, quel que soit $\{x^\alpha_\beta\}$, il vient $\{x^\alpha_\beta\} \to x^\alpha$ selon le corollaire du théorème 7; donc en posant $x^\alpha_\beta = \phi$, on a $\{x^\alpha_\beta\} \to x^\alpha$. Par conséquent, selon l'hypothèse (3), il existe un système ordonné $x(\mathfrak{C})$ dont les éléments sont ceux de $\{x^\alpha_\beta\}$ et tel que $x(\mathfrak{C}) \to x$. Donc $x \in \overline{M}$.

Deuxième cas où $M \neq \phi$. Etant $x^\alpha \in \overline{M}$, il existe un système $\{x^\alpha_\beta\} \subset M$ ordonné et convergeant vers le point x^α selon l'équivalence E5°. Donc, il existe selon l'hypothèse (3) un système $x(\mathfrak{C}) \subset \{x^\alpha_\beta\}$

ordonné et convergeant vers le point x; donc il vient $x \in \overline{M}$.

Il résulte du fait démontré plus haut que $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$, c.q.f.d.

Nous appelons *quasi-accessible* un espace vérifiant les conditions, quel que soit M,

$$\overline{\phi} = \phi, \qquad M \subset \overline{M} \quad \text{et} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{M},$$

c. à. d. un espace quasi-accessible n'est autre qu'un espace vérifiant les conditions, quel que soit x,

1. $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$,

2. Quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$, il existe un voisinages ouvert $U \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $U \subset V$.

Théorème 19. *Soient X et Y deux espaces et soit $y = f(x)$ une fonction de X sur Y entier. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Quel que soit M, $x \in \overline{M}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(M)}$.*

(2) *S'il existe un voisinage $V(f(x))$ de $f(x)$ dans Y, il existe alors un voisinage $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $f(V) \subset V(f(x))$.*

(3) *Quel que soit $x(\mathfrak{A})$, si $x(\mathfrak{A}) \to x$, alors $f(x(\mathfrak{A})) \to f(x)$.*

Démonstration. (1) $\to$ (2). Tout d'abord, nous allons démontrer que: si la famille $\mathfrak{V}(f(x))$ des voisinages $V(f(x))$ de $f(x)$ dans Y n'est pas vide, alors celle de x dans X l'est aussi.

Supposons, en effet, que $\mathfrak{V}(x) = \phi$. Alors il vient $x \in \overline{\phi}$ selon le corollaire 2 du théorème 7. Donc, selon l'hypothèse (1), il vient $f(x) \in \overline{f(\phi)} = \overline{\phi}$; ce qui prouve du corollaire 2 du théorème 7 que $\mathfrak{V}(f(x)) = \phi$. Il en résulte que $\mathfrak{V}(f(x)) \neq \phi$ entraîne $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$.

Ce préliminaire étant établi, nous allons démontrer notre implication. Supposons par contre que, pour $V(f(x))$ donné d'avance il n'existe aucun $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $f(V) \subset V(f(x))$. Dans ce cas, si $V \in \mathfrak{V}(x)$, alors $V \neq \phi$, parce que si $\phi \in \mathfrak{V}(x)$, on a évidemment $f(\phi) \subset V(f(x))$. En tenant compte de la supposition posée, il existe, quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$, un point $x_V \in V$ tel que $f(x_V) \overline{\in} V(f(x))$. En désignant par M l'ensemble des points x_V ainsi définis, comme on le sait, il vient $x \in \overline{M}$. Donc on a $f(x) \in \overline{f(M)}$ selon (1). Cependant, d'autre part, on a évidemment $f(M) \cdot V(f(x)) = \phi$, donc $f(x) \overline{\in} \overline{f(M)}$. Nous aboutissons donc à une contradiction.

(2) $\to$ (3). Soit $x(\mathfrak{A}) \to x$. Si $\mathfrak{V}(f(x)) = \phi$, il vient $f(x(\mathfrak{A})) \to f(x)$ selon l'équivalence E3°. Donc supposons que $\mathfrak{V}(f(x)) \neq \phi$. Alors, il en résulte que $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$ selon (2). Donc, en prenant un $V \in \mathfrak{V}(x)$,

alors $x(\mathfrak{A})$ est résiduel avec lui-même dans V; donc $f(x(\mathfrak{A}))$ l'est aussi dans $f(V)$. D'autre part, selon (2) il existe pour $V(f(x))$ donné d'avance un $V \in \mathfrak{V}(x)$ tel que $f(V) \subset V(f(x))$. Par conséquent, $f(x(\mathfrak{A}))$ est à forte raison résiduel avec lui-même dans $V(f(x))$. Donc il vient $f(x(\mathfrak{A})) \to f(x)$.

(3) $\to$ (1). Soit $x \in \overline{M}$. Il y a dans ce cas deux cas possibles à considérer:

Premier cas où $M = \phi$. Etant $x \in \overline{\phi}$, il vient $x(\mathfrak{A}) \to x$ quel que soit $x(\mathfrak{A})$. Donc en prenant maintenant un système ordonné quelconque $\{y^\alpha\}$ dans Y, il existe un système ordonné $\{x^\alpha\}$ dans X et tel que $f(x^\alpha) = y^\alpha$. Etant $\{x^\alpha\} \to x$, il vient $\{y^\alpha\} \to f(x)$ selon l'hypothèse (3); ce qui prouve selon le corollaire 2 du théorème 7 que $f(x) \in \overline{\phi}$, c. à. d. que $f(x) \in \overline{f(M)}$.

Deuxième cas où $M \neq \phi$. Etant $x \in \overline{M}$, il existe un système $x(\mathfrak{A}) \subset M$ ordonné et convergeant vers le point x. Donc il vient $f(x(\mathfrak{A})) \to f(x)$ selon l'hypothèse (3) et d'autre part on a $f(x(\mathfrak{A})) \subset f(M)$; par conséquent, on a $f(x) \in \overline{f(M)}$ selon l'équivalence E5°.

Il en résulte en fin de compte que $x \in \overline{M}$ entraîne $f(x) \in \overline{f(M)}$, c.q.f.d.

§3. Convergence du système des ensembles.

Soit $\mathfrak{A}$ un ensemble ordonné et soit $\{S_\alpha\}$ un système des ensembles non-vides et ordonnés en suivant l'ordre des suffixes de façon que $\alpha \geqq \beta$ équivaut à $S_\alpha \geqq S_\beta$.

Cela posé, nous commencerons par les définitions nécessaires dans ce qui suit:

Un système ordonné $\{S_\alpha\}$ est dit qu'il converge vers un point x, lorsque, pour chaque voisinage $V \in \mathfrak{V}(x)$ s'il existe, l'ensemble des suffixes des ensembles S_α entièrement contenus dans V est résiduel avec $\mathfrak{A}$; le point x s'appelle *point limite* de $\{S_\alpha\}$.

Un système ordonné $\{S_\alpha\}$ est dit qu'il *s'attroupe* vers un point x, lorsque, pour chaque voisinage $V \in \mathfrak{V}(x)$ s'il existe, l'ensemble des suffixes des ensembles S_α possédant au moins un point commun à V est confinal avec $\mathfrak{A}$; le point x est dit *point adhérent* de $\{S_\alpha\}$.

Dans ce qui suit, nous considérons pour simplicité l'espace où $\phi = \overline{\phi}$ a lieu, c. à. d. $\mathfrak{V}(x) \neq \phi$, quel que soit x.

Ceci étant posé, on peut vérifier sans peine les

Théorème 1. (1) *Pour qu'un système ordonné* $\{S_\alpha\}$ *converge vers* *un point x, il faut et il suffit que, quel que soit un point x_α de S_α, le système ordonné $\{x_\alpha\}$ converge vers le point x.*

(2) *Pour qu'un système ordonné $\{S_\alpha\}$ s'attroupe vers un point x, il faut et il suffit qu'il existe un système $\{x_\alpha\}$ ordonné et s'attroupant vers le point x, où x_α est un point convenablement choisi de S_α.*

Un système ordonné $\{S_\alpha\}$ sera dit *monotone* si $\alpha \geqq \beta$ entraîne $S_\alpha \subset S_\beta$.

Si un système des ensembles $\{M\}$ est ordonné par l'*inclusion inverse*, à savoir par la règle que $M_1 \subset M_2$ équivaut à $M_1 \geqq M_2$, alors le système deviendra monotone.

Or, étant donné un système ordonné $\{S_\alpha\}$, alors on peut engendrer de lui un système monotone $\{M_\alpha\}$ en posant $M_\alpha = \sum_{\beta \geqq \alpha} S_\beta$, et nous l'appellerons le *système engendré de* $\{S_\alpha\}$.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système ordonné $\{S_\alpha\}$ converge (s'attroupe) vers un point x est que le système engendré $\{M_\alpha\}$ de $\{S_\alpha\}$ converge (s'attroupe) vers le point x.*

Théorème 3. *Pour qu'un système $\{S_\alpha\}$ s'attroupe vers un point x, il faut et il suffit que la partie commune aux fermetures des ensembles appartenant au système engendré $\{M_\alpha\}$ de $\{S_\alpha\}$ ne soit pas vide.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\{S_\alpha\}$ s'attroupe vers un point x, autrement dit, que, quels que soient α et $V \in \mathfrak{V}(x)$, il existe un suffixe β dépendant de α et de V tel que $\beta \geqq \alpha$ et $V \cdot S_\beta \neq \phi$. Donc, comme on le voit, étant $S_\beta \subset M_\alpha$, il vient $M_\alpha \cdot V \neq \phi$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$. Par conséquent, il en résulte que $x \in \overline{M}_\alpha$, quel que soit α; il vient donc $x \in \prod_\alpha \overline{M}_\alpha$.

Inversement, soit $x \in \prod_\alpha \overline{M}_\alpha$. Alors, on a $x \in \overline{M}_\alpha$ quel que soit α; par suite il vient $V \cdot M_\alpha \neq \phi$ quel que soit $V \in \mathfrak{V}(x)$. Il en résulte immédiatement qu'il existe un suffixe β dépendant de α et de V tel que $\beta \geqq \alpha$ et $V \cdot S_\alpha \neq \phi$; ce qui prouve que $\{S_\alpha\}$ s'attroupe vers le point x, c.q.f.d.

Théorème 4. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout système ordonné $\{x_\alpha\}$ possède au moins un point adhérent, où x_α désigne un point.*

(2) *Pour tout système monotone $\{M_\alpha\}$, on a toujours $\prod_\alpha \overline{M}_\alpha \neq \phi$.*

Démonstration. (1) $\rightarrow$ (2). Soit $\{M_\alpha\}$ un système monotone et soit x_α un point quelconque de M_α. Alors, par la supposition (1), le système ordonné $\{x_\alpha\}$ possède au moins un point adhérent, soit x. Par suite, quels que soient α et $V \in \mathfrak{V}(x)$, il existe un point x_β tel que $\beta \geqq \alpha$ et $x_\beta \in V$. D'autre part, $\{M_\alpha\}$ étant monotone, on a naturellement $x_\beta \in M_\alpha$; par conséquent, on a $V \cdot M_\alpha \neq \phi$ et donc $x \in \overline{M}_\alpha$ quel que soit α. Il vient donc $\prod_\alpha \overline{M}_\alpha \neq \phi$.

(2) $\to$ (1). Soit $\{x_\alpha\}$ un système ordonné et soit $\{M_\alpha\}$ le système engendré de $\{x_\alpha\}$. Il vient alors $\prod_\alpha \overline{M}_\alpha \neq \phi$ selon l'hypothèse (2), et par conséquent, en vertu du théorème 3, le système $\{x_\alpha\}$ s'attroupe vers un certain point de $\prod_\alpha \overline{M}_\alpha$, c.q.f.d.

Ceci étant posé, nous allons dès maintenant étudier la construction de l'espace vérifiant la condition dans le théorème 4.

Considérons d'abord le système $\mathfrak{F}$ formé de tous les sous-ensembles non-vides de l'espace R, alors, comme on le voit, $\mathfrak{F}$ peut être considéré comme un système monotone. Par conséquent, il faut exister, par l'hypothèse posée à l'espace considéré, au moins un point x commun à tout $\overline{M}$, M parcourant $\mathfrak{F}$. On peut de là dire que le point x possède un seul voisinage $V(x)$ coïncidant avec l'espace tout-entier. Car, s'il existait un voisinage V_x différent de l'espace, alors on aurait assurément $x \in \overline{CV_x}$, et ce qui est une contradiction.

Ainsi, du fait obtenu ci-dessus, on peut déduire facilement le

Théorème 5. *Pour que (dans l'espace monotone) chaque système ordonné $\{x_\alpha\}$ possède au moins un point adhérent, il faut et il suffit qu'il existe au moins un point dont la famille des voisinages (ou bien est vide ou bien) se compose d'un seul voisinage coïncidant avec l'espace tout-entier.*

L'espace de ce genre n'est pas bien intéressant, puisqu'il jouit de la propriété très triviale. Par conséquent, nous allons dès maintenant considérer un espace dans lequel chaque système filtrant à droite s'attroupe vers au moins un point.

Soit $\{x_\alpha\}$ un système filtrant à droite. Alors le système engendré de lui $\{M_\alpha\}$ possède la propriété dite *l'intersection de l'ordre fini*, c. à. d. le produit des éléments arbitrairement choisis du nombre fini de $\{M_\alpha\}$ n'est pas vide.

Ceci étant posé, nous avons le

Théorème 6. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout système filtrant à droite $\{x_\alpha\}$ s'attroupe vers au moins un point.*

(2) *Pour tout famille d'ensembles non-vides $\{M\}$, jouissant de la propriété de l'intersection de l'ordre fini, la partie commune aux fermetures de tous les éléments de $\{M\}$ n'est pas vide.*

Démonstration. (1) → (2). En désignant par $\{M_\alpha\}$ le filtre[1] engendré[2] de la famille $\{M\}$ donnée d'avance, $\{M_\alpha\}$ est considéré comme monotone, c.à.d. $\alpha \geqq \beta$ entraîne $M_\alpha \subset M_\beta$.

Ceci posé, soit x_α un point quelconque de M_α. Alors, $\{x_\alpha\}$ est certainement un système filtrant à droite et par conséquent, il y a selon (1) son point adhérent, soit x. Donc, si $V \in \mathfrak{V}(x)$, alors V contient un sous-système confinal de $\{x_\alpha\}$; par suite, il existe pour α arbitraire un β supérieur à α tel que $x_\beta \in V$. Ce qui montre que $V \cdot M_\alpha \neq \phi$, puisque $\{M_\alpha\}$ est monotone. Par conséquent, on a évidemment $x \in \overline{M}_\alpha$, on a donc $x \in \prod_\alpha \overline{M}_\alpha$. Etant $\{M\} \subset \{M_\alpha\}$, on a à forte raison $x \in \prod_{M \in \{M\}} \overline{M}$.

(2) → (1). Soit $\{x_\alpha\}$ un système filtrant à droite et soit $\{M_\alpha\}$ la famille engendrée de $\{x_\alpha\}$. Alors il est clair que cette famille jouit de la propriété de l'intersection de l'ordre fini; donc, par l'hypothèse (2), il y a un point x appartenant à tous les $\overline{M}_\alpha$. Il en résulte du théorème 3 que $\{x_\alpha\}$ s'attroupe vers le point x, c.q.f.d.

Suivant la terminologie due à M. Tukey, nous dirons *compact* un espace jouissant de la propriété énoncée dans le théorème précédent. Nous voudrons discuter, dans le paragraphe suivant, par rapport à l'immersion d'un espace dans un espace compact. Dans cette place-ci, nous considérons par rapport à la propriété de l'intersection de l'ordre plus haut que fini.

Nous dirons qu'une famille des ensembles non-vides $\{M\}$ jouit de la propriété de *l'intersection de l'ordre* $\aleph_\xi$, lorsque la partie commune

---

1) Filtre $\mathfrak{F}$ est une famille des ensembles non-vides jouissant des propriétés suivantes:

1. $\phi \bar{\in} \mathfrak{F}$.
2. Quels que soient des ensembles du nombre fini de $\mathfrak{F}$, sa partie commune n'est pas vide et elle appartient aussi à $\mathfrak{F}$.
3. Quel que soit $M \in \mathfrak{F}$, $M \subset N$ entraîne $N \in \mathfrak{F}$.

2) Soit $\{M\}$ une famille vérifiant la propriété de l'intersection de l'ordre fini. Alors on peut engendrer de $\{M\}$ un filtre $\mathfrak{F}$ uniquement déterminé comme suivant:

Si l'on désigne par $\mathfrak{F}$ la famille des ensembles contenant au moins une partie commune aux ensembles du nombre fini de $\{M\}$, alors $\mathfrak{F}$ est bien l'une que nous avions en vue. Il est clair que $\mathfrak{F} \supset \{M\}$.

Cf. H. Cartant, Théorie des filtres., C. R. (Paris)., t. 205 (1937). pp. 595—598.

aux éléments arbitrairement choisis de puissance $\aleph_\xi$ de $\{M\}$ n'est pas vide.

D'après cette convention, nous aurons le

Théorème 7. *La propriété suivante* (1) *entraîne la propriété suivante* (2).

(1) *Si $\{M\}$ est une famille des ensembles jouissant de la propriété de l'intersection de l'ordre $\aleph_\xi$, alors la partie commune aux fermetures de tous ses éléments n'est pas vide.*

(2) *Si $\{G\}$ est une famille des ensembles ouverts qui couvre l'espace entier, alors elle contient une sous-famille de puissance $\aleph_\xi$ couvrant l'espace entier.*

Démonstration. Supposons par contre que la famille $\{G\}$ ne contienne aucune sous-famille de puissance $\aleph_\xi$ couvrant l'espace entier. Alors, en posant $F = CG$, comme on peut le vérifier, nous aurons une famille des ensembles fermés $\{F\}$ jouissant de la propriété de l'intersection de l'ordre $\aleph_\xi$. Donc, d'après l'hypothèse (1), la partie commune à tous les éléments de $\{F\}$ n'est pas vide; par suite, on a $R \neq C(\Pi F) = \sum G$. Ce qui nous donne une contradiction, c.q.f.d.

En général, la réciproque du théorème 7 n'est pas nécessairement vraie, mais elle est vraie sous quelques conditions, c'est à savoir que:

Pour que la propriété (2) entraîne (1), il est suffisant que l'espace considéré vérifie les conditions suivantes, quel que soit $M \subset R$,

$$M \subset \overline{M} \quad et \quad \overline{M} = \overline{\overline{M}}.$$

En effet, soit $\{M\}$ une famille des ensembles possédant la propriété de l'intersection de l'ordre $\aleph_\xi$. Supposons par contre que $\Pi \overline{M} = \phi$. Alors, en posant $G = C\overline{M}$ et en tenant compte de la supposition $\overline{M} = \overline{\overline{M}}$, comme on peut le voir, la famille des ensembles ouverts $\{G\}$ couvre l'espace entier. Par suite, selon l'hypothèse (2), $\{G\}$ contient une sous-famille $\{G^*\}$ de puissance $\aleph_\xi$, couvrant l'espace entier. Par conséquent, on a $\phi = C(\sum G^*) = \Pi \overline{M}^*$, où $\overline{M}^* = CG^*$. De plus, selon l'hypothèse $M^* \subset \overline{M}^*$, on a $\phi = \Pi M^*$ où $M^* \in \{M\}$. $\{M^*\}$ étant de puissance $\aleph_\xi$, nous aboutissons donc à une contradiction, c.q.f.d.

§4. Immersion d'un espace dans un espace compact.

En tenant compte du théorème 5 dans §3, nous pouvons dire, dans un espace vérifiant l'une des conditions citées dans le théorème 9 de §2, que:

A tout espace R, on peut associer, en ajoutant un point, un espace compact R^* tel que R est homéomorphe à un sous-espace dense dans R^*.

En effet, soit R^* un ensemble formé de tous les points de R et d'un point p n'appartenant pas à R. Définissons la famille des voisinages de chaque point x de R^* comme suivant:

Si $x \in R$, la nouvelle et l'ancienne famille des voisinages de x sont identiques.

La famille des voisinages de p (ou bien est vide ou bien) se compose d'un seul ensemble R^*.

D'après cette définition, on voit immédiatement que l'espace R^* vérifie assurément la condition citée dans le théorème, c.q.f.d.

Mais telle immersion est moins intéressante; donc nous considérons dorénavant une immersion non triviale et naturelle d'un espace dans un espace compact. Pour ce but, il est commode à considérer *ultrafiltre.*

Un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ est un filtre tel qu'il n'existe aucun filtre contenant $\mathfrak{F}$ comme une vraie sous-famille.

Comme on le sait, pour qu'un filtre $\mathfrak{F}$ soit ultrafiltre, il faut et il suffit que, quel que soit $M \subset R$, ou bien $M \in \mathfrak{F}$ ou bien $CM \in \mathfrak{F}$. Et de plus, selon le théorème bien connu de M. Zorn, il existe pour un filtre quelconque au moins un ultrafiltre ayant le filtre-là comme une sous-famille. Par conséquent, on peut dire, du théorème 6 dans §3, que les trois propriétés suivantes sont équivalentes deux à deux:

1) *Tout système filtrant à droite possède au moins un point adhérent.*

2) *Tout filtre possède au moins un point adhérent*[1].

3) *Tout ultrafiltre possède au moins un point limite*[1].

Après ces préliminaires, nous nous avoncerons à notre but.

Soit M un sous-ensemble quelconque dans l'espace R et désignons par M^* l'ensemble de tous les ultrafiltres $\mathfrak{F}$ dans R auxquels M appartient comme un élément. Alors, R^* désigne l'ensemble de tous les ultrafiltres dans R, et, comme on le sait, nous aurons les égalités suivantes, quels que soient M et N:

1. $\phi^* = \phi$,

---

1) Un filtre étant considéré comme un système ordonné et monotone, on pourra entendre son point adhérent et son point limite. Cf. p. 154.

2. $(R-M)^* = R^* - M^*$,
3. $M \subset N$ *entraîne* $M^* \subset N^*$,
4. $(M+N)^* = M^* + N^*$,
5. $(M \cdot N)^* = M^* \cdot N^*$.

Ceci étant établi, nous considérons un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ dans R comme un point de R^* et définissons un voisinage du point $\mathfrak{F}$ dans R^* comme suivant :

Soit M un ensemble quelconque dans R et désignons par $I(M)$ l'intérieur de M, à savoir $I(M) = C\overline{CM}$. Si $I(M) \in \mathfrak{F}$, alors nous employons l'ensemble $(I(M))^*$ dans R^* comme un voisinage du point $\mathfrak{F}$, et le désignons par $V^*(\mathfrak{F})$ dans ce qui suit. Nous pouvons ainsi considérer l'ensemble R^* comme un espace, mais la famille des voisinages d'un point dans R^* n'est pas en général nécessairement non vide. Donc, nous supposons pour la simplicité de la discussion que l'espace considéré vérifie la condition $\overline{\phi} = \phi$ dans ce qui suit.

D'après cette hypothèse, à chaque point $\mathfrak{F}$ de R^* correspond au moins un voisinage $V^*(\mathfrak{F})$, parce que $R \in \mathfrak{F}$ et R lui-même est ouvert dans l'espace R d'après l'hypothèse que $\overline{\phi} = \phi$.

Cela posé, nous allons démontrer que l'espace R^* vérifie les propriétés suivantes :

(1) *L'espace R^* est quasi-accessible.*

Tout d'abord, il viendra $\mathfrak{F} \in V^*(\mathfrak{F})$. En effet, étant $V^*(\mathfrak{F}) = (I(M))^*$ et $I(M) \in \mathfrak{F}$, donc par la définition on a évidemment $\mathfrak{F} \in (I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$.

En outre, $V^*(\mathfrak{F})$ sera ouvert dans l'espace R^*. En effet, soit $\mathfrak{F}_1$ un point quelconque de $V^*(\mathfrak{F})$. Alors il existe pour $V^*(\mathfrak{F})$ un ensemble M tel que $V^*(\mathfrak{F}) = (I(M))^*$, $I(M) \in \mathfrak{F}$ et $I(M) \in \mathfrak{F}_1$. Par conséquent, $V^*(\mathfrak{F})$ lui-même est encore un voisinage de $\mathfrak{F}_1$ d'après la définition de voisinage. Ce qui prouve, selon le théorème 16 dans §2, que $V^*(\mathfrak{F})$ est ouvert, c.q.f.d.

(2) *Si l'espace R est additif, alors l'espace R^* l'est aussi.*

En effet, soient $V_1^*(\mathfrak{F})$ et $V_2^*(\mathfrak{F})$ deux voisinages de $\mathfrak{F}$. Il existe alors deux ensembles M_1 et M_2 tels que $V_1^*(\mathfrak{F}) = (I(M_1))^*$, $I(M_1) \in \mathfrak{F}$, $V_2^*(\mathfrak{F}) = (I(M_2))^*$ et $I(M_2) \in \mathfrak{F}$. $\mathfrak{F}$ étant un filtre, le produit $I(M_1) \cdot I(M_2)$ n'est pas vide et appartient à $\mathfrak{F}$. En outre, comme on le sait, R étant additif, il vient $I(M_1 \cdot M_2) = I(M_1) \cdot I(M_2)$; d'où $I(M_1 \cdot M_2) \in \mathfrak{F}$. D'autre part, on a évidemment $(I(M_1 \cdot M_2))^* = (I(M_1))^* \cdot (I(M_2))^*$, ce qui prouve que le produit $V_1^*(\mathfrak{F}) \cdot V_2^*(\mathfrak{F})$ lui-même est encore un voisinage de $\mathfrak{F}$. Il en résulte que l'espace R^* est additif, c.q.f.d.

Cela posé, nous allons démontrer le

Théorème 1. *L'espace R^* est compact.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}^*$ un ultrafiltre dans R^*. Alors la famille des sous-ensembles M de R tels que $M^* \in \mathfrak{F}^*$, se détermine uniquement par rapport à $\mathfrak{F}^*$, nous la désignons par $\mathfrak{F}$.

Nous allons démontrer que $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre dans R. En effet, on a d'abord $\phi \bar{\in} \mathfrak{F}$, puisque $\phi^* = \phi$ et $\phi^* \bar{\in} \mathfrak{F}^*$. En outre, soient M_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$, des ensembles du nombre fini de $\mathfrak{F}$, alors on a par la définition $M_i^* \in \mathfrak{F}^*$. D'une part, $\mathfrak{F}^*$ étant un filtre dans R^*, il vient $\prod_{i=1}^{n} M_i^* \in \mathfrak{F}^*$, et d'autre part, étant $\prod_{i=1}^{n} M_i^* = (\prod_{i=1}^{n} M_i)^*$, il vient $(\prod_{i=1}^{n} M_i)^* \in \mathfrak{F}^*$; par consequent, on a $\prod_{i=1}^{n} M_i \in \mathfrak{F}$. De plus, si $M \in \mathfrak{F}$ et $M \subset N$, alors il vient $M^* \subset N^*$, donc on a $N^* \in \mathfrak{F}^*$, puisque $\mathfrak{F}^*$ est un filtre. Par suite, il vient $N \in \mathfrak{F}$. Ainsi nous pouvons dire que $\mathfrak{F}$ est un filtre dans R.

Pour démontrer que $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, il suffit de démontrer que, quel que soit $M \subset R$, $\mathfrak{F}$ contient l'un et l'un seul des ensembles M et CM. Or, il est clair que $\mathfrak{F}$ ne contient pas en même temps les ensembles M et CM; Donc supposons par contre que $\mathfrak{F}$ ne contienne ni M ni CM. Alors, par la définition on a $M^* \bar{\in} \mathfrak{F}^*$ et $(CM)^* \bar{\in} \mathfrak{F}^*$. D'autre part, comme on le sait, M^* et $(CM)^*$ sont mutuellement complémentaires dans R^*. $\mathfrak{F}^*$ étant un ultrafiltre dans R^*, $\mathfrak{F}^*$ contient donc l'un et l'un seul des M^* et $(CM)^*$; nous aboutissons ainsi à une contradiction. Il en résulte que $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre dans R.

Ceci étant établi, nous allons démontrer que $\mathfrak{F}$, considéré comme un point de R^*, est un point limite de $\mathfrak{F}^*$.

Soit, en effet, $V^*(\mathfrak{F})$ un voisinage quelconque de $\mathfrak{F}$ dans R^*. Alors, il existe par la définition un ensemble M tel que $I(M) \in \mathfrak{F}$ et $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$. D'autre part, étant $I(M) \in \mathfrak{F}$, on a $(I(M))^* \in \mathfrak{F}^*$ selon la définition de $\mathfrak{F}$.

En rapprochant les faits que $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$ et $(I(M))^* \in \mathfrak{F}^*$, on a clairement $V^*(\mathfrak{F}) \in \mathfrak{F}^*$. Ce qui nous montre que $\mathfrak{F}^*$ converge vers le point $\mathfrak{F}$. Ainsi la démonstration du théorème est complètement établie, c.q.f.d.

Soit x un point de R et considérons dans R la famille de tous les sous-ensembles contenant le point x. Alors, comme on le sait, elle est un ultrafiltre dans R, donc nous le désignons par $\mathfrak{F}_x$. Quand le point x parcourt l'espace R, nous obtiendrons l'ensemble des points $\mathfrak{F}_x$ dans R^*; nous le désignons par $\widetilde{R}$ dans la suite. Cela posé, si l'on fait correspondre à chaque point x de R le point $\mathfrak{F}_x$ de R^*, alors on a évidemment une fonction biunivoque $\mathfrak{F}_x = \varphi(x)$ de R sur $\widetilde{R}$.

Cela posé, nous démontrons d'abord le

Théorème 2. *L'ensemble $\widetilde{R}$ est partout dense dans R^*.*

Démonstration. Soient $\mathfrak{F}$ un point de R^* et $V^*(\mathfrak{F})$ un voisinage de $\mathfrak{F}$. Alors, pour ce $V^*(\mathfrak{F})$ il existe un ensemble M tel que $I(M) \in \mathfrak{F}$ et $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$. Or, $I(M) \in \mathfrak{F}$ entraînant $I(M) \neq \phi$, il existe un point x appartenant à $I(M)$. Par suite, il vient évidemment $\mathfrak{F}_x \in (I(M))^*$, donc on a $\mathfrak{F}_x \in V^*(\mathfrak{F})$, puisque $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$. Ce qui prouve que $\widetilde{R}$ est partout dense dans R^*, c.q.f.d.

Théorème 3. *Si l'espace R vérifie cette condition que $M \subset \overline{M}$, quel que soit M, alors la fonction inverse de $\mathfrak{F}_x = \varphi(x)$ est continue.*

Démonstration. Comme on le sait, il suffit de démontrer qu'on a $\varphi(\overline{X}) \supset \overline{\varphi(X)}$, quel que soit $X \subset R$.

Or, soit $\mathfrak{F}_x$ un point quelconque n'appartenant pas à $\varphi(\overline{X})$, autrement dit, soit $x \overline{\in} \overline{X}$. Il existe alors un voisinage $V(x)$ de x tel que $V(x) \cdot X = \phi$. Etant évidemment $x \in I(V(x))$, il vient $I(V(x)) \in \mathfrak{F}_x$. Par suite, l'ensemble $(I(V(x)))^*$ est un voisinage de $\mathfrak{F}_x$ dans R^*. D'autre part, $\mathfrak{F}_y$ étant un point quelconque du produit $\widetilde{R} \cdot (I(V(x)))^*$, on a alors $I(V(x)) \in \mathfrak{F}_y$ selon la définition de $(I(V(x)))^*$. Il vient donc $y \in I(V(x))$ en vertu de la définition de $\mathfrak{F}_y$; par suite, il existe un voisinage $V(y)$ tel que $V(y) \subset V(x)$. Il en résulte que $V(y) \cdot X = \phi$, en vertu du fait que $V(x) \cdot X = \phi$; donc $y \overline{\in} \overline{X}$ et de plus $y \overline{\in} X$ selon l'hypothèse que $M \subset \overline{M}$, quel que soit M. Par suite, on a $\mathfrak{F}_y \overline{\in} \varphi(X)$; ce qui donne $\widetilde{R} \cdot (I(V(x)))^* \cdot \varphi(X) = \phi$. En outre, étant $(R^* - \widetilde{R}) \cdot \varphi(X) = \phi$, il vient en fin de compte $(I(V(x)))^* \cdot \varphi(X) = \phi$; donc on a $\mathfrak{F}_x \overline{\in} \overline{\varphi(X)}$. Nous avons ainsi l'inclusion $\varphi(\overline{X}) \supset \overline{\varphi(X)}$, c.q.f.d.

Théorème 4. *Si l'espace R est quasi-accessible, alors la fonction $\mathfrak{F}_x = \varphi(x)$ est continue.*

Démonstration. Il nous suffit de démontrer qu'on a $\varphi(\overline{X}) \subset \overline{\varphi(X)}$, quel que soit $X \subset R$.

Soient x un point quelconque de $\overline{X}$ et $V^*(\mathfrak{F}_x)$ un voisinage quelconque de $\mathfrak{F}_x$. Alors, en vertu de la définition de $V^*(\mathfrak{F}_x)$, il existe un ensemble M tel que $I(M) \in \mathfrak{F}_x$ et $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F}_x)$. Il résulte de $I(M) \in \mathfrak{F}_x$ que $x \in I(M)$; il existe donc un voisinage $V(x)$ tel que $V(x) \subset M$. De plus, selon l'hypothèse posée, il existe un voisinage ouvert $U(x)$ de x tel que $U(x) \subset V(x)$. Par suite, on a $U(x) \subset M$. Dans ce cas, d'une part, étant $x \in \overline{X}$, il existe un point y appartenant au produit $U(x) \cdot X$, et d'autre part, $U(x)$ étant ouvert, $U(x)$ lui-même est un voisinage de y. Par suite on a $y \in I(U(x))$; donc $y \in I(M)$, puisque $U(x) \subset M$. Par conséquent, on a $\mathfrak{F}_y \in (I(M))^* = V^*(\mathfrak{F}_x)$; ce qui prouve que $V^*(\mathfrak{F}_x) \cdot \varphi(X) \neq \phi$, autrement dit, que $\mathfrak{F}_x \in \overline{\varphi(X)}$. Il vient donc $\varphi(\overline{X}) \subset \overline{\varphi(X)}$, c.q.f.d.

Des théorème 3 et 4, on a immédiatement le

Corollaire. *Si l'espace R est quasi-accessible, la fonction $\mathfrak{F}_x = \varphi(x)$ est bicontinue, autrement dit, R et $\dot{R}$ sont homéomorphes.*

Théorème 5. *Soient R un espace quasi-accessible et U un ensemble ouvert quelconque dans R. Si l'on fait correspondre à U l'ensemble $f(U) = U^*$ dans R^*, alors U^* est ouvert dans R^*, et de plus, dans ce cas, la famille de tous les ensembles de la forme $f(U)$ constitue une base pour les ensembles ouverts dans R^*, où U parcourt la famille de tous les ensembles ouverts dans R. En outre, cette correspondance $f(U) = U^*$ est isomorphe, c. à. d. on a, quels que soient U_1 et U_2,*

$$f(U_1 + U_2) = f(U_1) + f(U_2),$$
$$f(U_1 \cdot U_2) = f(U_1) \cdot f(U_2),$$

et elle vérifie la condition que $\varphi^{-1}(f(U) \cdot \widetilde{R}) = U$, où φ est la fonction définie dans le théorème 3.

Démonstration. Soit U un ensemble ouvert dans R et posons $f(U) = U^*$. En prenant un point $\mathfrak{F}$ de U^*, par la définition on a $U \in \mathfrak{F}$. Par conséquent, R étant quasi-accessible et U ouvert dans R, il vient $I(U) = U$; donc $(I(U))^* = U^*$ est un voisinage de $\mathfrak{F}$. Il en résulte d'abord que U^* est ouvert dans R^*.

En suite, soient U_1 et U_2 deux ensembles ouverts et distincts dans R. Alors, on peut supposer qu'il existe un point $x \in U_1 - U_2$, et dans ce cas on a $\mathfrak{F}_x \in U_1^*$ et $\mathfrak{F}_x \overline{\in} U_2^*$; Il en résulte que $f(U_1) \neq f(U_2)$. Par conséquent, la correspondance entre les familles $\{U\}$ et $\{f(U)\}$ est biunivoque. En outre, soient $G(*)$ un ensemble ouvert dans R^* et $\mathfrak{F}$ un point de $G(*)$. Etant $\mathfrak{F} \in G(*)$, il existe un voisinage $V^*(\mathfrak{F})$ de $\mathfrak{F}$ contenu dans $G(*)$ et, d'autre part, un ensemble $M \subset R$ tel que $I(M) \in \mathfrak{F}$ et $(I(M))^* = V^*(\mathfrak{F})$. De plus, $I(M)$ est ouvert dans R, puisque R est quasi-accessible; donc $f(I(M)) = (I(M))^* = V^*(\mathfrak{F}) \subset G(*)$. Ce qui montre qu'il existe un ensemble ouvert U tel que $f(U) \subset G(*)$

et $\mathfrak{F} \in f(U)$. Par conséquent, il existe pour $G(*)$ une famille $\mathfrak{A}$ des ensembles ouverts U convenablement choisis telle que $\sum_{U \in \mathfrak{A}} f(U) = G(*)$. Nous pouvons de là dire que la famille des ensembles $f(U)$ constitue une base pour les ensembles ouverts dans R^*. De plus, comme on le sait, étant $(U_1 + U_2)^* = U_1^* + U_2^*$ et $(U_1 \cdot U_2)^* = U_1^* \cdot U_2^*$, il vient donc

$$f(U_1 + U_2) = f(U_1) + f(U_2)\,; \quad f(U_1 \cdot U_2) = f(U_1) \cdot f(U_2).$$

Finalement, nous démontrons que $\varphi^{-1}(f(U) \cdot \tilde{R}) = U$; D'abord, il est visible que l'ensemble $f(U) \cdot \tilde{R}$ se compose de tous les ultrafiltres contenant un certain point de U, donc on a évidemment $\varphi^{-1}(f(U) \cdot \tilde{R}) = U$, c.q.f.d.

De plus, nous allons démontrer le

Théorème 6. *Soit W un espace quasi-accessible, compact, contenant l'espace R comme un sous-espace et vérifiant les trois conditions suivantes:*

(1) *L'espace W vérifie les conditions (T_2) et (T_3)*[1].

(2) $\bar{R} = W$.

(3) *Quel que soit un point $w \in W$, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ dans R de façon qu'il existe dans W un ultrafiltre $W(\mathfrak{F})$, contenant $\mathfrak{F}$ comme sa sous-famille et convergeant vers le point w.*

Dans ces conditions, il existe une fonction continue $w = f(\mathfrak{F})$ de R^* sur W telle que $x = f(\mathfrak{F}_x)$, quel que soit $\mathfrak{F}_x \in \tilde{R}$, où R^* et $\tilde{R}$ sont les ensembles définis dans le théorème 3.

Démonstration. Soit $\mathfrak{F}$ un point de R^*, autrement dit soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre dans R. Alors il existe un ultrafiltre dans W tel qu'il contient $\mathfrak{F}$ comme une vraie sous-famille, nous le désignons par $W(\mathfrak{F})$.

Remarquons tout d'abord, comme on peut le vérifier sans peine, que le système des parties communes à R et aux éléments de $W(\mathfrak{F})$ coïncide avec le système $\mathfrak{F}$.

Or, en tenant compte de la condition (T_2), l'ultrafiltre $W(\mathfrak{F})$ converge vers un point et un seul point, soit w. Dans ce cas, nous définissons une fonction f de R^* dans W telle que

$$w = f(\mathfrak{F}).$$

---

1) (T_2) et (T_3) signifient respectivement les conditions (2) du théroème 15 et (1) du théorème 16 de §2.

D'après cette définition, on a manifestement $f(\mathfrak{F}_x) = x$, quel que soit $\mathfrak{F}_x \in \widetilde{R}$.

Cela posé, nous allons démontrer que la fonction f est uniquement déterminée par $\mathfrak{F}$. Pour cela supposons qu'il existe dans W deux ultrafiltres $W_1(\mathfrak{F})$ et $W_2(\mathfrak{F})$ contenant $\mathfrak{F}$ comme leur sous-famille et que $W_1(\mathfrak{F})$ converge vers un point w_1 et $W_2(\mathfrak{F})$ un point w_2. Si $w_1 \neq w_2$, il existe selon la condition (T_2) deux voisinages $V(w_1)$ et $V(w_2)$ tels que $V(w_1)\cdot V(w_2) = \phi$. $W_1(\mathfrak{F})$ convergeant vers le point w_1, on a $V(w_1) \in W_1(\mathfrak{F})$. De même, on a $V(w_2) \in W_2(\mathfrak{F})$. Il vient donc $V(w_1)\cdot R \neq \phi \neq V(w_2)\cdot R$ selon l'hypothèse (2). En outre, d'après la remarque citée plus haut, $V(w_1)\cdot R \in \mathfrak{F}$ et $V(w_2)\cdot R \in \mathfrak{F}$. Ce qui nous donne une contradiction que $\mathfrak{F}$ n'est pas un filtre dans R. Donc on a $w_1 = w_2$ et par suite la fonction f est univoque.

Nous allons démontrer que $f(R^*) = W$. En effet, soit w un point quelconque de W. D'après l'hypothèse (3), il existe un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ dans R de façon qu'il existe dans W un ultrafiltre $W(\mathfrak{F})$ convergeant vers le point w et contenant $\mathfrak{F}$ comme sa sous-famille. Par conséquent, on a, par la définition, $f(\mathfrak{F}) = w$; Il en résulte que $f(R^*) = W$.

En dernier lieu, nous allons démontrer que f est continu sur R^*. Pour cela, il nous suffit de démontrer, selon le théorème 19 de § 2, que, pour chaque système ordonné $\{\mathfrak{F}_\alpha\}$ qui se compose des points $\mathfrak{F}_\alpha$ de R^* et converge vers un point $\mathfrak{F}$ de R^*, le système ordonné $\{f(\mathfrak{F}_\alpha)\}$ converge vers le point $f(\mathfrak{F})$.

Posons maintenant

$$f(\mathfrak{F}_\alpha) = w_\alpha \quad \text{et} \quad f(\mathfrak{F}) = w,$$

et prenons un voisinage quelconque $V(w)$ de w. Dans ce cas, selon la condition (T_3), il existe un voisinage ouvert $U(w)$ tel que $\overline{U}(w) \subset V(w)$. Etant $f(\mathfrak{F}) = w$, il existe un ultrafiltre $W(\mathfrak{F})$ dans W tel qu'il converge vers le point w et contient $\mathfrak{F}$ comme sa sous-famille. Donc on a $U(w) \in W(\mathfrak{F})$ et $U(w)\cdot R \in \mathfrak{F}$.

Or, $U(w)$ étant ouvert dans W, le produit $U(w)\cdot R$ l'est aussi dans le sous-espace R de W. Par conséquent, l'intérieur de $U(w)\cdot R$ relativement à l'espace R est identique à soi-même. Donc, en tenant compte de la définition d'un voisinage du point $\mathfrak{F}$ dans R^* et du fait que $U(w)\cdot R \in \mathfrak{F}$, il en résulte que l'ensemble $(U(w)\cdot R)^*$ est un voisinage du point $\mathfrak{F}$; nous posons donc $V^*(\mathfrak{F}) = (U(w)\cdot R)^*$.

En outre, d'une part le système ordonné $\{\mathfrak{F}_\alpha\}$ convergeant vers le point $\mathfrak{F}$, il existe pour $V^*(\mathfrak{F})$ un suffixe α tel que $\mathfrak{F}_\beta \in V^*(\mathfrak{F})$ pour tout $\beta \geqq \alpha$. Par conséquent, il vient par la définition $U(w)\cdot R \in \mathfrak{F}_\beta$ pour tout $\beta \geqq \alpha$. D'autre part, étant $f(\mathfrak{F}_\beta) = w_\beta$, le point w_β appartient aux fermetures de tous les ensembles de $\mathfrak{F}_\beta$, donc il vient $w_\beta \in \overline{U(w)\cdot R}$; par suite, on a, pour tout $\beta \geqq \alpha$,

$$f(\mathfrak{F}_\beta) = w_\beta \in \overline{U(w)} \subset V(w),$$

Ce qui prouve que le système $\{f(\mathfrak{F}_\alpha\}$ converge vers le point $f(\mathfrak{F})$; donc la fonction f est continue, c.q.f.d.

(Suivre)

Table des matières.

		pages
Introduction		129
§ 1.	Ensembles ordonnés	130
§ 2.	Fermeture, famille des voisinages et convergence	136
§ 3.	Convergence du système des ensembles	154
§ 4.	Immersion d'un espace dans un espace compact	158

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
OKAYAMA UNIVERSITY

(Received February 25, 1951)